Расчеты на устойчивость

УДК 539.3:534.1 DOI: 10.22363/1815-5235-2017-6-68-73

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ СДВИГАЮЩИХ НАГРУЗОК

С.П. ИВАНОВ*,**, *д-р техн. наук, профессор*
О.Г. ИВАНОВ*, *канд. техн. наук, доцент*
А.С. ИВАНОВА*, *аспирант*
**Поволжский государственный технологический университет,*
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3, e-mail: sp-ivanov@mail.ru
***Марийский государственный университет*
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.1

Представлен метод расчета на устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок. На основе вариационного метода Власова получена система дифференциальных уравнений для исследования устойчивости пластин. В качестве примера выполнен расчет на устойчивость шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины, на которую действует сдвигающая нагрузка, приложенная в срединной плоскости. Разработан алгоритм численного расчета на устойчивость пластин методом продолжения решения по параметру сдвигающей нагрузки, составлена и реализована программа на языке Фортран. В результате получено значение критической нагрузки, которое сопоставлено с табличными данными.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, пластина, сдвигающая нагрузка, вариационный метод Власова, критическая нагрузка.

Пластины находят широкое применение в строительстве, машиностроении и в других областях техники. На практике пластины подвергаются различным воздействиям (например, действию сдвигающих нагрузок). Поэтому задачи расчета на устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок являются важными для науки и практики. Исследованиям устойчивости пластин и оболочек посвящены работы многих авторов [1-6]. Цель настоящей работы заключается в разработке метода расчета на устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок, приложенных в срединной плоскости.

Рассмотрим пластину в плане (рис. 1), на которую действует сдвигающая нагрузка S, приложенная в срединной плоскости.

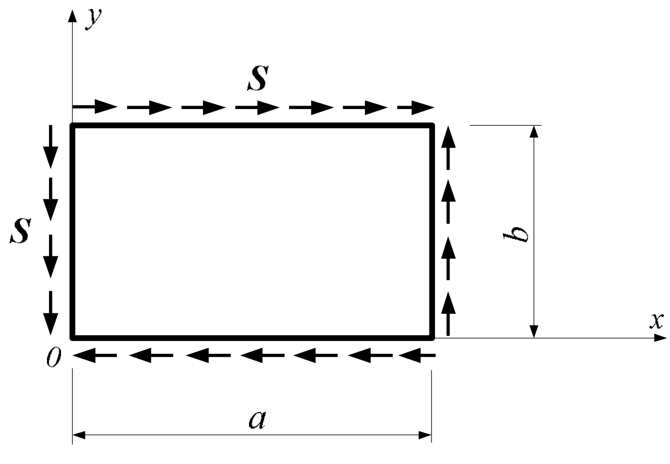

Рис. 1. Общая схема пластины в плане с действующей нагрузкой

Функцию прогибов $w(x,y)$ пластины представим в виде разложения по В.З. Власову [7]:

$$w(x,y)=\sum_i W_i(y) f_i(x); \quad (i=1,2,3,\ldots,n), \tag{1}$$

где

$W_i(y)$ – обобщенные перемещения, которые определяются из решения задачи; $f_i(x)$ – функции поперечного распределения прогибов (координатные функции), которые задаются из физического смысла задачи.

Запишем выражения для изгибающих моментов M_x, M_y и крутящего момента M_{xy}:

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\sum_{i=1}^{n}\left[W_i(y) f_i^{//}(x)+\nu W_i^{//}(y) f_i(x)\right]; \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -D\sum_{i=1}^{n}\left[W_i^{//}(y) f_i(x)+\nu W_i(y) f_i^{//}(x)\right]; \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial xy} = -D(1-\nu)\sum_{i=1}^{n} W_i^{/}(y) f_i^{/}(x); \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$D=\frac{E\cdot\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$ – цилиндрическая жесткость пластины,

δ – толщина пластины, E, ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} & w_x=\frac{\partial w}{\partial x}; \quad w_{xx}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ & w_y=\frac{\partial w}{\partial y}; \quad w_{yy}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ & w_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial xy};\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Составим выражение полной энергии:

$$\Pi=\iint\left\{\frac{1}{2}\left(M_x w_{xx}+M_y w_{yy}+2M_{xy}w_{xy}\right)-S\cdot w_x w_y\right\}dxdy, \tag{4}$$

где с учетом (1) имеем:

$$\begin{aligned} & w_x=\sum_{i=1}^{n} W_i(y) f_i^{'}(x); \quad w_{xx}=\sum_{i=1}^{n} W_i(y) f_i^{''}(x); \\ & w_y=\sum_{i=1}^{n} W_i^{'}(y) f_i(x); \quad w_{yy}=\sum_{i=1}^{n} W_i^{''}(y) f_i(x); \\ & w_{xy}=\sum_{i=1}^{n} W_i^{'}(y) f_i^{'}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Используя (1), (2) и (5), определим экстремальное значение полной энергии Π с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial F}{\partial W_i''}+\frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial W_i'}-\frac{\partial F}{\partial W_i}=0, \tag{6}$$

где F – подынтегральная функция в выражении (4).

Раскрывая (6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета на устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок:

$$\sum_i\left[a_{ji}\cdot W_i^{IV}-2b_{ji}\cdot W_i''-\frac{S}{a^*D}d_{ji}\cdot W_i'+c_{ji}\cdot W_i\right]=0, \tag{7}$$

где a^* - общая длина сторон пластины, на которые действует сдвигающая нагрузка S.

Коэффициенты уравнений (7) имеют вид:

$$a_{ji}=\int_x f_i f_j dx;\quad b_{ji}=\int_x f_i' f_j' dx-\frac{\nu}{2}[f_i f_j''+f_i'' f_j];$$
$$c_{ji}=\int_x f_i'' f_j'' dx;\quad d_{ji}=\int_x f_i' f_j dx;\quad (i,j=1,\,2,\,3,\ldots,n). \tag{8}$$

Полученные уравнения (7) можно применять для расчета на устойчивость пластин с различными граничными условиями на краях.

В качестве примера выполним расчет на устойчивость шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины, на которую действует сдвигающая нагрузка S, приложенная в срединной плоскости (рис. 1).

Для расчета принимаем два члена ряда:

$$w(x,y)=W_1(y)f_1(x)+W_2(y)f_2(x). \tag{9}$$

Координатные функции имеют вид:

$$f_1(x)=\sin\frac{\pi x}{a};\quad f_2(x)=\sin\frac{2\pi x}{a}. \tag{10}$$

Выбранные функции полностью удовлетворяют граничным условиям: при $x=0$ и $x=a$ сами функции и их вторые производные равны нулю.

Система дифференциальных уравнений (7) состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned}&a_{11}W_1^{IV}+a_{12}W_2^{IV}-2b_{11}W_1''-2b_{12}W_2''-\frac{S}{a^*D}\left(d_{11}W_1'+d_{12}W_2'\right)+\\&+c_{11}W_1+c_{12}W_2=0;\\&a_{21}W_1^{IV}+a_{22}W_2^{IV}-2b_{21}W_1''-2b_{22}W_2''-\frac{S}{a^*D}\left(d_{21}W_1'+d_{22}W_2'\right)+\\&+c_{21}W_1+c_{22}W_2=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты уравнений (11) определяются по формулам (8), некоторые из коэффициентов принимают нулевое значение:

$$a_{12}=a_{21}=0;\quad b_{12}=b_{21}=0;\quad c_{12}=c_{21}=0;\quad d_{11}=d_{22}=0.$$

В результате получаем уравнения (11) в упрощенном виде:

$$\begin{aligned}&a_{11}W_1^{IV}-2b_{11}W_1''-\frac{S}{a^*D}d_{12}W_2'+c_{11}W_1=0;\\&a_{22}W_2^{IV}-2b_{22}W_2''-\frac{S}{a^*D}d_{21}W_1'+c_{22}W_2=0.\end{aligned} \tag{12}$$

Граничные условия в направлении оси y: при $y = 0$ и $y = b$ имеем:

$$W_1(0) = W_1(b) = 0; \quad W_1''(0) = W_1''(b) = 0;$$
$$W_2(0) = W_2(b) = 0; \quad W_2''(0) = W_2''(b) = 0. \tag{13}$$

Систему уравнений (12) можно решать в рядах, принимая в первом приближении:

$$W_1(y) = W_{11} \sin\frac{\pi y}{b}; \quad W_2(y) = W_{22} \sin\frac{2\pi y}{b}. \tag{14}$$

Ортогонализируем уравнения (12). Умножаем первое уравнение на выражение $\sin\frac{\pi y}{b}$, а второе – на выражение $\sin\frac{2\pi y}{b}$, затем интегрируем в пределах от 0 до b.

Для квадратной пластины ($b = a$) составляем определитель относительно неизвестных W_{11}, W_{22} и получаем значение критической силы:

$$S_{кр.} = \pm 10{,}14 \frac{\pi^2 D}{a^2}. \tag{15}$$

Значения по табличным данным [8]:

$$S_{кр.} = \pm 9{,}34 \frac{\pi^2 D}{a^2}. \tag{16}$$

Значение критической силы, полученное с помощью данного метода, превышает табличное значение примерно на 11%. Результаты проведенных расчетов в точности совпадают с результатами, полученными А.С. Вольмиром [1] на основе двойных тригонометрических рядов.

Более точное решение данной задачи можно получить при непосредственном интегрировании системы уравнений (12) численно. Для этого в первое уравнение вводится слагаемое, которое связано с малым значением поперечной нагрузки и учитывает начальное несовершенство пластины. Поскольку данная задача является краевой задачей, т.е. известные граничные условия находятся на разных краях, то для численного решения систему дифференциальных уравнений (12) сводим к системе дифференциальных уравнений первого порядка и решаем задачу Коши с начальными условиями:

$$W_1(0) = 0;\ W_1'(0) = r_1;\ W_1''(0) = 0;\ W_1'''(0) = r_2;$$
$$W_2(0) = 0;\ W_2'(0) = r_3;\ W_2''(0) = 0;\ W_2'''(0) = r_4. \tag{17}$$

Неизвестные условия r_i на производных подбираются таким образом, чтобы на другом краю с определенной точностью выполнялись условия:

$$W_1(b) = 0; \quad W_1''(b) = 0;$$
$$W_2(b) = 0; \quad W_2''(b) = 0. \tag{18}$$

Для подбора неизвестных r_i используется итерационный метод Ньютона. Задаваясь приращением сдвигающей нагрузки S пошагово, каждый раз интегрируем дифференциальные уравнения (12) совместно с начальными условиями (17). Решаем краевую задачу с помощью программы, составленной на языке

Фортран (для численного интегрирования применяем метод Рунге-Кутта). По результатам расчетов построена кривая зависимости перемещения w от нагрузки S (при w, стремящемся к бесконечности, находим $S_{кр.}$). Получено значение критической нагрузки, достаточно близкое к табличным данным [8].

Таким образом, дифференциальные уравнения, полученные на основе вариационного метода В.З. Власова, позволяют достаточно точно рассчитывать на устойчивость пластины под действием сдвигающих нагрузок, приложенных в срединной плоскости.

Список литературы

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

2. *Aydin Komur M., Sonmez M.* Elastic buckling behavior of rectangular plates with holes subjected to partial edge loading // Journal of Constructional Steel Research. – 2015. – Vol. 112. – P. 54—60.

3. *Nazarimofrad E., Barkhordar A.* Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2016. – Vol. 23. – № 10. – P. 1144—1148.

4. *Upadhyay A.K., Shukla K.K.* Post-buckling of composite and sandwich skew plates // Jnt. J. Non-Linear Mech. – 2013. – Vol. 55. – P. 120—127.

5. *Колмогоров Г.Л., Зиброва Е.О.* Вопросы устойчивости анизотропных пластин // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 4. – С. 36—42.

6. *Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В.* Устойчивость нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек из композиционного материала при действии неравномерных нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 2. – С. 3—10.

7. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.

8. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Пластины, диски, балки-стенки. Прочность, устойчивость и колебания. – Киев: Госстройиздат, 1959. – 1052 с.

Поступила в редакцию 2 августа 2017 г. Прошла рецензирование 1 сентября 2017 г. Принята к публикации 18 октября 2017 г.

Об авторах:

ИВАНОВ СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет; профессор кафедры электромеханики, Марийский государственный университет. Опубликовал 147 научных статей, 2 монографии, 4 учебника, 20 наименований учебно-методической литературы. Научные интересы: расчеты на прочность, устойчивость и колебания физически и геометрически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем. 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3, e-mail: sp-ivanov@mail.ru

ИВАНОВ ОЛЕГ ГЕННАДЬЕВИЧ, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет. Опубликовал 35 научных статей, 1 монографию и 6 наименований учебно-методической литературы. Научные интересы: расчеты на прочность и устойчивость физически нелинейных пластин и пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой. 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3, e-mail: IvanovOG@volgatech.net

ИВАНОВА АНАСТАСИЯ СЕРГЕЕВНА, аспирант, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет. Научный руководитель – д.т.н., проф. Иванов С.П., Поволжский государственный технологический университет. В настоящее время работает над кандидатской диссертацией «Динамическая устойчивость физически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем» по специальности 05.23.17 – «Строительная механика». Опубликовала 15 научных статей и 1 учебное пособие. Научные интересы: расчеты на устойчивость физически нелинейных стержней, пластин и пластинчатых систем. 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3, e-mail: ivanova-a-s@list.ru

Для цитирования:

Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 6. – С. 68—73. Doi: 10.22363/1815-5235-2017-6-68-73.

R e f e r e n c e s

1. *Volmir, A.S.* (1967). *Stability of deformable systems*, Moscow: Science. 984 p. (In Russ.)
2. *Aydin Komur, M., Sonmez, M.* (2015). Elastic buckling behavior of rectangular plates with holes subjected to partial edge loading, *Journal of Constructional Steel Research*. Vol. 112. P. 54—60.
3. *Nazarimofrad, E., Barkhordar, A.* (2016). Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. Vol. 23. No 10. P. 1144—1148.
4. *Upadhyay, A.K., Shukla, K.K.* (2013). Post-buckling of composite and sandwich skew plates, *Jnt. J. Non-Linear Mech.* Vol. 55. P. 120—127.
5. *Kolmogorov, G.L., Zibrova, E.O.* (2015). Questions of the stability of anisotropic plates, *Applied Mathematics and Control Sciences.* No 4. P. 36—42. (In Russ.)
6. *Trushin, S.I., Zhuravleva, T.A., Sysoeva, E.V.* (2013). The stability of nonlinear deformable cylindrical composite shells under non-uniform loads, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* No 2. P. 3—10. (In Russ.)
7. *Vlasov, V.Z.* (1958). *Tonkostennye prostranstvennye sistemy*, Moscow: Gosstrojizdat. 502 p. (In Russ.)
8. *Vajnberg, D.V., Vajnberg, E.D.* (1959). *Plastiny, diski, balki-stenki. Prochnost', ustojchivost' i kolebanija*, Kiev: Gosstrojizdat. 1052 p. (In Russ.)

THE STABILITY OF PLATES UNDER THE ACTION OF SHEARING LOADS

S.P. IVANOV, O.G. IVANOV, A.S. IVANOVA

The method of stability analysis of plates under the action of shearing loads is presented. Using variation method of Vlasov, the set of differential equations of stability of plates is given. As an example, the stability calculation of rectangular plate hinge-supported along four sides under the action of shearing load in a median surface is realized. The numerical algorism of stability analysis of plates by the method of continuation on parameter of shearing load is developed, the Fortran program is realized. The obtained value of critical load is leveled with the table data.

KEY WORDS: stability, plate, shearing load, variation method of Vlasov, critical load.

Article history: *Received: August 2, 2017. Revised: September 1, 2017. Accepted: October 18, 2017*

About the authors:

IVANOV SERGEY PAVLOVICH, Doctor of Science, Professor, Head of Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology; Professor of Department of Electro-mechanics, the Mari State University. He is the author of 147 scientific articles, 2 monographs, 4 textbooks, 20 names of educational literature. General research interests: Strength, stability and vibrations analyses of the physically and geometric nonlinear rods, plates and plate systems. Mailing address: Russia, 424000, the Republic of Mari El, Yoshkar-Ola, Lenin Sq., b.3, e-mail: sp-ivanov@mail.ru

IVANOV OLEG GENNADEVICH, Cand. Sc, Assistant professor, Associate professor of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology. He is the author of 35 scientific articles, 1 monograph, 6 names of educational literature. General research interests: Strength and stability analyses of the physically nonlinear plates and plate systems resting on elastic foundation. Mailing address: Russia, 424000, the Republic of Mari El, Yoshkar-Ola, Lenin Sq., b.3, e-mail: IvanovOG@volgatech.net

IVANOVA ANASTASIA SERGEEVNA, aspirant, senior lecturer of the Department of Strength of Materials and Applied Mechanics, the Volga State University of Technology. Scientific adviser - Doctor of Science, Professor Ivanov S. P., the Volga State University of Technology. At the present time she works on the Candidate's dissertation «The dynamic stability of physically nonlinear rods, plates and plate systems» in the specialty 05.23.17 – « Structural Mechanics». She is the author of 15 scientific articles, 1 name of educational literature. General research interests: Stability analyses of the physically nonlinear rods, plates and plate systems. E-mail: ivanova-a-s@list.ru

For citation:

Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. (2017) The stability of plates under the action of shearing loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017. No 6. 68—73.
Doi: 10.22363/1815-5235-2017-6-68-73. (In Russ.)