

## Прочность летательных аппаратов

УДК 539.3

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНОЙ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫХ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В ОПЕРАЦИОННОЙ СРЕДЕ MATLAB**

В. В. ФИРСАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*

Л.М. ГАВВА, *канд. техн. наук, доцент*

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) МАИ, 125993 Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, k906@mai.ru*

*Приводятся соотношения математической модели для исследования задачи устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Уточняется математическая модель подкрепляющего элемента в условиях одностороннего контакта с обшивкой. Учитывается влияние процесса технологии изготовления панелей: остаточных температурных напряжений и предварительного натяжения армирующих волокон. На основании вариационного принципа Лагранжа получены разрешающее уравнение восьмого порядка и естественные граничные условия. В операционной среде MATLAB разработана программа. Проанализировано влияние параметров структуры на уровень критических сил изгибной формы потери устойчивости.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** панели из композиционных материалов, эксцентричный продольно-поперечный набор, тонкостенный стержень, несимметричная структура пакета, силовое и технологическое температурное нагружение, вариационный принцип Лагранжа, потеря устойчивости, изгибная форма, MATLAB.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-08-00849/17)

В операционной среде MATLAB построена программа и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, которые находятся в условиях силового воздействия, приводящего к потере устойчивости.

Рассматриваются задачи устойчивости плоской прямоугольной многослойной панели из полимерных волокнистых композиционных материалов с эксцентричным продольно-поперечным набором (рис. 1, 2) и плоской прямоугольной композитной панели с несимметричной по толщине структурой пакета. Панели находятся под действием постоянных погонных усилий, приложенных к кромкам в плоскости обшивки. Граничные условия на контуре соответствуют условиям частного вида, являются согласованными в отношении плоской задачи и задачи изгиба.

Тонкостенные панели несущих поверхностей ЛА из высокомодульных и высокопрочных композиционных материалов усилены дискретным набором, в том числе, с целью предотвращения потери устойчивости, к которой могут привести сжимающие и сдвигающие распределённые усилия, приложенные к кромкам в плоскости обшивки. Таким образом, исследование устойчивости плоских прямоугольных конструктивно-анизотропных композитных панелей является актуальным с точки зрения практики проектирования.

Согласно традиционной схеме, используемой при проектировании, наибольший интерес для практических расчётов представляет

- определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости рассматриваемой тонкостенной системы, когда число полуволн много меньше чис-

ла стрингеров,

- определение критических сил многоволнового крутильного выпучивания, связанного с изгибом обшивки в направлении нормали к поверхности между узлами пересечений и поворотом рёбер без искажения формы профиля.

Для исследования изгибной формы потери устойчивости панели правомочной является математическая модель, построенная на основе принципов конструктивной анизотропии с «размазыванием» жесткостей подкрепляющих элементов.

В рамках предлагаемой расчётной модели рассматриваются тонкостенные подкрепляющие элементы, которые находятся в условиях сложного сопротивления вследствие одностороннего контакта с обшивкой. Дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании составляет научную новизну работы.

Задача устойчивости так же, как и задача о докритическом напряжённом состоянии, является связанной, то есть не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

Согласно гипотезе Кирхгофа для компонент вектора перемещений  $k$ -ого слоя обшивки

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)z^{(k)} \\ v^{(k)}(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)z^{(k)} \\ w^{(k)}(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $u_0(x, y)$  и  $v_0(x, y)$  – перемещения  $u$  и  $v$  при  $z = 0$ , то есть в плоскости приведения.

Так как структура слоистой обшивки и всей конструктивно-анизотропной панели несимметрична, в расчётной схеме теряется смысл срединной поверхности. Плоскость приведения, в которой располагаются координатные оси  $x$  и  $y$ , соответственно, начало отсчёта координаты  $z$ , в дальнейшем может быть выбрана произвольно. С использованием соотношений Коши, закона Гука с учётом влияния температуры и предварительного натяжения волокон, а также формул преобразования напряжений при повороте осей координат компоненты тензора напряжений  $k$ -ого слоя панели определяются равенствами:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H1}^{(k)} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z^{(k)} - \bar{\alpha}_2^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H2}^{(k)} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} 2z^{(k)} - \bar{\alpha}_6^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H6}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\bar{Q}_{i,j}^{(k)}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$  – жёсткости слоя,  $\bar{\alpha}_j^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, 6$  – коэффициенты температурного расширения слоя,  $\bar{\varepsilon}_{Hj}^{(k)}$ ,  $j = 1, 2, 6$  – деформации натяжения слоя, - приведённые к осям координат панели,  $\Delta T$  – разность между комнатной температурой и температурой отверждения при расчёте остаточных температурных напряжений,

либо интенсивность внешнего температурного поля.

В силу совместной работы в одностороннем контакте с обшивкой элементы набора находятся в условиях косоугольного изгиба и стеснённого кручения. Для определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) рёбер жёсткости применяется предложенный В.З. Власовым вариационный метод расчёта тонкостенных пространственных систем в перемещениях [2], дающий возможность построить теорию тонкостенных упругих стержней без введения гипотезы об отсутствии деформации сдвига срединной поверхности профиля. Перемещения и углы поворота панели и подкреплений по линиям контакта считаются равными.

Компоненты напряжённо-деформированного состояния  $k$ -ого слоя композитных стрингеров вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(k)}(x, s) &= u_0(x) - \frac{\partial w}{\partial x}(x) z^{(k)} - \frac{\partial v_0}{\partial x}(x) y^{(k)} + [u_4(x)]_1 \omega_1^{(k)}(s) \\ v_1^{(k)}(x, s) &= w(x) z'^{(k)} + v_0(x) y'^{(k)} - \frac{\partial w}{\partial y}(x) \rho_1^{(k)}(s) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1}^{(k)} &= \bar{Q}_{11}^{(k)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^{(k)} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} y^{(k)} + \frac{\partial (u_4)_1}{\partial x} \omega_1^{(k)} - \bar{\alpha}_1^{(k)} \Delta T - \bar{\varepsilon}_{H_1}^{(k)} \right] \\ \tau_{xy_1}^{(k)} &= \bar{Q}_{66}^{(k)} \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\rho_1 + \rho_1^0)^{(k)} + (u_4)_1 \rho_{\omega_1}^{(k)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Здесь деформация поперечного сечения  $u_4(x)$  полагается свободной,  $\omega_1^{(k)}(s)$  строится в соответствии с эпюрой секториальных площадей для открытых контуров. Учитывается деформация сдвига при кручении тонкостенного стержня, которая определяется его поворотом относительно выбранного полюса, а также относительно центра изгиба в рамках поправок по теории «чистого» кручения.  $\rho_1^{(k)}(s)$ ,  $\rho_{\omega_1}^{(k)}(s)$  - длины перпендикуляров, опущенных на касательную к контуру в рассматриваемой точке из точки контакта стрингера с обшивкой и из центра изгиба, соответственно,  $\rho_1^0(s)$  определяет дополнительный момент инерции продольного ребра при «чистом кручении».

Аналогичным образом строятся перемещения и напряжения рёбер жёсткости, расположенных по оси  $y$ .

Ниже рассматривается упрощённый вариант математической модели, соответствующий предположению о малости нормальных напряжений, обусловленных изгибом подкреплений в плоскости панели и деформацией их поперечных сечений. Используя асимптотические свойства и пренебрегая членами, соответствующими краевым эффектам, в выражениях (3), (4) будем считать, что стержни работают на растяжение-сжатие, изгиб из плоскости пластины и кручение. При этом в дальнейшем задача сводится к исследованию медленно меняющегося основного напряжённого состояния в рамках разрешающего уравнения восьмого порядка в частных производных.

В расчётной схеме плоской прямоугольной гладкой панели из полимерных во-

локнистых композиционных материалов, обладающей анизотропией вследствие несимметрии свойств структуры пакета по толщине, распространение гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды является правомочным.

Уравнения равновесия и естественные граничные условия выводятся с помощью вариационного принципа Лагранжа в результате минимизации функционала полной потенциальной энергии системы:

$$\delta \mathcal{E} = 0,$$

где

$$\mathcal{E} = \iint_S f \left[ x, y; u_{0x}, u_{0y}; v_{0x}, v_{0y}; w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}; (u_4)_1, (u_4)_2 \right] dx dy. \quad (5)$$

После осреднения жесткостных характеристик ортогонально расположенных подкреплений по обшивке задача сводится к нахождению перемещений базисной поверхности приведения.

Уравнения равновесия панели при действии внешней погонной нагрузки в направлении нормали к поверхности представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений относительно искомых функций перемещений –  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w(x, y)$ . Данная система может быть сведена к одному разрешающему дифференциальному уравнению относительно потенциальной функции  $\Phi(x, y)$ , через которую выражаются все расчётные величины задачи, в том числе перемещения:

$$\begin{aligned} w &= \left( R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{31} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi; \\ u_0 &= \left( R_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + R_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + R_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + R_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + R_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + R_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi; \\ v_0 &= \left( S_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + S_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + S_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + S_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + S_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + S_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5} \right) \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Третье уравнение системы на основании формул связи (6) приводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка относительно искомой функции  $\Phi(x, y)$  вида:

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{71}}{a^7 b} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^7 \partial y} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{53}}{a^5 b^3} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^5 \partial y^3} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \dots \quad (7)$$

Обобщённые жёсткости в линейных дифференциальных операторах уравнений равновесия, коэффициенты  $R_{ij}$ , ( $i=4,3,\dots,0, j=0,1,\dots,4$ )  $R_{ij}$ , ( $i=5,4,\dots,0, j=0,1,\dots,5$ ),  $S_{ij}$ , ( $i=5,4,\dots,0, j=0,1,\dots,5$ ) в формулах связи (6) и  $K_{ij}$ , ( $i=8,7,\dots,0, j=0,1,\dots,8$ ) в разрешающем уравнении (7) – постоянные величины, зависящие от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции,  $x = x/a$ ,  $y = y/b$  в (7) – безразмерные координаты.

Естественные граничные условия

$$\left. \begin{aligned} x = const \rightarrow N_x \delta u_0 = N_{xy} \delta v_0 = \bar{Q}_x \delta w = M_x \delta w_x = H_{xy} \delta w_y = 0 \\ y = const \rightarrow N_y \delta v_0 = N_{yx} \delta u_0 = \bar{Q}_y \delta w = M_y \delta w_y = H_{yx} \delta w_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

позволяют построить выражения для внутренних силовых факторов, например:

$$N_x(M_x) = A_{11}(B_{11})\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12}(B_{12})\frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16}(B_{16})\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) -$$

$$- B_{11}(D_{11})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{12}(D_{12})\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2B_{16}(2D_{16})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_x^T(M_x^T) - N_x^H(M_x^H). \quad (9)$$

Здесь и далее  $N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T, H_{yx}^T$  – температурные усилия и моменты,  $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H, H_{yx}^H$  – усилия и моменты от натяжения;  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, i, j = 1, 2, 6$  – обобщённые жесткости, определяемые характеристиками материала и геометрией панели.

Согласно формулам (9) усилия и моменты зависят как от функций продольного и тангенциального смещений в плоскости обшивки –  $u_0(x, y), v_0(x, y)$ , так и от функции прогиба  $w(x, y)$ . В рассматриваемой постановке задача не разделяется на плоскую и изгиб пластины.

Внутренние силовые факторы композитной обшивки без подкреплений с не-симметричной по толщине структурой пакета могут быть получены путём интегрирования соответствующих компонент тензора напряжений по толщине, что обусловлено возможностью распространения гипотезы Кирхгофа на всё тело анизотропной среды.

В этом случае система уравнений равновесия строится через усилия и моменты в канонической форме.

Если структура композиционного материала и композитной панели ортотропна, то жесткости  $A_{16} = A_{26} = 0$  и жесткостями  $B_{16}, B_{26}, D_{16}, D_{26}$  можно пренебречь вследствие их малости по сравнению с остальными жесткостными характеристиками. Тогда линейные дифференциальные операторы связи (6), для симметричных компонент НДС и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения (7) содержат лишь производные чётной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечётными производными.

Решение задачи устойчивости осуществляется на основе общего дифференциального уравнения устойчивости 8-го порядка, построенного на основе дифференциального уравнения равновесия с учётом приведённой нагрузки от действия нормальных  $N_x, N_y$  и тангенциальных  $N_{xy}, N_{yx}$  усилий, которое имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0,1,2,\dots}^8 K_{8-i,i} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^{8-i} \partial y^i} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Прогиб  $w(x, y)$  связан с потенциальной функцией  $\Phi(x, y)$  соотношением:

$$w = \left( R_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + R_{31} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + R_{13} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + R_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi.$$

Если структура композитной панели ортотропна, задача сводится к исследованию дифференциального уравнения, в левой части которого содержатся чётные производные  $\Phi(x, y)$  по каждой из координат, а нечётные производные в правой части связаны со сдвигом, то есть

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \frac{N_x R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{40}}{a^5 b} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^5 \partial y} + \\ + \frac{(N_x R_{22} + N_y R_{40})}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{22}}{a^3 b^3} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^3 \partial y^3} + \\ + \frac{(N_x R_{04} + N_y R_{22})}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{(N_{xy} + N_{yx}) R_{04}}{a b^5} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial y^5} + \\ + \frac{N_y R_{04}}{b^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} \end{array} \right] \quad (11)$$

Все компоненты напряжённого состояния и внутренние силовые факторы – усилия в плоскости обшивки могут быть выражены через потенциальную функцию  $\Phi(x, y)$ :

$$\left. \begin{array}{l} N_x = L_{Nx} \Phi - N_x^T - N_x^H, \quad N_y = L_{Ny} \Phi - N_y^T - N_y^H \\ N_{xy} = L_{Nxy} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H, \quad N_{yx} = L_{Nyx} \Phi - N_{yx}^T - N_{yx}^H \end{array} \right\} \quad (12)$$

где, например, для ортотропной структуры

$$L_{Nx} = P_{60}^x \frac{\partial^6}{\partial x^6} + P_{42}^x \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + P_{24}^x \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + P_{06}^x \frac{\partial^6}{\partial y^6} \text{ и т. д.}$$

Коэффициенты  $P_{ij}^x$ ,  $i=6,4,2,0$ ,  $j=0,2,4,6$  так же, как и коэффициенты в формулах связи (6), определяются геометрией и упругими характеристиками материала конструкции.

При непосредственной подстановке соотношений (12) в правую часть уравнения (11) задача устойчивости конструктивно-анизотропной композитной панели становится нелинейной, и, с точки зрения прямого подхода, её исследование в точной постановке связано с определёнными математическими трудностями. Ограничиваясь в дальнейшем приближённым решением, для определения критических сил применим метод линеаризации.

Для определения нормальных и сдвигающих усилий, вызванных внешней нагрузкой, рассмотрим напряжённо-деформированное состояние конструкции при продольном изгибе, то есть докритическое основное напряжённое состояние, которое, согласно предложенной расчётной схеме, является сложным, так как не разделяется на плоскую задачу и изгиб пластины. Далее задачу устойчивости, из решения которой может быть найдено дополнительное по отношению к исходному деформированию искривление поверхности приведения, будем формулировать как задачу о собственных значениях, определяя критические нагрузки из условия нетривиальности системы однородных линейных алгебраических уравнений, полученной при выполнении условий на контуре.

Рассмотрим определение критических сил общей изгибной формы потери устойчивости плоской прямоугольной несимметрично подкреплённой композитной панели ортотропной структуры. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба и скользящей заделке в тангенциальном направле-

нии в отношении плоской задачи, когда края панели нагружены потоками касательных сил. По двум противоположным сторонам распределены равномерно нормальные сжимающие усилия интенсивности  $P$ .

В первом приближении, пренебрегая переменностью докритического напряжённого состояния, положим, что до потери устойчивости

$$N_x = -P, N_{xy} = N_{yx} = N_y = 0.$$

Тогда уравнение изогнутой поверхности запишем в виде

$$\frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + P \left[ \frac{R_{40}}{a^6} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^6} + \frac{R_{22}}{a^4 b^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{a^2 b^4} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} \right] = 0 \quad (13)$$

где  $x = x/a$ ,  $y = y/b$  – относительные координаты;  $a$ ,  $b$  – длина и ширина панели, соответственно.

Интеграл уравнения (13), удовлетворяющий краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} w[(0;1), y] = M_x[(0;1), y] = v_0[(0;1), y] = N_x[(0;1), y] = 0 \\ w[x, (0;1)] = M_y[x, (0;1)] = u_0[x, (0;1)] = N_y[x, (0;1)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

представим двойным тригонометрическим рядом:

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \quad (15)$$

где  $m$  и  $n$  – параметры волнообразования.

Тогда равенство

$$P = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{K_{80} \left(\frac{m}{c}\right)^8 + K_{62} \left(\frac{m}{c}\right)^6 n^2 + K_{44} \left(\frac{m}{c}\right)^4 n^4 + K_{26} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^6 + K_{08} n^8}{\left[ R_{40} \left(\frac{m}{c}\right)^4 + R_{22} \left(\frac{m}{c}\right)^2 n^2 + R_{04} n^4 \right] \left(\frac{m}{c}\right)^2} \quad (16)$$

где  $c = a/b$ , при  $m = 1, 2, 3, \dots$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$  даст спектр значений параметра  $P$ , при котором становится возможным деформирование поверхности приведения вида (15).

Для определения критического значения нагрузки  $P_{кр}$  выражение (16) необходимо минимизировать по параметрам волнообразования, то есть решить экстремальную задачу.

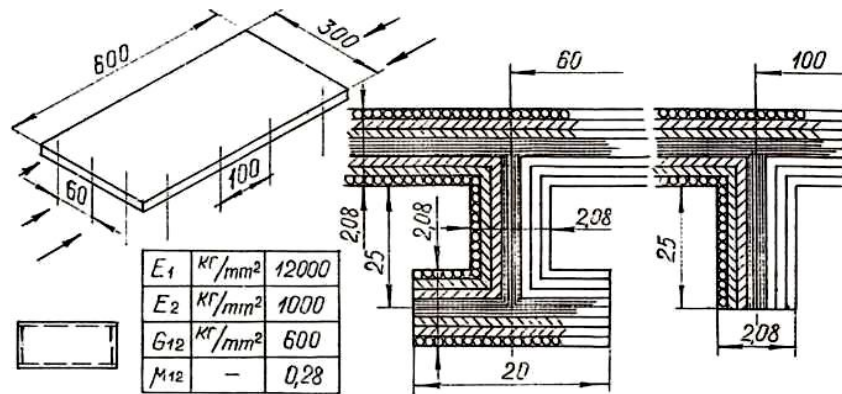
Считая в дальнейшем число полуволн  $n$  в направлении стороны  $b$  фиксированным и полагая, таким образом, усилие  $P$  функцией одной переменной  $\lambda = m/c$ , приравняем нулю её производную  $\partial P / \partial \lambda = 0$ .

Если соотношение сторон  $c$  удовлетворяет условию  $c = m' / \lambda$ , где  $m'$  – целое число, а  $\lambda$  – наименьший положительный действительный корень алгебраического уравнения двенадцатого порядка

$$\begin{aligned} (K_{80} R_{40}) \lambda^{12} + (2K_{80} R_{22}) \lambda^{10} n^2 + (-K_{44} R_{40} + K_{62} R_{22} + 3K_{80} R_{04}) \lambda^8 n^4 + \\ + (-2K_{26} R_{40} + 2K_{62} R_{04}) \lambda^6 n^6 + (-3K_{08} R_{40} - K_{26} R_{22} + K_{44} R_{04}) \lambda^4 n^8 + \\ + (-2K_{08} R_{22}) \lambda^2 n^{10} + (-K_{08} R_{04}) n^{12} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

в выражении (16) следует положить  $m = m'$ , и полученное значение критической силы будет наименьшим из всех, определяемых по этой формуле.

Зависимость критических усилий от отношения сторон панели



Панель с продольно-поперечным набором. Изгибная и крутильная формы потери устойчивости

$a$ мм	150	300	450	600	900	
$c$	-	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0



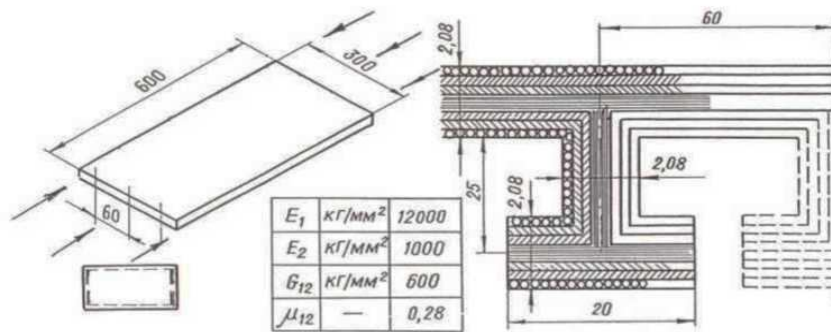
Рис. 1

Для уточнения величины критического усилия строятся соотношения между параметрами волнообразования и отношением сторон панели  $c$  в том случае, когда



при одной и той же критической нагрузке окажутся возможными две формы равновесия: с  $m$  полуволн и с  $(m + 1)$  – ой полуволной в направлении стороны  $a$ .

Зависимость критических усилий от высоты стенки стержня



Стрингерная панель, сжатая в продольном направлении.  
Изгибная и крутильная формы потери устойчивости



Рис. 2

Традиционный подход к построению функции  $\Phi(x, y)$  в виде разложения её в двойные ряды по системе тригонометрических функций (15) позволяет исследовать критические параметры панелей с граничными условиями лишь частного вида, которые соответствуют шарнирному опиранию в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – заземлению в тангенциальном направлении при нагружении

контура потоками касательных сил.

Если краевые условия отличны от условий (14), представляется возможным оценить влияние технологии изготовления на несущую способность конструктивно-анизотропной композитной панели: остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, и предварительного натяжения армирующих волокон.

Решение строится в одинарных тригонометрических рядах или методом однородных решений, либо принимается во внимание докритическое напряжённое состояние конструкции.

В соответствии с изложенным алгоритмом на языке операционной среды MATLAB разработан пакет прикладных программ для РС, предназначенный для проведения расчётов на устойчивость и процесса оптимизации проектирования конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов.

В качестве примера на рис. 1, 2 представлены результаты определения критических параметров эксцентрично подкреплённых в продольно-поперечном направлениях и стрингерных, соответственно, прямоугольных панелей из углепластика, находящихся под действием постоянной погонной сжимающей нагрузки;  $n$  – число полуволн в направлении координаты  $y$ ,  $m$  – число полуволн в направлении координаты  $x$ .

Для коротких панелей при отношении сторон  $c < 0,75$  характерно многоволновое крутильное выпучивание  $n = 6$ ,  $m = 8$  (рис. 1). При отношении сторон  $c = 0,75$  панель становится равноустойчивой. Панели с  $0,75 < c < 2,0$  теряют устойчивость по общей изгибной форме  $n = 1$ ,  $m = 1$ , при  $c > 2,0$  по общей изгибной форме  $n = 1$ ,  $m = 2$ .

Чем ниже жёсткость стержней на изгиб, высота стенки стрингера  $c_{4x} < 25$  мм, тем выше вероятность общей изгибной формы потери устойчивости  $n = 1$ ,  $m = 1$ . Когда высота стенки стрингера  $c_{4x} > 25$  мм, панель теряет устойчивость по крутильной форме  $n = 6$ ,  $m = 7$  (рис. 2).

При фиксированном расстоянии между стрингерами высота стенки профиля выбирается таким образом, чтобы сжатая в продольном направлении панель не теряла устойчивости по различным формам при заданном уровне внешнего нагружения.

Выполнена компьютерная многокритериальная оптимизация конструктивно-анизотропных композитных панелей ЛА. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчёта варианта минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчётов на устойчивость дают возможность снижения и оптимизации весовых характеристик конструкции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-08-00849/17)

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
2. Власов В.З. Избранные труды в 3-х томах. – М.: Изд-во АН СССР, т. 1, 1962. – 528 с.
3. Молодцов Г.А., Гавва Л.М., Осинская Е.А. Устойчивость плоских панелей из слоистых композиционных материалов несимметричной структуры по толщине с учётом технологических факторов. – М.: МАИ, 1987. – 22 с. (ВИНИТИ 08.09.87, №6571 – В-87).

Поступила в редакцию 1 марта 2017 г. Прошла рецензирование 14 мая 2017 г.  
Принята к публикации 14 июня 2017 г.

**Об авторах:** ФИРСАНОВ ВАЛЕРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Машиноведение и детали машин», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) МАИ, 125993, Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, E-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)

ГАВВА ЛЮБОВЬ МИХАЙЛОВНА, кандидат технических наук, ведущий инженер кафедры «Проектирование самолётов», доцент кафедры «Машиноведение и детали машин», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) МАИ, 125993, Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, E-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)

**Для цитирования:** Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование изгибной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов в операционной среде Matlab// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 4. – С. 66 — 76 .

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-66-76

#### References

1. Vasilyev, V.V. (1988). *Mechanics of Structures from Composite Materials*. Moscow: Mashinostroenie, 269 p. (in Russian).
2. Vlasov, V.Z. (1962). *Proceedings in Three Volumes*. Moscow: AS USSR, vol. 1, 528 p.
3. Molodtsov, G.A., Gavva, L.M., Osinskaya, E.A. (1987). Buckling of plane panels from plied composite materials with non-symmetric structure under technology factors being taken into consideration. M., MAI, 1987. 22 p. (VINITI 08.09.87, №6571 – V-87), (in Russian).

#### THE INVESTIGATION OF THE BENDING FORM OF BUCKLING FOR STRUCTURALLY-ANISOTROPIC PANELS MADE OF COMPOSITE MATERIALS IN OPERATING MATLAB SYSTEM

V.V. FIRSANOV, L.M. GAVVA

*Moscow Aviation Institute (National Research University) MAI*

The mathematical model relations for buckling investigation of structurally-anisotropic panels made of composite materials are presented. The mathematical model of stiffening rib being torsioned under one-side contact with the skin is refined. One takes into account the influence of panel production technology: residual thermal stresses and reinforcing fibers preliminary tension. The resolved eight order equation and natural boundary conditions are obtained with variation Lagrange method. Computer program is developed using operating MATLAB system. The influence of the structure parameters on the level of critical buckling forces for bending form has analyzed.

**Key words:** panels made of composite materials, un-centric longitudinal and lateral set, thin-walled rib, non-symmetric package structure, force and technology temperature action, variation Lagrange method, buckling, bending form, MATLAB.

**Article history:** Received: March 1, 2017. Revised: May 14, 2017.

Accepted: June 14, 2017.

**About the authors:** FIRSANOV VALERIY VASILYEVICH, DSc, Professor, head of department "Machine-building and machine details", Moscow Aviation Institute (National Research University) MAI, Volokolamskoye shosse, 4, Moscow, Russia, 125993, E-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)

GAVVA LIUBOV MICHAILOVNA, PhD., leading engineer of department "Aircraft design", Associate professor of department "Machine-building and machine details", Moscow Aviation Institute (National Research University) MAI, Volokolamskoye shosse, 4, Moscow, Russia, 125993, E-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)

**For citation:** Firsanov V.V., Gavva L.M. (2017). The investigation of the bending form of buckling for structurally-anisotropic panels made of composite materials in operating MATLAB system, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (4), 66 — 76 (In Russian).

DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-66-76