

**Динамика конструкций и сооружений**

**СВОБОДНОЕ КОЛЕБАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА ДВУХКОНСТАНТНОМ ОСНОВАНИИ**

НАТИГ С. РЗАЕВ

*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,  
ул. Б Вагабзаде 9, Баку, AZ 1141, Азербайджан,  
natiq.rzayev.1984@list.ru*

*В работе рассматривается задача о собственном колебании стержня из неоднородного по толщине и длине разномодульного материала и лежащего на двухконстантном основании типа Пастернака П.Л.*

*Уравнение движения является сложным дифференциальным уравнением с частными производными четвертого порядка. Решение задачи строится с помощью метода разделения переменных и метода ортогонализации Бубнова–Галеркина. При конкретных значениях характерных параметров проведен расчет, и результаты представлены в виде таблиц и графиками зависимости между круговой частотой и параметрами неоднородности. Результаты расчетов показывают, что учет неоднородности модуля упругости и плотности существенным образом влияет на величины круговых частот.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** растяжение, сжатие, изгиб, кручение, эластичность, круговая частота, колебание.

В работе исследуется задача свободного поперечного колебания стержня прямоугольного поперечного сечения, изготовленного из разномодульного неоднородного материала, лежащего на двухконстантном основании Пастернака [1]. Решение задачи осуществляется путем применения метода разделения переменных Бубнова-Галеркина. В первом приближении найдена формула для определения значения круговой частоты. При конкретных значениях характерных параметров проведен численный анализ, и результаты представлены в виде таблиц и графиков.

Как известно, в строительстве современных инженерных сооружений, в машиностроении и во многих других отраслях широко используются конструкции из неоднородного разномодульного материала. Сюда можно отнести, в основном, композитные неоднородные материалы, наполненные полимерами [1,6]. Предполагается, что модуль упругости соответственно при растяжении и сжатии и плотность являются непрерывными функциями координат длины  $x$  и высоты  $z$ :

$$E^+ = E_0^+ f_1(x) f_2(z); \quad E^- = E_0^- f_1(x) f_2(z); \quad \rho = \rho_0 \psi_1(x) \psi_2(z). \quad (1)$$

Здесь  $E_0^+$ ,  $E_0^-$ ,  $\rho_0$  – соответствуют однородному изотропному материалу,  $f_1(x)$  со своими производными до второго порядка и  $\psi_1(x)$  – являются непрерывными функциями. Отметим, что специфическим фактором в данном случае является то, что граница растянутых и сжатых областей существенным образом зависит от функции  $f_2(z)$ .

Распределение напряжений по сечению определяется с использованием следующих соотношений:

$$\sigma = E^+ f_1(x) f_2(z) (l - \varphi z); \quad \sigma > 0; \quad \sigma = E^- f_1(x) f_2(z) (l - \varphi z); \quad \sigma < 0. \quad (2)$$

Предполагается, что уравнение нейтральной линии определяется следующим соотношением:

$$l - z_0 \varphi = 0, \quad (3)$$

где  $l$  и  $\wp$  – значения деформации и кривизны центральной линии,  $z_0$  – граница нейтральной линии.

Сюда необходимо добавить условие отсутствия и уравнение момента:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} \sigma^+ dz + \int_{h_2} \sigma^- dz = 0, \quad (4)$$

$$M = \int_{-h}^{+h} z \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} z \sigma^+ dz + \int_{h_2} z \sigma^- dz = 0. \quad (5)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – размеры растянутых и сжатых зон.

Учитывая формулы (1) и (4), получим

$$\int_{-h}^{+h} \sigma dz = \int_{h_1}^{+h} f_2(z)(l - z \wp) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z)(l - z \wp) dz = 0, \quad \left( \alpha = \frac{E^-}{E^+} \right);$$

отсюда находим:

$$l = \wp \cdot \frac{\int_{h_1}^{+h} f_2(z) z dz + \alpha \int_{h_2} z f_2(z) dz}{\left[ \int_{h_1}^{+h} f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z) dz \right]^2}. \quad (6)$$

Теперь определим изгибающий момент:

$$\frac{M}{b} = f_1(x) \left[ \int_{h_1}^{+h} E^+ f_2(z)(l + z \wp) z dz + \int_{h_2} E^- f_2(z)(l + z \wp) z dz \right], \quad (7)$$

или же

$$\frac{M}{bE^+ f_1(x)} = l \left[ \int_{h_1}^{+h} \bar{z} f_2(\bar{z}) d\bar{z} + \alpha \int_{h_2} \bar{z} f_2(\bar{z}) d\bar{z} \right] + \wp \left[ \int_{h_1}^{+h} \bar{z}^2 f_2(\bar{z}) d\bar{z} + \alpha \int_{h_2} \bar{z}^2 f_2(\bar{z}) d\bar{z} \right].$$

Подставляя сюда выражение (6), получим:

$$\frac{M}{bE^+ f_1(x)} = \wp \left[ \frac{\left( \int_{h_1}^{+h} z f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} z f_2(z) dz \right)^2}{\int_{h_1}^{+h} f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} f_2(z) dz} + \int_{h_1}^{+h} z^2 f_2(z) dz + \alpha \int_{h_2} z^2 f_2(z) dz \right],$$

где, как уже указывалось ранее,  $h_1$  и  $h_2$  – размеры по высоте растянутых и сжатых зон.

С учетом (7) и сопротивления двухконстантного основания уравнение движения записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ f(x) \frac{\partial W}{\partial x^2} \right] + \bar{K}_1 W - \bar{K}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{\rho} \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $K_1$  и  $K_2$  – характеристики основания, определяемые с помощью экспериментов. Приняты следующие обозначения:

$$\bar{K}_1 = K_1 (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}; \quad \bar{K}_2 = (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}; \quad \bar{\rho}_0 = \frac{1}{2h} \int_h \psi_2(z) dz; \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 (\bar{M}_0 \bar{K})^{-1}.$$

Уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2f_1'(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (f_1'' - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) W + \bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Как видно, уравнение (9) является сложным и поэтому при решении следует применить приближенные аналитические методы. В данном случае будут использованы методы, которые являются эффективными и апробированными, а именно, метод разделения переменных и метод Бубнова - Галеркина.

В первом случае решение будем искать в следующем виде:

$$W(x) = V(x) \sin \omega t, \quad (10)$$

где  $V(x)$  должно удовлетворять краевым условиям,  $\omega$  – круговая частота. Подставляя (10) в (9), получим:

$$\frac{d^4 V}{dx^4} + 2f_1'(x) \cdot \frac{d^3 V}{dx^3} + (f_1'' - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 V}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) V - \bar{\rho} \omega^2 \psi_2(x) f_1^{-1}(x) = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) будем искать с помощью метода Бубнова- Галеркина, а функцию  $V(x)$  примем в следующем виде:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n a_i \theta_i(x). \quad (12)$$

Здесь  $a_i$  – неизвестные постоянные и каждый член ряда  $\theta_i(x)$  должен удовлетворять соответствующим краевым условиям.

Функция ошибки в данном случае записывается в следующем виде:

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_i}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_i}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} + \bar{K}_1 f_1^{-1}(x) \theta_i - (\bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x)) \omega^2 \right] \neq 0. \quad (13)$$

Условие ортогонализации в данном случае имеет вид:

$$\int_0^l \eta(x) \theta_k dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В произвольном приближении  $\omega^2$  определяется из системы уравнений (14). Эта система относительно  $\omega^2$  является линейно однородным уравнением. Для существования нетривиального решения главный определитель данной системы должен обращаться в нуль:

$$\|\omega^2\| = 0. \quad (15)$$

При раскрытии (15) получается алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени относительно  $\omega^2$ . Хотя при помощи современной компьютерной техники определение  $\omega^2$  при любом приближении не вызывает особого труда, будем определять основной тон частоты. Это соответствует первому приближению:

$$\int_0^l \eta(x) \theta_1 dx = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 - \omega^2 \bar{\rho} \psi_2(x) f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] dx = 0. \quad (17)$$

Отсюда находим:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l \psi(x) \cdot f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (18)$$

В случае если стержень является неоднородным только по модулю упругости  $\psi(x)=1$  и формула (18) принимает следующий вид:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + (f_1''(x) - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x)) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} + \bar{K}_1 \cdot f_1^{-1}(x) \theta_1 \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (19)$$

Из выражений (18) и (19) получим следующие соотношения:

$$\omega_1^2 = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\int_0^l f_1^{-1}(x) \theta_1^2(x) dx}{\int_0^l f_1^{-1}(x) \psi(x) \theta_1^2(x) dx} \quad (20)$$

Для анализа рассмотрим случай:

$$\theta_1(x) = \sin \pi \bar{x}; \quad f_1(x) = 1 + \varepsilon \bar{x}; \quad \psi_1(x) = 1 + \mu \bar{x}; \quad f_2(x) = 1 + \varepsilon \bar{z}; \quad \psi_2(z) = 1 + \mu \bar{z} \quad (21)$$

Здесь  $\bar{x} = x \cdot l^{-1}$ ;  $\bar{z} = z \cdot h^{-1}$ ;  $\varepsilon \in [0,1]$ ;  $\mu \in [0,1]$ .

С учетом (21) формула (20) принимает следующий вид:

$$\bar{\omega}^2 = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\int_0^1 \frac{1}{1 + \varepsilon \bar{x}} \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}}{\int_0^1 \frac{1 + \mu \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}} \quad (22)$$

Для простоты анализа примем следующие обозначения:

$$b_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} d\bar{x}; \quad b_2 = \int_0^1 \frac{\bar{x} \sin^2 \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} d\bar{x};$$

тогда формула (22) записывается в следующем виде:

$$\bar{\omega}^2 = \frac{b_1}{b_1 + \mu b_2} = \frac{1}{1 + \mu \frac{b_2}{b_1}} > 0.$$

Отсюда получим:  $1 + \mu \frac{b_2}{b_1} > 0$  т.е.  $\mu \frac{b_2}{b_1} > -1$ ;  $\frac{b_2}{b_1} > -\frac{1}{\mu}$ .

Продолжая анализ результата, примем что сопротивление внешней среды отсутствует. Тогда формула (18) принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + f_1''(x) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx}{\bar{\rho} \int_0^l \psi(x) \cdot f^{-1}(x) \theta_1^2 dx} \quad (23)$$

Из формул (18) и (23) можно получить следующее соотношение:

$$\bar{\omega}_1^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{\int_0^l \left[ \bar{K}_1 f_1^{-1}(x) \theta_1 - \bar{K}_2 f_1^{-1}(x) \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx}{\int_0^l \left[ f_1(x) \frac{d^4 \theta_1}{dx^4} + 2 f_1'(x) \frac{d^3 \theta_1}{dx^3} + f_1'' \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right] \theta_1 dx} . \quad (24)$$

Учитывая (21), получим:

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 + \frac{\int_0^1 \left[ \bar{K}_1 \frac{\sin \pi \bar{x}}{1 + \varepsilon \bar{x}} + \bar{K}_2 \frac{1}{1 + \varepsilon \bar{x}} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right] \sin \pi x dx}{\int_0^1 \left[ (1 + \varepsilon x) \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - 2 \varepsilon \left(\frac{\pi}{l}\right)^3 \cos \pi x \right] \sin \pi x dx} = 1 + \frac{\left( \bar{K}_1 + \bar{K}_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi x}{1 + \varepsilon \bar{x}} dx}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{1}{2}} ,$$

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 + 2 \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \left( \bar{K}_1 + \bar{K}_2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) b_1 . \quad (25)$$

Расчет можно провести и для случаев:

$$\begin{aligned} f_1(\rho) &= 1 + \varepsilon e^\rho; & \psi_1(\rho) &= 1 + \mu e^\rho; \\ f_2(\rho) &= 1 - \varepsilon \cos 2\pi\rho; & \psi_2(\rho) &= 1 - \mu \cos 2\pi\rho . \end{aligned} \quad (26)$$

Результаты проведенных численных расчетов, представлены в виде таблиц и графика:

$$b_1 = \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi\rho}{1 + \varepsilon\rho} d\rho; \quad b_2 = \int_0^1 \frac{\rho \sin^2 \pi\rho}{1 + \varepsilon\rho} d\rho.$$

Таблица 1

$\varepsilon$	$b_1$	$b_2$
0	0,5	0,25
0,25	0,445	0,219
0,50	0,402	0,196
0,75	0,367	0,177

Таблица 2

$\varepsilon$	$\bar{\omega}^2; \mu = 0,5$
0	0,8
0,25	0,802
0,50	0,804
0,75	0,805

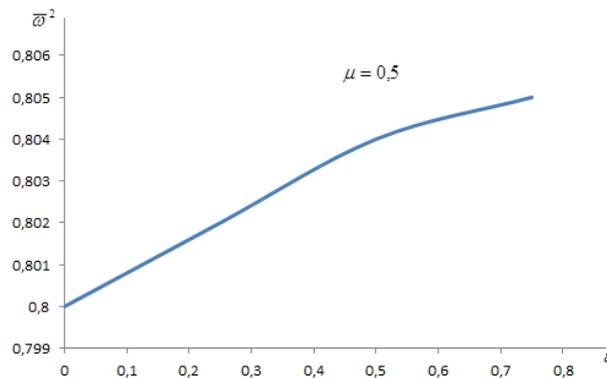


Рис. 1. График зависимости безразмерной частоты от параметра неоднородности

#### Л и т е р а т у р а

1. Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах// Инж. журнал. МГТ. – 1968. – № 6. – С. 108-110.
2. Панферов В.М. Теория упругости и деформационная теория пластичности твердых тел с разными свойствами на сжатие и кручение. – ДАН. СССР. – 1968. – Т. 180. – № 1. – С. 41-44.
3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М., 1972. – 320 с.

4. Быков Д.Л. Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды// Инж. журнал. МТТ. – 1966. – №4. – С. 58-64.
5. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающими различным сопротивлением растяжению и сжатию// Инженерный журнал. Механика твердого тела. – 1966. – № 2. – С. 123-125.
6. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела// Известия АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 29-34.
7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Стройиздат. – 1954. – 89 с.
8. Gadjiev V.D., Rzayev N.S. Solitons of nonhomogenous viscoelastic foundation// Translation of NAS of Azerbaijan, 2013. – Vol. XXXII, № 4. – Pp-133-138.
9. Новацкий В. Динамика сооружений. – М, 1963. – 376 с.
10. Маркин А.А., Соколова М. Ю., Христинич Д.В. Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела// Материалы Международного научного симпозиума, Тула: Тул. ГУ. – С. 97-98.

References

1. Tolokonnikov, L.A. (1968). O svyazi mezhd napryazheniyami i deformaziyami v raznomodul'nyh izotropnyh telah, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, №6, pp.108-110.
2. Panferov, V.M. (1968). Teoriya uprugosti i deformatzionnaya teoriya plastichnosti tvorydyh tel s raznymi svojstvami na szhatie i kruchenie, *DAN SSSR*, Vol. 180, №1, .41-44.
3. Moskvitin, V.V. (1972). *Soprotivlenie Vyazkouprugih Materialov*, Moscow, 320 p.
4. Bykov, D.L. (1966). Osnovnie uravneniya i teoremi dlya odnoj modeli fisicheski nelineynoy sredi, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, №4, pp. 58-64.
5. Shapiro, G.S. (1966). On deformation of bodies possessing different resistance to tensile and compression, *Inzhenerniy Zhurnal. Mehanika Tverdogo Tela*, № 2, pp. 123-125.
6. Lomakin, E.V., Rabotnov, Yu.N. (1978). Sootnosheniya teorii uprugosti dlya izotropnogo rasnomodul'nogo tela, *Izv. AN SSSR. Mehanika Tverdogo Tela*, № 6, pp. 29-34.
7. Pasternak, P.L. (1954). *Osnovi Novogo Metoda Rascheta Fundamentov na Uprugom Osnovanii pri Pomoschi Dvuh Koeffitziyentov Posteli*, Moscow, Strojizdat, 89 p.
8. Gadjiev, V.D., Rzayev, N.S. (2013). Solitons of nonhomogenous viscoelastic foundation, *Translation of NAS of Azerbaijan*, Vol. XXXII, № 4, pp. 133-138.
9. Novatzkiy, V. (1963). *Dinamika Sooruzheniy*, Moscow, 376 p.
10. Markin, A.A., Sokolova, M.Yu., Hristich, D.V. Problemi prochnosti, plastichnosti, i ustojchivosti v mehanike deformiruemogo tverdogo tela, *Materialy Mezhdunarodnogo yauchnogo simposiuma, Tula, TulGU*, pp. 97-98.

**OSCILLATION OF A HOMOGENEOUS DIFFERENT MODULUS BAR LYING ON TWO CONSTANT FOUNDATION**

Natig S. Rzayev

*Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan,  
AZ1141, 9, B. Vahabzade str., Baku, Azerbaijan*

In the paper, a problem of natural vibration of a bar inhomogeneous in thickness and length made of different modulus material and lying on two Pasternak –type foundation is considered.

The equation of motion is the fourth order complex partial differential equation. The solution of the problem is constructed by means of method of operation of variables and of the Bubnov - Galerkin orthogonalization method. At specific values of characteristic parameters, the calculation is conducted and the results are represented in the form of tables and graphs of dependence between annular frequency and inhomogeneity parameters. The results of calculations show that account of inhomogeneity of elasticity modulus density and also mediums resistance essentially influences on the value of annular frequency.

**Key words:** tension, compression, bending, torsion, elastic, frequently, vibration.