

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С УЧЁТОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Е.С. ШЕПИТЬКО, аспирант

Московский Государственный Университет Путей Сообщения (МИИТ)
127994, г. Москва, ул. Образцова, д.9, стр. 9, e-mail: shepitko-es@mail.ru

Статья посвящена анализу влияния нелокального демпфирования материала на вынужденные колебания стержней, находящихся под действием периодической детерминированной и стохастической стационарной поперечной нагрузки. Исследуется связь параметров нелокального демпфирования с характеристиками колебательного процесса стержней. Для решения задачи используется метод Бубнова-Галеркина.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: колебания стержней, нелокальное демпфирование, метод Бубнова-Галеркина, детерминированная периодическая нагрузка, стохастическая нагрузка

1. Введение

Многие строительные конструкции подвержены динамическим воздействиям, к которым можно отнести нагрузки от движущегося транспорта и пешеходов, ветровые нагрузки, сейсмические воздействия и др. При расчете конструкций на динамические воздействия необходимо учитывать, что энергия колебаний постепенно рассеивается за счет внешнего и внутреннего трения, в результате чего происходит затухание колебаний.

Демпфирование в некоторой точке стержня с координатой x_1 , отсчитываемой вдоль его оси, очевидно, зависит не только от локального значения скорости движения в той же точке $v(x_1)$, но и от значения скорости в соседних точках, причем степень их влияния друг на друга считается тем меньше, чем больше расстояние между ними.

Н.Т. Banks and D.J. Inman [1] рассмотрели механизм демпфирования в композитных материалах на примере консольной балки с сосредоточенной массой на свободном конце. В этой работе экспериментально исследуются четыре модели демпфирования: модель вязкого трения, частотно-независимая модель внутреннего трения, временной гистерезис и пространственный гистерезис. Результаты динамических испытаний в сочетании с приближенной моделью используются для формирования и решения поставленной задачи методом наименьших квадратов. Полученные в результате эмпирические значения коэффициентов демпфирования сравниваются с коэффициентами, полученными путем математического моделирования. В 1992 г. D.L. Russell [3] предложил модель нелокального демпфирования для динамического анализа композитной балки. Lei, Friswell и Adhikari в статье [2] рассматривают использование модели нелокального демпфирования с учетом эффекта пространственного и временного гистерезиса для динамического анализа конструкций, состоящих из балок и тонких пластин. В отличие от обычной локальной модели, демпфирующие силы вычисляются как среднее от поля скоростей в пространстве, определяемом ядровой функцией. Результирующее уравнение движения для балок и пластин представляет собой интегрально-дифференциальное уравнение в частных производных, тогда как для локальной модели используется дифференциальное уравнение в частных производных. Приближенные решения задачи о собственных значениях и формах собственных колебаний с учетом нелокального демпфирования получены методом Бубнова-Галеркина. В работе [6] исследуется влияние нелокального демпфирования материала на устойчивость стержня, находящегося под действием продольной силы, детерминированной или меняющейся во времени случайным образом.

В настоящей работе решается задача о вынужденных колебаниях стержней с учетом нелокального демпфирования материала с использованием модели, предложенной в работе [2]. Приводится численное решение и изучается влияние характеристик нелокального демпфирования на динамическое поведение стержня при действии периодической детерминированной и стационарной стохастической поперечной нагрузки.

2. Постановка задачи

Часто для описания процесса демпфирования колебаний стержней используется гипотеза Фойгта:

$$\sigma = E\varepsilon + \gamma E\dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

где σ , ε - нормальное напряжение и относительная осевая деформация, $\dot{\varepsilon}$ - скорость изменения деформации, E - модуль Юнга, γ - коэффициент демпфирования. Здесь и далее точкой обозначена производная по времени t .

При учете нелокального демпфирования вместо выражения (1) используется соотношение [2]:

$$\sigma(x, t) = E[\varepsilon(x, t) + \gamma \int_0^1 C_v(|x - \theta|)\dot{\varepsilon}(\theta, t)d\theta]. \quad (2)$$

Здесь $C_v(|x - \theta|)$ – ядро оператора, характеризующего внутреннее демпфирование. Функция $C_v(|x - \theta|)$ удовлетворяет условиям нормирования, то есть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_v(|x - \theta|) d\theta = 1. \quad (3)$$

В работе [2] рассматриваются четыре различных варианта ядра:

в виде экспоненциальной функции:

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{2} \cdot e^{-\mu|x-\theta|}, \quad (4)$$

в виде функции ошибок:

$$C_v(|x - \theta|) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2(x-\theta)^2}{2}},$$

в виде прямоугольника:

$$C_v(|x - \theta|) = \begin{cases} \frac{1}{l_0}, & \text{при } |x - \theta| \leq l_0/2 \\ 0, & \text{при других значениях } |x - \theta| \end{cases},$$

в виде треугольника:

$$C_v(|x - \theta|) = \begin{cases} \frac{1}{l_0} \left(1 - \frac{|x-\theta|}{l_0}\right), & \text{при } (1 - \frac{|x-\theta|}{l_0}) \leq l_0 \\ 0, & \text{при других значениях } |x - \theta| \end{cases}.$$

Здесь μ и l_0 – параметры, характеризующие масштаб нелокальности демпфирования материала, x , θ – координаты, отсчитываемые вдоль оси стержня.

В данной работе в качестве функции $C_v(|x - \theta|)$ используется экспоненциальное ядро (4).

Уравнение равновесия для элементарного участка стержня имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - q(x,t), \quad (5)$$

причем $w(x, t)$ – прогиб стержня, m – погонная масса стержня, $q(x, t)$ – интенсивность погонной нагрузки.

Используя гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли) получим выражение для изгибающего момента:

$$M(x,t) = EI \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \gamma \int_0^1 C_v(|x - \theta|) \frac{\partial^3 w(\theta,t)}{\partial \theta^2 \partial t} d\theta \right], \quad (6)$$

где EI – изгибная жесткость стержня.

Подставляя в левую часть соотношения (5) выражение второй производной по x от момента $M(x,t)$, приходим к уравнению относительно функции прогиба $w(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \left[\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 C_v(|x - \theta|) \frac{\partial^3 w(\theta,t)}{\partial \theta^2 \partial t} d\theta \right] = \frac{q(x,t)}{m}. \quad (7)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$. Функцию $w(x, t)$ будем искать в виде разложения по формам собственных колебаний упругого стержня:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) V_i(x). \quad (8)$$

Здесь $f_i(t)$ – обобщенные перемещения, а $V_i(x)$ – базисные функции.

Для определения обобщенных перемещений $f_i(t)$ воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. В результате получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_j(\tau) + k_j^4 \left(\frac{EI}{m} \right) f_j(\tau) + \gamma \frac{EI}{m a_j} \sum_{i=1}^n \dot{f}_i(\tau) \int_0^1 V_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 C_v(|x - \theta|) V_i(x) dx d\theta = \frac{1}{m a_j} \sum_0^n V_j(x) q(x,t) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k_j^4 = m \omega_j^2 / EI$, ω_j – частота собственных колебаний стержня [14], а

$$a_j = \int_0^1 V_j^2(x) dx.$$

2. Численные примеры

Далее рассмотрим стальной стержень длиной 10 м и жесткостью $9,82 \cdot 10^5 \text{ т} \cdot \text{м}^2$ защемленный по концам. Тогда граничные условия на обоих его концах записываются следующим образом:

$$w = \partial w / \partial x = 0. \tag{10}$$

Базисные функции имеют вид [7]:

$$V_i(x) = (\text{sh}k_i l - \text{sink}_i l)(\text{ch}k_i x - \text{cos}k_i x) - (\text{ch}k_i l - \text{cos}k_i l)(\text{sh}k_i x - \text{sink}_i x), \tag{11}$$

k_i вычисляется как i -ый корень характеристического уравнения

$$\text{ch}(kx) \cos(kx) = 1.$$

Чтобы несколько упростить процесс вычислений, избавимся от второй производной в третьем слагаемом в уравнении (9). Для этого воспользуемся интегрированием по частям. Тогда соотношение (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_j(\tau) + \left(\frac{k_j}{k_1}\right)^4 f_j(\tau) + \\ & \frac{2\epsilon}{a_j k_1^4 l^4} \sum_{i=1}^m \int_0^1 V_j''(x) \int_0^1 \frac{\mu l}{2} e^{-\mu |l-z-y|} V_i''(\theta) dy dz f_j(\tau) = \\ & \frac{l^4}{k_1^4 a_j} \int_0^1 \frac{q(y, \tau)}{EI} V_j(y) dy. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь z и y – безразмерные координаты - $z = x/l$, $y = \theta/l$, τ – безразмерное время $\tau = \omega_1 t$, $\omega_1^2 = \frac{EI k_1^4}{m}$, $2\epsilon = \gamma \omega_1$, ω_1 – минимальная частота собственных колебаний стержня.

В результате решения системы дифференциальных уравнений (12) определяются значения функций $f_i(t)$, а с использованием выражения (8) и прогиба стержня.

3.1. Колебания стержня под действием постоянной нагрузки

Сначала необходимо установить минимальное число слагаемых в разложении прогиба $w(x,t)$, которые необходимо учесть для достижения достаточной точности результатов. Для этого рассмотрим балку, нагруженную постоянной равномерно распределенной нагрузкой $q = 1000 \text{ т}$.

Из табл. 1 видно, что значения прогибов в середине стержня, которые соответствуют учету соответственно первых пяти и семи форм собственных колебаний полностью совпадают. Поэтому в дальнейших расчетах используются первые 5 форм собственных колебаний стержня.

Таблица 1 – Величины прогибов в середине стержня при учёте разного количества форм собственных колебаний

<i>Количество форм</i>	<i>Величина прогиба в середине стержня, м</i>
1	-0.0268
3	-0,0264
5	-0,0265
7	-0,0265

3.2. Колебания стержня под действием периодической нагрузки

Учет нелокального демпфирования в модели осуществляется при помощи масштаба влияния (параметра μ). Чем больше значение μ , тем ближе рассматриваемая модель к традиционной фойгтовской модели затухания колебаний. Рассмотрим поведение стержня, нагруженного периодической нагрузкой, изменяющейся по синусоидальному закону:

$$q = A \cdot \sin(\omega t), \quad (13)$$

где A – амплитуда изменения вынуждающей силы, ω – ее частота, t – время.

Процесс моделируется при различных значениях параметра μ . На рис.1 изображен процесс изменения прогиба в середине стержня во времени при $\mu = 0,2$.

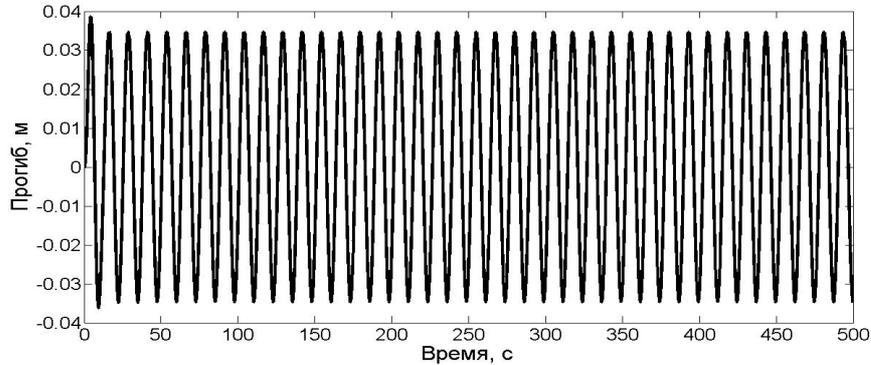


Рис. 1. Изменение прогиба в середине стержня под действием периодической нагрузки во времени при $\mu = 0,2$ 1/м;

Для сравнения результатов, полученных при различных значениях μ , амплитуды прогибов в середине стержня приведены в табл. 2.

Таблица 2. Амплитуды прогибов в середине стержня при различных значениях параметра μ

$\mu, 1/м$	Амплитуда прогиба в середине стержня, м
0.2	0,0386
0.5	0,0283
1	0,0215

Из табл. 2 видно, что с увеличением параметра μ уменьшается амплитуда колебаний. Наименьшая амплитуда наблюдается при использовании классической модели Фойгта.

3.3. Колебания стержня под нагрузкой, представляющей собой случайный стационарный процесс.

Рассмотрим, как влияет учет нелокального демпфирования на характеристики колебательного процесса под действием равномерно распределенной нагрузки, представляющей собой случайный стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и спектральной плотностью:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2 \cdot \delta(\delta^2 + \theta^2)}{\pi[(\omega^2 - \theta^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega^2]}. \quad (14)$$

Здесь σ^2 – дисперсия случайного процесса, δ и θ параметры, характеризующие масштаб корреляции и частоту скрытой периодичности изменения нагрузки.

Для моделирования случайного стационарного процесса воспользуемся методом канонических разложений [4], для чего случайную функцию представим в виде:

$$q(t) = \sum_{k=0}^n (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t). \quad (15)$$

Здесь U_k, V_k – некоррелированные случайные величины, распределённые по нормальному закону, с математическими ожиданиями равными нулю и дисперсиями одинаковыми для каждой пары случайных величин с одинаковыми индексами k . Для вычисления этих дисперсий на оси ω выделяем участок общей

длиной $2L$, так что начало координат находится посередине этого участка. При $|\omega| > L$ спектральную плотность можно считать равной нулю. Весь выбранный отрезок разбиваем на равные участки длиной $\Delta\omega$. Тогда дисперсия случайных величин U_k, V_k вычисляется по формуле:

$$D_k = 2S(\omega_k) \cdot \Delta\omega, \quad (16)$$

Нагрузка, смоделированная как случайный стационарный процесс, является постоянной по всей длине стержня в каждый отдельный момент времени и представляет собой гауссовский процесс. Корреляционная функция для нагрузки, построенная по четырёмстам реализациям случайного процесса, представлена на рис. 2. Сплошной линией изображена корреляционная функция, полученная теоретически, она определяется по формуле:

$$K(\tau_1 - \tau_2) = \sigma^2 e^{-\delta|\tau_1 - \tau_2|} \left[\cos\theta(\tau_1 - \tau_2) + \frac{\delta}{\theta} \sin\theta(\tau_1 - \tau_2) \right]. \quad (17)$$

Пунктирной линией изображена корреляционная функция, вычисленная из данных, полученных при моделировании случайного процесса.

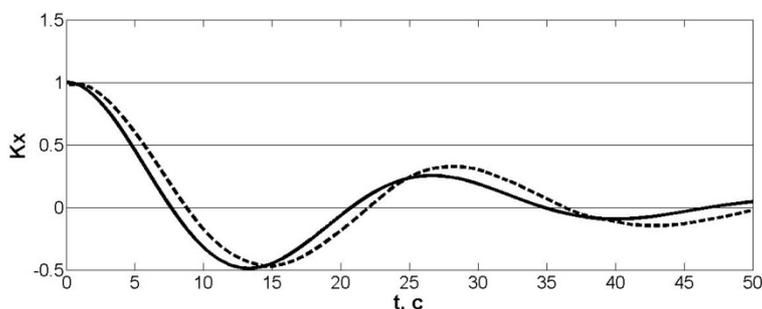


Рис. 2. Корреляционная функция нагрузки, представленной как случайный стационарный процесс

Десять реализаций процесса колебаний стержня под действием нагрузки, смоделированной таким образом, представлены на рис. 3. Жирной линией показано математическое ожидание случайного процесса.

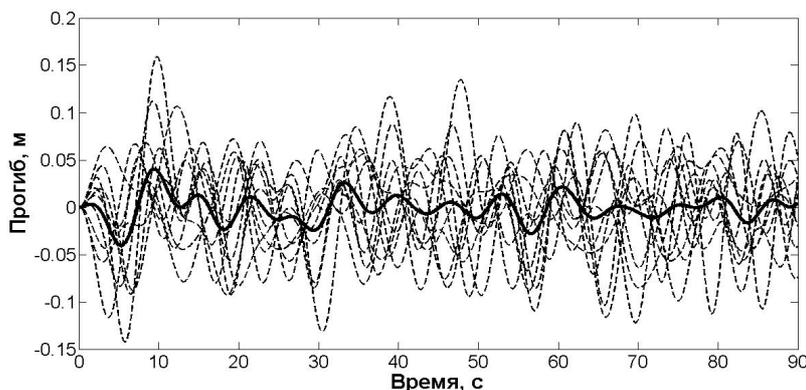
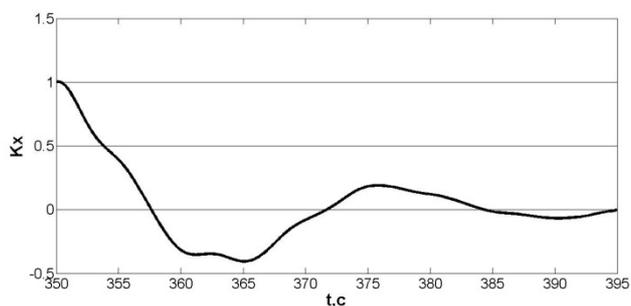


Рис. 3. Реализации случайного стационарного процесса колебаний стержня при характеристиках спектральной плотности: $\delta l = 0.05$ и $\theta l = 0.25$.

Нормированная корреляционная функция для нагрузки представлена на рис. 4.



Для Рис. 4. Нормированная корреляционная функция прогиба - ного процесса при различных значениях параметра μ , представлены в форме гистограмм и приведены на рисунке 5. Математические ожидания для обеих гистограмм равны нулю, а дисперсии составляют $0,0021 \text{ м}^2$ для гистограммы, полученной при $\mu = 0,2$, и $0,0008 \text{ м}^2$ – при $\mu = 1$.

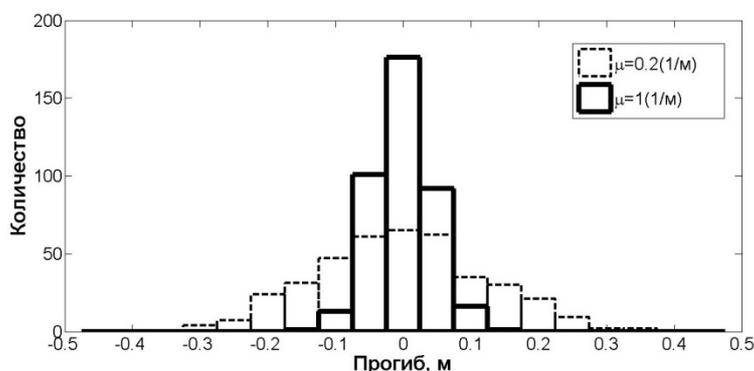


Рис. 5. Гистограммы прогибов стержня

приближению модели демпфирования к классической модели Фойгта, происходит уменьшение размаха колебаний.

4. Заключение

В статье проведен анализ влияния нелокального демпфирования материала стержня, находящегося под действием детерминированной периодической и стохастической стационарной нагрузки, на характеристики колебательного процесса. Разработана компьютерная модель стержня с учетом нелокального демпфирования, определено количество форм собственных колебаний, необходимых для достижения требуемой точности расчета.

Л и т е р а т у р а

1. Banks, H.T., Inman, D.J. On damping mechanisms in beams// Journal of Applied Mechanics, 1991, 58 (3), 716–723.
2. Lei Y., Friswell, M. I., Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with non-local damping// Int. Journal of Solids and Structures. 2006, V. 43, pp. 3381 - 3400.
3. Russell, D.L. On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping. In: Banks, H.T. (Ed.)// Control and Estimation in Distributed Parameter Systems. SIAM, Philadelphia, PA, 1992, pp. 125–169.
4. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1999.-576 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд. исправленное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
6. Потапов В.Д. Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования// Проблемы машиностроения и теории надежности, 2012, 4, с. 25-31.

7. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

References

1. Banks, H.T., Inman, D.J. (1991). On damping mechanisms in beams, *Journal of Applied Mechanics*, 58 (3), 716–723.
2. Lei, Y., Friswell, M.I., Adhikari, S.A. (2006). Galerkin method for distributed systems with non-local damping, *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3381 - 3400.
3. Russell, D.L. (1992). On mathematical models for the elastic beam with frequency-proportional damping, In: Banks, H.T. (Ed.), *Control and Estimation in Distributed Parameter Systems*, SIAM, Philadelphia, PA, pp. 125–169.
4. Ventsel, E.S. (1999). *Probability Theory*, Moscow: Vysshaya shkola, 576 p.
5. Kalitkin, N.N. (2011). *Numerical Methods*, 2nd edition, corrected, SPb.: BHV-Peterburg, 592 p.
6. Potapov, V.D. (2012). Stability of rods under stochastic loading considering nonlocal damping, *Problems of Machinery and Reliability*, 4, pp. 25-31.
7. Filippov, A.P. (1970). *Dynamics of Deformable Systems*, Moscow: Mashinostroyenie, 734 p.

ROD VIBRATIONS CONSIDERING NON-LOCAL DAMPING

E.S. Shepitko

In this paper, an impact made by non-local damping on rod vibrations under the periodic and stochastic load is considered. The relationship between the non-local damping characteristics and the dynamic behavior of the rod is analyzed. The solution is obtained using the Galerkin method.

KEY WORDS: rod vibration, non-local damping, a Galerkin method, deterministic periodic load, stochastic load.

