

**Динамика конструкций и сооружений**

**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОГО КОМПОЗИЦИОННОГО СТЕРЖНЯ**

Т.Д. КАРИМБАЕВ\*, д.т.н., профессор

А.У. НУРИМБЕТОВ\*\* к.ф.-м.н., докторант

\* ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова», (Москва, Россия)

\*\* МАИ – Московский авиационный институт (НИУ),

\*Москва, Черноморский бульвар, 7, корпус 1, кв.13; E-mail: karimdaevt@ciam.ru

\*\*Москва, 125480, ул. Лациса Виллиса, 14; E-mail : alibek\_55t@mail.ru

*Рассмотрены колебания в многослойных композитных телах. Исследуются свободные колебания армированного многослойного стержня. В целях определения особенностей многослойных стержней, выяснения роли некоторых её параметров рассматривались стержень прямоугольного сечения и наиболее простые формы колебания. Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** многослойный композит, свободные колебания

1. Задача расчета собственных частот и форм колебаний стержней, балок, закрученных рабочих лопаток с точки зрения однородной теории рассматривалась в литературе неоднократно. Основы расчета и методы достаточно подробно описаны в работах Бицено К.Б. и Граммеля Р. [1], Ахенбаха Дж.Д. [2], Хромина Д.В.[3], Воробьева Ю.С., Шорра Б. Ф.[4], Биргера И.А. [5] и многих других исследователей. При этом выделены три основных подхода к данному вопросу: решение на основе классической теории тонких стержней [6,7], рассмотрения деформаций с точки зрения общих уравнений теории упругости [8] и решения на основе теории пластин и оболочек [9]. Различные специальные подходы к изучению вопросов колебания таких тел рассмотрены в работах [6,10,11]. Колебания и волны в слоистых и композитных телах рассмотрены в работах Сана С.Т. [12], Бреховских Л.М. [13], Ахенбаха Дж. [2], и некоторых других; причем здесь использовались соотношения изотропной или анизотропной однородной теорий упругости. Структурный подход к волновым процессам позволяет вписать ряд их интересных особенностей. Например, в работе Каримбаева Т.Д. [14] показана возможность распространения в неограниченной армированной среде четырех типов волн. Ниже на основе этой теории [14] исследуются свободные колебания армированного многослойного стержня прямоугольного сечения. В целях определения особенностей слоистых стержней, выяснения роли некоторых её параметров рассматривались наиболее простые формы колебания.

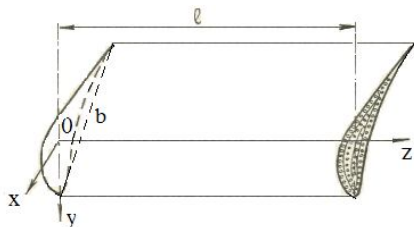


Рис. 1. Армированный слоистый стержень с профилем произвольной формы

Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из композиционного материала (рис. 1).

Считая материал тела ортотропным, для изгибных напряжений эти соотношения можно записать в виде [15] (10):

$$\sigma_{zz}^i = (c_{13}^{ii} \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^{ii} \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^{ii} \mathcal{E}_{23}^i + c_{35}^{ii} \mathcal{E}_{13}^i) + (c_{33}^{ii} \varepsilon_{33}^i + c_{13}^{ii} \varepsilon_{13}^i) + c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^i + \beta_{33}^i T^i, \quad (1.1)$$

в которой  $\varepsilon_{k3}^{ci}$  соответствуют значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами  $Q_j$  [16]; величины  $\mathcal{E}_{k3}^i$  позво-

ляют оценить влияние перемещений  $u^i, v^i, w^i$  в плоскости поперечного сечения на сдвиговые деформации и  $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$  деформации элементов поперечного сечения. Кроме этого [15]:  $\varepsilon_{33}^i = \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0\tau r^2$ ,  $\alpha^2 = (\tau_0 z)^2 \ll 1$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots, \beta \approx \tau_0 r$ . Ограничивая последующее исследование формами колебаний, длины волн в которых заметно превосходят характерные структурные размеры армированного слоистого тела, положим,

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (1.2)$$

где  $v^i(z, t)$  - поперечные смещения точек  $i$ -го слоя стержня. При этих условиях выражение принципа Гамильтона принимает вид:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_\ell - K) dt = 0, \quad (1.3),$$

где величина

$$w_\ell = \int_0^\ell \iint \sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i ds dz = \int_0^\ell \iint c_{33}^{i1} \varepsilon_{33}^{i2} ds dz, \quad K = \iiint_V \rho^i (\dot{v}^i)^2 dV, \quad \dot{v}^i = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$\rho^i = (\rho^n + \rho^m)$  - плотность,  $c_{33}^{i1} = (\lambda^n + 2\mu^n)v^n + (\lambda^m + 2\mu^m)v^m$  свойства материала слоя  $i$  и  $v^n, v^m$  - объемное содержание материала наполнителя и матрицы.

После использования (1.1) и (1.2) для  $w_\ell$  можно получить:

$$w_\ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell I_1 \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 dz, \quad (1.5)$$

где величина

$$I_1 = \iint_F c_{33}^{i1} y^2 dF, \quad (1.6),$$

является физическим моментом инерции, позволяющим вести расчет при неравномерном распределении физических свойств компонентов армированного слоистого тела в поперечных сечениях произвольной формы.

Полагая, что существуют только периодические колебания с собственной круговой частотой  $\Omega$ , представим  $v^i(z, t)$  в виде:

$$v^i(z, t) = X(z) \sin \Omega t. \quad (1.7)$$

Задачу будем решать методом Ритца [17, 19], полагая

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z), \quad (1.8)$$

где  $X_n(z)$  - допустимые функции,  $A_n$  - неопределенные параметры. В качестве допустимых функций естественно выбрать собственные функции стержня в виде [17]:

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} [ch k_n x - \cos k_n x + \frac{sh k_n - \sin k_n}{ch k_n + \cos k_n} (\sin k_n x - sh k_n x)], \quad (1.9)$$

удовлетворяющие граничным условиям консольного закрепления:

$$X(0) = X'_n(0) = 0; \quad X''_n(1) = X'''_n(1) = 0; \quad (1.10)$$

В (1.9)  $x = z/l$ , а волновое число  $k_n$  удовлетворяет характеристическому уравнению  $1 + ch k_n \cos k_n = 0$  и принимает значения, данные в табл. 1,  $\ell$  - длина стержня.

Таблица 1. Значение волновых чисел

№	1	2	3	$n \rightarrow \infty$
$k_n$	1.875	4.694	7.854	$(2n-1)\pi/2$

Балочные функции, являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X_n'' X_p'' dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad (1.11)$$

Варьирование интеграла (1.3) сводится к дифференцированию его по неизвестным параметрам  $A_n$ . После подстановки (1.7) в (1.4) и (1.3) с учетом (1.8), (1.10) и (1.11), дифференцирования по  $A_n$  и интегрирования по  $t$  можно получить:

$$\frac{I_1}{\ell^4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n^4 \delta A_n - 2\Omega^2 \rho^i F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta A_n = 0,$$

где  $F = \iint_F dF$  площадь поперечного сечения. После упрощения предыдущее

выражение преобразуется к виду  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n [I_1 k_n^4 - 2\Omega^2 \rho^i F \ell^4] \delta A_n = 0$ . Так как в

этом уравнении коэффициенты  $A_n$  равны нулю и произвольны, то получим следующие выражения для круговых ( $\Omega$ ) и технических ( $f_n$ ) частот свободных колебаний:

$$\Omega^2 = \frac{I_1}{\rho^i} \frac{k_n^4}{F \ell^4}; \quad (1.12) \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F} \frac{k_n^2}{\ell^2}}, \quad (1.13)$$

где  $I_1$  определяется выражением (1.6). По полученной формуле можно подсчитать низшие собственные частоты армированного стержня с постоянным по длине сечением произвольной формы.

Величина  $I_1$  позволяет учесть неравномерное распределение физических параметров композиции в слоистом сечении. Для авиационных профилей этот интеграл можно просчитать послойно на ЭВМ по формуле (1.1) [16]. Если материал стержня изотропный, то из выражения (1.13) следует формула Рэлея-Ритца.

Каримбаевым Т.Д. были проведены эксперименты по определению собственных частот для стержня прямоугольного сечения, изготовленный из стеклоткани, имеющий следующие физические и геометрические характеристики для наполнителя и матрицы:

$$\lambda^n = 0.119 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \lambda^m = 0.046 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \rho^n = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^m = 542 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\mu^n = 0.179 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^m = 0.0307 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu^n = 0.6, \quad \nu^m = 0.4,$$

$$\ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Для сравнения собственных частот стержня с данными экспериментов проведен численный анализ формулы (1.13). Для простоты численного анализа рассматривается стержень прямоугольного сечения с равномерным распределением физических свойств. Тогда после интегрирования (6) выражение для определения собственных частот (1.13) можно представить в виде:

$$f_n = \frac{hk_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{c_{33}^i}{12\rho^i}}. \quad (1.14)$$

Таблица 3. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

Частота, гц	1	2	3
Экспериментальная	121	765	2100
По формуле (1.14)	125	786	2201

Как видно из табл. 2, расчетные значения частот превышает экспериментальные на 3-5%. Полученное соотношение (1.14) подтверждает экспериментально наблюдаемый эффект смещения узловой линии [18] к месту закрепления. Таким образом, использование теории слоистых армированных сред, в частности, обобщенного на принципе Гамильтона, при расчете элементов конструкций из композиционного материала позволяет получить удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Расчетные соотношения (1.13), (1.14) устанавливают непосредственную зависимость собственных частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

**2. Влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел.** На примере стержня исследуется влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел. При сильном взаимодействии компонентов композиционного материала, полученное уравнение частот определяет одну собственную частоту, величина которой мало отличается от частот, найденных на основе теории "эффективных" модулей. При слабом взаимодействии компонентов композиции, что реализуется при больших частотах с малой длиной волны, колебанию слоистого стержня соответствуют две собственные частоты, отличающиеся от частот двух стержней идентичных размеров, но изготовленных отдельно из материала матрицы и отдельно из материала наполнителя.

Вычисленные на основе полученных соотношений значения собственных частот низших (первых трех) форм колебания стержня прямоугольного поперечного сечения из стеклопластика удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Для анализа изгибных колебаний незакрученного армированного стержня, имеющего лопаточный профиль постоянной толщины, используется обобщенный на слоистые среды принцип Гамильтона. Согласно этому принципу минимум накопленных за время  $(t_0, t_1)$  в теле энергии деформации  $w_e$ , кинетической энергии  $K$  соответствует действительному его состоянию, т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_e - K) dt = 0, \quad (2.1)$$

Для слоистой ортотропной среды связь между продольными напряжениями и деформациями, записывается в виде (1.1). Если для каждого слоя стержня из композиционного материала принять гипотезу плоских сечений, то деформации определяются равенствами:

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (2.2)$$

через перемещения  $v^i(z, t)$ . В соответствии с (2.1), (2.2) можно получить

$$w_e = \frac{1}{2} \iint_V c_{33}^i \left( \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 y^2 dV, \quad K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho^i \dot{v}^2 dV, \quad \dot{v} = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

и интегрирование осуществляется по объему  $V$  стержня. Возможные смещения

точек при колебаниях стержня описывается как  $v^i(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z) \sin \Omega t$ , в

которых  $A_n$  – амплитудные значения смещений,  $\Omega$  – круговая частота. В качестве допустимых функций  $X_n(z)$  целесообразно выбрать собственные функции стержня в виде (1.9), удовлетворяющие условиям консольного закрепления (1.10) и равенствам (1.11). Минимизация интеграла (2.1) по параметрам  $A_n$  позволяет получить систему  $n$  уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \gamma_n) A_n \delta_m^n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + \beta_n) A_n \delta_m^n = 0, \quad (2.4)$$

в которых

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots, \alpha_n = a_n - \Omega^2 F \rho^i; \beta_n = -F b^2,$$

$$\gamma_n = -F b^4; \quad a_n = \frac{a^i k_n^4}{\ell^4} + F b^2; \quad a^i = I_1 \cdot I_1 = \int_F c_{33}^i y^2 dF -$$

осевой момент инерции и  $F$  – площадь поперечного сечения,  $b$  – размеры поперечного сечения. Система уравнений (2.4) имеет нетривиальное решение ( $A_n \neq 0$ ), если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных  $A_n$  равен нулю. Это условие записывается в виде произведения

$\prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \beta_n - \gamma_n^2) = 0$ , каждый сомножитель которого представляет собой уравнение собственной частоты колебания по  $n$ -ой гармонике. Последнее уравнение с учетом принятых обозначений удобно записать в форме:

$$(\Delta^2 - \Delta_1^2)^2 - B(\Delta^2 - 1) = 0, \quad (\Delta^2 - 1)(\Delta^2 - B - 1) = 0 \quad (2.5),$$

относительно безразмерного параметра частоты  $\Delta^2 = \frac{\omega^2 \ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}$ . В (2.5) принято:

$$\Delta_0^2 = \frac{a^i}{F \rho^i}; \quad B = b^2 \frac{2}{\rho^i} \frac{\ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}; \quad \Delta_1^2 = \frac{a^i}{F \rho^i \Delta_0^2} = 1. \quad (2.6)$$

Следует иметь в виду, что коэффициент  $B$  для стержня заданной длины и состава композиции является функцией волнового числа  $k_n$  и стремится к нулю с уменьшением длины волны (ростом  $k_n$ ). При малых значениях волнового числа  $k_n$  и "сильном" взаимодействии слоев стержня из композиционного материала уравнение (2.5) определяет один корень  $\Delta^2 = 1$ , которому соответствуют технические частоты:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{a^i}{\rho^i F}}. \quad (2.7)$$

Частоты, вычисленные по формуле (2.7), мало отличаются от частот

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{E_3 I_1^*}{2\rho(1 - \nu_1 \nu_3) F}}, \quad (2.8)$$

полученных на основе «эффективных» модулей композиционного материала, где  $E_3$  – модуль упругости,  $I_1^* = \int_F y^2 dF$ . Если коэффициент  $B$  мал, что реализу-

ется при высоких частотах (порядка нескольких сот кгц) с малой длиной волны, уравнение (2.5) позволяет определить две различные собственные частоты

$$\begin{aligned} 2\Delta_{1*}^2 &= \Delta_1^2(C + D) + BD, \\ 2\Delta_{2*}^2 &= \Delta_1^2(D + C) + BC, \end{aligned} \quad (2.9)$$

в которых  $C = 1 + E$ ,  $D = 1 - E$ ,  $E = \sqrt{1 - 4(1 - \Delta_1^2)/B}$ .

Используя естественное условие  $\Delta_1^2 < 1 < \Delta_2^2$  легко показать, что подкоренное выражение в  $E$  при любых значениях параметра  $B$  положительно. Если волновое число  $k_n$  так велико, то корнями уравнения (2.5) являются величины  $\Delta_{1*}^2$ ,  $\Delta_{2*}^2$ , т.к. в этом случае  $\Omega_1^2 = 1$ ,  $E = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 0$ .

Параметры собственных частот  $\Delta_{1*}^2$ ,  $\Delta_{2*}^2$ , а также  $\Delta_1^2$  не совпадают с параметрами  $\Delta^2 = \frac{I_1}{F\Delta_0^2\rho^i}$  собственных частот двух стержней, изготовленных от-

дельно из материала матрицы и материала наполнителя. Тем самым устанавливается, что сплошность армированной среды, являющейся композицией двух твердых тел, обеспечивается указанным параметром. Физическое одновременное сосуществование двух форм колебаний в армированной среде при высоких частотах оправдано тем, что в колебательном движении находится каждый из компонентов композиции. Однако на его свободное колебание накладывается влияние окружающего его другого материала. Этот эффект оценивается выражениями (2.9). Выражения (2.9) позволяют управлять частотами с помощью параметра  $B$ . Из уравнения (2.4) устанавливается также соотношение ( $A_n$ ) амплитуд колебания матрицы и наполнителя.

Из-за ограниченности экспериментальных данных численные сравнения здесь приведены для стеклопластикового стержня прямоугольного сечения со следующими физическими и геометрическими характеристиками:

$$\lambda^n = 0.095 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \lambda^n = 0.0173 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^n = 0.1775 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\mu^n = 0.0074 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \rho^n = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^n = 1230 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$v^n = 0.68, \quad v^n = 0.32, \quad \ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Результаты расчетов собственных колебаний первых трех изгибных форм колебаний, соответствующих малым значениям  $k_n$  волнового числа (большим  $B$ ), приведены в табл. 3.

Таблица 3. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

Частота, гц	1	2	3
Экспериментальная	122	770	2100
По формуле (2.7)	124	775	2170
По формуле (2.8)	125	795	220

Сравнение их показывает, что стержень данных размеров из материала слоя матрицы имеет наименьшую частоту, а из материала слоя наполнителя - наибольшую. Для высоких форм колебаний будут четче проявляться колебания с частотами  $\Delta_1^2$ ,  $\Delta_2^2$ , заключенные между частотами наполнителя  $\Delta_n^2$  и матрицы

$\Delta_m^2$ . Данный анализ позволяет путем выбора материала компонентов армированной слоистой среды управлять собственными частотами колебаний деталей без изменения их геометрических размеров и формы, что важно в технических приложениях.

Л и т е р а т у р а

1. Биценко К.Б., Граммель Р. Техническая динамика. - ГТТЛ, 1952, т. 2. – 220 с.
2. Ахенбах Дж.Д. Колебания и волны в направленно-армированных композитах// В кн. «Композиционные материалы». М.: Мир, 1978. – С. 354-4000 ил.
3. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1970.
4. Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. Думка, 1983. – 188 с.
5. Биргер И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
6. Биргер И.А. Строительная механика турбомашин: Диссертация на соиск. уч. степ. д.т.н. (01.02.04). – М., 1954. – 320 с.
7. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: Т. 1-3. – М.: Машиностроение, 1968.
8. Риз П.М. Деформация стержней, закрученных и слабоизогнутых в ненапряженном состоянии. – Труды ЦАГИ, 1940, вып. 471. – 27 с.
9. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. – М.: Оборонгиз, 1961.
10. Меерович И.И. Колебания прямоугольной плоской пластинки. – Динамика авиадвигателей. – Оборонгиз, 1961.
11. Гринберг С.М. Вариационный метод расчета частот и форм колебаний шарнирных лопаток//Сборник «Прочность и динамика авиационных двигателей». – М.: Машиностроение, 1965, вып. 2.
12. Sun S.T., Achenbach J.D. Tim-harmonic transverse and longitudinal motions of a laminated plate. Northwestern Univ. Struct. Mech. Lab. T.R. № 63-1. Evenston. Illinois, 1969.
13. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Изд. АН СССР, 1957. – 520 с.
14. Каримбаев Т.Д. Вариант теории армированных сред// Известия вузов. «Машиностроение», 1975. – №8.
15. Нурибетов А.У., Дудченко А.А. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных лопаток авиационных двигателей // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. Москва: ФГУП «ВИМИ», 2015. – №2. – С. 46-54.
16. Нурибетов А.У. Техническая теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения // Известия Самарского научного центра РАН. – 2009. – Т. 11. – №5. – С. 94-101.
17. Меерович И.И. Колебания прямоугольной плоской пластины. – Динамика авиационных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1952, вып.8. – С. 149-208.
18. Карташов Г.Г. Влияние различных факторов на вибрационные характеристики лопаток из композитов. – Механика композитных материалов, 1980, №6.
19. Soler A.J. Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Sectionon// J. of Applied Mechanics. – 1973. – Nu 3. – P. 779-785.

R e f e r e n c e s

1. Bisenko, K.B., Grammel, R. (1952). *Tehcnisheskay Dinamika*, GTTL, vol. 2, 220 p.
2. Achenbach, J.D. (1978). *Kolebaniya i volny v napravlenno-armirovannyh kompozitah*, V kn. *Kompozitziionnyye Materialy*, Moscow: Mir, pp.354-400.
3. Hronin, D.V. (1970). *Teoriya i Rastchet Kolebani v Dvigatelyah Letatel'nyh Apparatov*, Moscow: Mashinostroenie.
4. Vorobyov, Yu.S, Shorr, B.F. (1983). *Teoriya Zakruchennyh Sterzhnei*, Kiev: Nauk. Dumka, 188 p.
5. Birger, I.A., et al (1993). *Rasshot na Proshnost Detalei Mashin: Spravochnik*, Moscow: Mashinostroenie, 640 p.
6. Birger, I.A. (1954). *Stroitel'naya Mehanika Turbomashin*: Diss. DSc (01.02.04), Moscow, 320 p.
7. Birger, I.A., Panovko, Y.G. (1968). *Prochnost, Ustoichivost, Kolebaniya*, Moscow: Mashinostroenie, vol. 1-3.
8. Riz, P.M. (1940). *Deformaztiya sterzhnei, zakruchennyh i slaboizognutyh v nenapryazhonnom sostoyanii*, *Trudi TzAGI*, vyp. 471, 27 p.
9. Meerovish, I.I. (1961). *Raspredelenie Napryazhenij v Kompessornyh Lopatkah pri Kolebaniyah*, Moscow: Oborongiz.
10. Meerovish, I.I. (1961). *Kolebaniya pryamougol'noi ploskoi plastinki*, *Dinamika Aviadvigatelelei*, Moscow: Oborongiz.

11. Grinberg, S.M. (1965). Variatsionniy metod raschota chastot I form kolebaniy sharnirnykh lopatok, Sbornik «Prochnost i Dinamika Aviatzionnykh Dvigatelyei», Moscow: Mashinostroenie, vyp. 2.
12. Sun, S.T., Achenbach, J.D. (1969). Tim-harmonic transverse and longitudinal motions of a laminated plate, Northwestern Univ. Struct. Mech. Lab. T.R., № 63-1, Evenston, Illinois.
13. Brehovskih, L.M. (1957). Volny v Sloistyh Sredah, Moscow: Izd. AN SSSR, 520 p.
14. Karimbaev, T.D. (1975). Variant teorii armirovannykh sred, *Izvestiya vuzov «Mashinostroenie»*, №8.
15. Nurimbetov, A.U., Dudchenko, A. A. (2015). Deformatziya estestvenno-zakruchennykh mnogosloinykh anizotropnykh lopatok aviatzionnykh dvigatelei, *Oboronniiy Kompleks – Naushno-Tehnicheskomu Progressu Rossii*, Moscow: FGUP «VIMI», №2, pp.46-54.
16. Nurimbetov, A.U. (2009). Tehnicheskaya teoriya krucheniya kompozitsionnogo sloistogo sterzhnya proizvol'nogo secheniya, *Izv. Samarskogo Naushnogo Tzentra RAN*, vol. 11, №5, pp. 94-101.
17. Meerovish, I.I. (1952). Kolebanya pryamougol'noy ploskoy plastiny, *Dinamika Aviatzionnykh Dvigatelyei*, Moscow: Oborongiz, vyp.8, pp.149-208.
18. Kartashov, G.G. (1980). Vliyanie razlichnykh faktorov na vibratsionnie harakteristiki lopatok iz kompozitov, *Mehanika Kompozitnykh Materialov*, №6.
19. Soler, A.J. (1973). Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Sections, *J. of Applied Mechanics*, 3, p. 779-785.

### THE NATURAL FREQUENCY OF THE COMPOSITE LAMINATED ROD

Karimbayev\* T.D., Nurimbetov\*\* A.U.

\* «CIAM». of P.I. Baranova ", Moscow, Russia

\*\*MAI (Moscow Aviation Institute (National Research University))

Oscillations in the multi-layer composite bodies are studied. Natural vibrations of a reinforced many-layered rod are researched. For determination of the characteristics of multi-layered rods and for clarify of the role of some of their parameters, a rod of the rectangular cross section and the most simple forms of vibrations were considered. The results of numerical calculations are compared with experimental data.

**KEYWORDS:** multi-layer composite, free vibrations.

