

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ПРИ КРУЧЕНИИ С ИЗГИБОМ

Вл.И. КОЛЧУНОВ, *д.т.н., проф.*

Д.А. РЫПАКОВ, *инженер*

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»

305040, г.Курск, ул. 50 лет Октября, 94

e-mail: ryakov89@mail.ru

В статье рассматривается вопрос моделирования пространственной трещины железобетонной конструкции, работающей на изгиб с кручением. Рассмотрены варианты моделирования поверхности пространственной трещины прямым геликоидом, бикубической поверхностью Кунса и билинейной поверхностью. Проведен анализ этих поверхностей и сделан выбор наиболее подходящего варианта моделирования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: железобетон, кручение, трещины, поверхность.

Вопросам моделирования пространственной трещины при сложном сопротивлении на сегодняшний день посвящено сравнительно небольшое количество работ. При кручении с изгибом на первый взгляд наиболее приемлемой моделью является прямой геликоид [1-3] с направлением закручивания вокруг оси Z.

Прямым геликоидом (рис. 1) называется винтовая линейчатая поверхность, описываемая прямой, которая пересекает ось геликоида под прямым углом, вращается с постоянной скоростью вдоль этой же оси. Скорости этих движений пропорциональны. В общем случае всякая точка образующей прямого геликоида описывает винтовую линию.

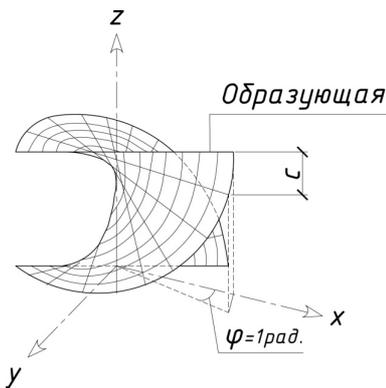


Рис. 1. Прямой геликоид

Задание поверхности прямого геликоида осуществляется формулой:

$$z = c \cdot \arctg(y / x), \quad (1)$$

где c – смещение образующей прямой при повороте ее на 1 рад (см. рис. 1).

Анализ поверхности прямого геликоида показывает, что такая поверхность приемлема лишь для железобетонных конструкций круглого сечения. Если же мы ставим задачу моделирования поверхности пространственной трещины для железобетонных конструкций, например, прямоугольного сечения, то использование уравнения прямого геликоида здесь явно неудобно.

Попытки использования прямого геликоида при вращении образующей относительно других осей (например, X) не улучшает ситуацию при моделировании пространственной трещины. Более того, для конструкций прямоугольного сечения пересечение прямого геликоида с ее гранями требует введения дополнительных ограничений, что явно усложняет ее математическое описание.

Проведенный анализ экспериментальных исследований железобетонных конструкций при кручении с изгибом показывает, что пространственная трещина также может быть промоделирована бикубической поверхностью Кунса или билинейной поверхностью со смещением угловых точек этих поверхностей вдоль оси железобетонной конструкции.

Бикубическая поверхность Кунса представляет собой гладкую поверхность, построенную по 4-м граничным кривым (рис. 2).

Для всех четырех граничных кривых бикубической поверхности Кунса используются нормализованные кубические сплайны. Уравнение для определения любой точки на бикубической поверхности Кунса записывается в виде:

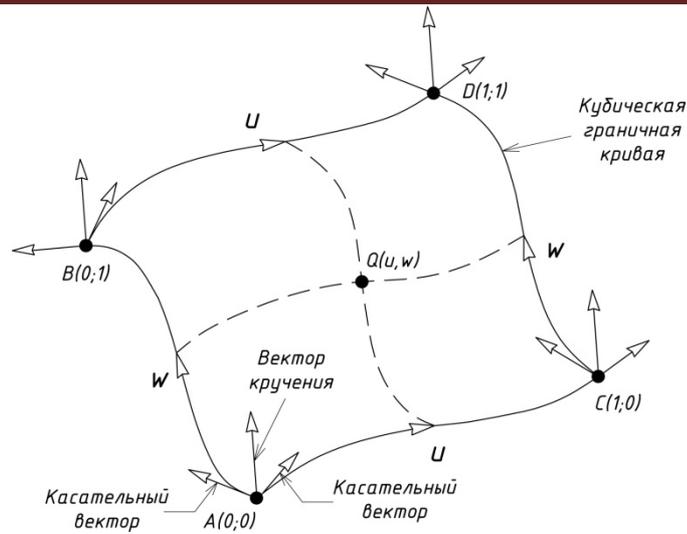


Рис. 2. Бикубическая поверхность Кунса

$$Q(u, w) = [U][N][P][N]^T [W], \quad (2)$$

где $[U] = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$; $0 \leq u \leq 1$ - параметр, характеризующий отношение, в котором кубический сплайн, содержащий искомую точку на поверхности Кунса и лежащий параллельно сплайнам AB и CD , делит сплайны AC и BD ;

$$[W] = [w^3 \ w^2 \ w \ 1];$$

$0 \leq w \leq 1$ - параметр, характеризующий отношение, в котором кубический сплайн, содержащий искомую точку на поверхности Кунса и лежащий параллельно сплайнам AC и BD , делит сплайны AB и CD ;

$$[N] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} \text{угловые} & \vdots & w\text{-касательные} \\ \text{координатные} & \vdots & \text{векторы} \\ \text{векторы} & \vdots & \\ \vdots & \dots & \vdots \\ i\text{-касательные} & \vdots & \text{векторы} \\ \text{векторы} & \vdots & \text{кручения} \end{bmatrix};$$

$[P]$ - матрица, содержащая всю геометрическую информацию, необходимую для генерации одного бикубического куска поверхности Кунса.

Анализ уравнения бикубической поверхности Кунса показывает, что для однозначного определения данной модели необходимо найти довольно большое количество различных параметров, что неоправданно усложняет моделирование. Билинейная поверхность конструируется из четырех угловых точек в параметрическом пространстве, т.е. из точек $A[y_A, z_A]$, $B[y_B, z_B]$, $C[y_C, z_C]$, $D[y_D, z_D]$. Отметим, что в качестве основной принята именно плоскость YOZ для удобства дальнейшего перехода к объемному элементу реальной пространственной трещины железобетонной конструкции, продольную ось которой удобно обозначить как ось X . Изображение такой билинейной поверхности на плоскости YOZ приведено на рис. 3.

Математическое описание билинейной поверхности представлено параметрическим выражением для определения координат любой точки K на указанной плоской поверхности. Предположим, что точка K лежит на пересечении 2-х прямых HL и NM , параллельных соответственно прямым $AC(BD)$ и $AB(CD)$ (см. рис. 2). Прямая HL делит $AB(CD)$ в отношении w : $(1-w)$, а NM делит соответственно прямую $AC(BD)$ в отношении u : $(1-u)$. В таком случае координаты точки K находятся из выражения:

$$[y_K, z_K] = [y_A, z_A](1-u_K)(1-w_K) + [y_B, z_B](1-u_K)w_K + [y_C, z_C]u_K(1-w_K) + [y_D, z_D]u_Kw_K. \quad (3)$$

Определенная таким образом точка K будет перемещаться по всей плоской поверхности при изменении параметров u и w от 0 до 1.

Если координатные векторы четырех точек, определяющих билинейную поверхность, заданы в трехмерном объектном пространстве, то будет трехмерной и билинейная поверхность, получаемая в результате отображения параметрического пространства в объектное. При этом угловые точки будут иметь уже три координаты: $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$, $C[x_C, y_C, z_C]$, $D[x_D, y_D, z_D]$ (рис. 4, а).

В ходе аналитического исследования и анализа свойств билинейной поверхности были выявлены следующие ее закономерности:

1) все свойства билинейной поверхности сохраняются и для трехмерного объектного пространства при любых изменениях координаты X угловых точек поверхности (при этом указанные изменения ординаты точек независимы друг от друга (см. рис. 4, б, в, г);

2) билинейная поверхность может быть вписана не только в квадратное сечение в плоскости YOZ , но и в прямоугольное;

3) в отличие от прямого геликоида для железобетонных конструкций прямоугольного сечения пересечение с боковыми поверхностями не требует введения дополнительных ограничений.

Выражение (3) для трехмерного объектного пространства принимает форму:

$$[x_K, y_K, z_K] = [x_A, y_A, z_A](1-u_K)(1-w_K) + [x_B, y_B, z_B](1-u_K)w_K + [x_C, y_C, z_C]u_K(1-w_K) + [x_D, y_D, z_D]u_Kw_K. \quad (4)$$

В случае необходимости учета деформации поверхности в плоскости XOZ в выбранных точках также за основу принимается билинейная поверхность. При этом каждое слагаемое в правой части уравнения (4) следует умножить на функцию $f(x, z)$:

$$f(x, z) = \beta \cdot x \cdot z, \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

a и b – размеры поперечного сечения, равные половине ширины и высоты сечения соответственно.

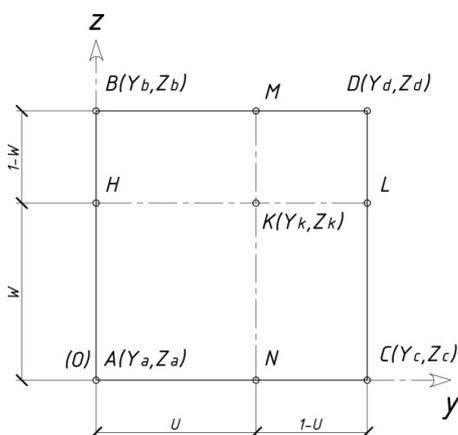


Рис. 3. Плоская билинейная поверхность

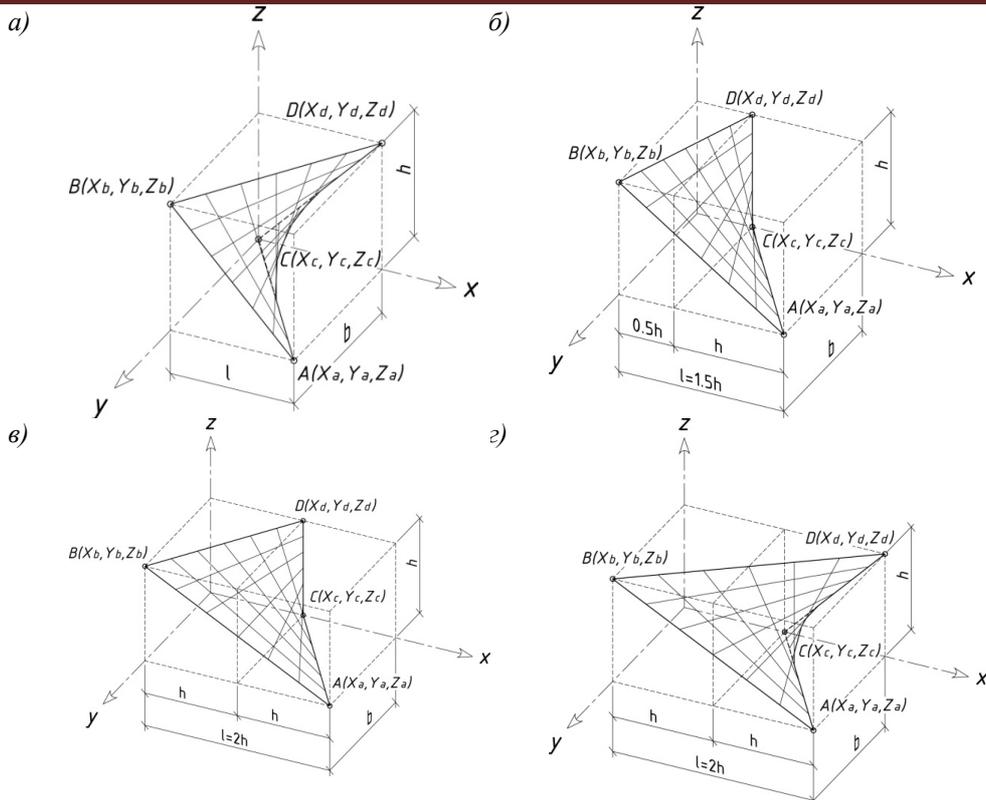


Рис. 4. Общий вид трехмерной билинейной поверхности и примеры ее трансформации при изменении значения координат угловых точек: *а* – произвольная 3-мерная билинейная поверхность; *б* – ее трансформация при смещении т. В на значение $(-0.5h)$, а т. D на значение $(-h)$ вдоль оси X относительно положения (*а*); *в* – то же при смещении т. В и т. D на значение $(-h)$ вдоль оси X относительно положения (*а*); *г* – то же при смещении т. В на значение $(-h)$ вдоль оси X относительно положения (*а*)

Выявленные закономерности билинейных поверхностей позволяют использовать их для описания геометрической формы пространственных трещин, возникающих в железобетонной конструкции при кручении с изгибом.

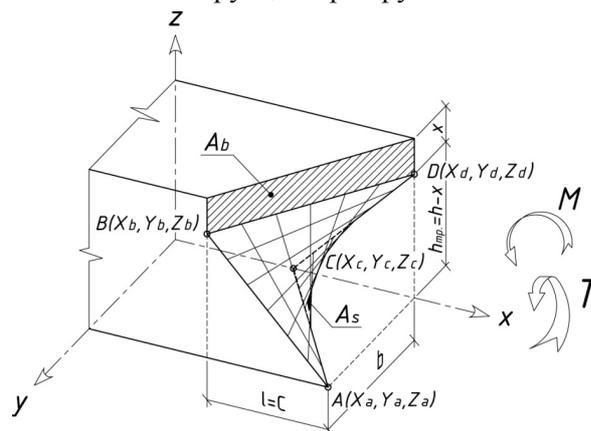


Рис. 5. Общий вид образования трещины по предлагаемой билинейной поверхности в железобетонном элементе, работающем на кручение с изгибом

Анализ проведенных экспериментальных исследований [5-9] показал также, что наиболее вероятным случаем развития пространственной трещины является вариант, при котором длина ее проекции вдоль оси X элемента колеблет-

ся в пределах от $l = h_{тр.}$ до $l = 2h_{тр.}$ (см. рис. 4, б, в, г). При этом высота $h_{тр.}$ определяется как высота растянутой зоны бетона.

Следует отметить, что исследованиями [4] уже была получена методика по определению длины проекции C на ось X элемента балки (рис. 5), что в дальнейшем можно использовать для определения координат угловых точек поверхности пространственной трещины.

На основании проведенного в данной работе исследования был сделан вывод о том, что билинейная поверхность является наиболее приемлемым вариантом математического моделирования пространственной трещины в железобетонной конструкции при кручении с изгибом как наиболее простая в описании, но обеспечивающая при этом достаточную точность при выполнении расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces/ S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 752 p.
2. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей/ С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов. – М.: Librokom, 2010. – 560 с.
3. Кривошапко С.Н. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий / С.Н. Кривошапко, И.А. Мамиева. – М.: Librokom, 2012. – 328 с.
4. Покусаев А.А. Расчет расстояния между пространственными трещинами и ширины их раскрытия в железобетонных конструкциях при кручении с изгибом (случай 1) / А.А. Покусаев, М.В. Шавыкина, В.И. Колчунов / «Строительная механика и расчет сооружений». – 2016. – №2. – С. 20-29.
5. Сафонов А.Г. Расчет прочности железобетонных конструкций при кручении с изгибом: автореф. дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Сафонов Александр Геннадьевич; ГОУ ВПО «Орловский государственный технический университет». – Орел, 2009. – 19 с.
6. Марно И.А.И. Прочность железобетонных элементов прямоугольного сечения при поперечном изгибе с кручением: Автореф. дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Исидоро Андраде Ираола Марно – Киев, 1993. – 21 с.
7. Елагин Э.Г. Сопротивление железобетонных стержней совместному действию изгиба с кручением на стадиях работы с трещинами: Автореф. дис. ... доктора технических наук: 05.23.01 / Елагин, Эдуард Гареевич; МГСУ. – Москва, 1994 – 33 с.
8. Бахотский И.В. Прочность фиброжелезобетонных конструкций в условиях кручения с изгибом: Автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Бахотский Игорь Владимирович; Гос. арх.-строит. ун-т. – Санкт-Петербург, 2013. – 22 с.
9. Зубков Е.В. Прочность и деформации преднапряженных элементов плоских плит при кручении с изгибом: Автореферат дис. ... кандидата технических наук: 05.23.01 / Зубков Евгений Владимирович; Научно-исслед. проектно-конструкторский и технол. ин-т бетона и железобетона. – Москва, 1992 – 23 с.

References

1. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, Springer International Publishing Switzerland, 752 p.
2. Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2010). *Jenciklopedija Analiticheskikh Poverhnostej*, Moscow: LIBROKOM, 560 p.
3. Krivoshapko, S.N., Mamieva I.A. (2012). *Analiticheskie Poverhnosti v Arhitekture Zdanij, Konstrukcij i Izdelij*, Moscow: LIBROKOM, 328 p.
4. Pokusaev, A.A., Shavykina, M.V., Kolchunov, V.I. (2016). Raschet rasstojanija mezhdu prostranstvennymi treshhinami i shiriny ih raskrytija v zhelezobetonnyh konstrukcijah pri kruchenii s izgibom (sluchaj 1), *Stroitel'naja Mehanika i Raschet Sooruzhenij*, №2, pp. 20-29.
5. Safonov, A.G. (2009). *Raschet prochnosti zhelezobetonnyh konstrukcij pri kruchenii s izgibom: Avtoref. diss. kandidata tehniceskikh nauk*: 05.23.01, GOU VPO «Orlovskij gosudarstvennyj tehniceskij universitet», Orel, 19 p.
6. Marno, I.A.I. (1993). *Prochnost' zhelezobetonnyh jelementov prjamougol'nogo sechenija pri poperechnom izgibe s krucheniem: Avtoref. diss. kandidata tehniceskikh nauk*: 05.23.01, Kiev, 21 p.
7. Elagin, Je.G. (1994). *Soprotivlenie zhelezobetonnyh sterzhnej sovmestnomu dejstviju izgiba s krucheniem na stadijah raboty s treshhinami: Avtoref. diss. doktora tehniceskikh nauk*: 05.23.01, Moskva, 33 p.

8. Bahotskij, I.V. (2013). *Prochnost' fibrozhelezobetonnyh konstrukcij v uslovijah kruchenija s izgibom: Avtoreferat diss. kandidata tehniceskix nauk: 05.23.01, Gos. arhitektur.-stroit. un-t., Sankt-Peterburg, 2013. – 22 s.*

9. Zubkov, E.V. (1992). *Prochnost' i deformacii prednaprjazhennyh jelementov ploskih plit pri kruchenii s izgibom: Avtoreferat dis. kandidata tehniceskix nauk: 05.23.01, Nauchno-issled. proektno-konstruktorskiy i tehnol. in-t betona i zhelezobetona, Moscow, 23 p.*

MODELING SPATIAL CRACKS IN CONCRETE STRUCTURES IN TORSION BENDING

VI.I. Kolchunov, D.A. Rypakov
Souht-West State University, Kursk, Russia

The article discusses modeling of spatial cracked concrete structure, working in bending and torsion. Variants of surfaces modeling spatial crack are right helicoid, bicubic Coons surface, and bilinear surface. The analysis of these surfaces gave a possibility to choice the most suitable simulation.

KEY WORDS: reinforced concrete, torsion, cracks, analytical geometry.

