



Устойчивость стержней

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ

А.М. АХТЯМОВ*, д-р ф.-м.н., профессор,

М.А. ЗАХАРОВА**, старший преподаватель

* Институт механики Уфимского научного центра РАН,

** Уфимский нефтяной технический университет

450054, г. Уфа, пр. Октября, 71, ИМех УНЦ РАН; АкhtyamovAM@mail.ru

Найдены формулы идентификации интенсивности постоянной поперечной распределенной нагрузки и упругих закреплений стержня по пяти значениям его смещений. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: обратная задача, идентификация краевых условий и интенсивности поперечной нагрузки, продольно-поперечный изгиб стержня

Современным проблемам продольно-поперечного изгиба стержней, балок и колон посвящено большое число работ (см., например, [1-5]). В настоящей работе для классической проблемы продольно-поперечного изгиба стержня [6-12] рассматривается обратная задача: найти общие краевые условия упругого закрепления стержня и интенсивность поперечной распределенной нагрузки по значениям прогибов стержня в пяти точках. Для поперечного изгиба стержня и

графа из стержней соответствующая задача решена в [13–15]. Для продольно-поперечного изгиба эта обратная задача ранее не ставилась.

Как известно, если начального смещения нет, то продольно-поперечный изгиб стержня описывается уравнением [10, с. 230]

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{N}{EJ} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{EJ}, \quad (1)$$

где $y = y(z)$ – упругое смещение стержня, $N > 0$ – продольное усилие, q – интенсивность поперечной распределенной нагрузки, E – модуль упругости Юнга, J – момент инерции относительно оси X (ось Z считаем направленной вдоль стержня, оси X и Y перпендикулярны оси Z). На протяжении всей статьи считаем, что N , q , E , J являются константами.

Общие краевые условия в случае упругих закреплений записываются в виде [10, с. 230]:

$$EJ y'''(0) + N y'(0) + k_1 y(0) = 0, \quad EJ y''(0) - k_2 y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$EJ y'''(\ell) + N y'(\ell) - k_3 y(\ell) = 0, \quad EJ y''(\ell) + k_4 y'(\ell) = 0, \quad (3)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – коэффициенты жесткости пружин.

Цель настоящей статьи: решить задачу, обратную к (1)-(3): Найти k_1, k_2, k_3, k_4, q , с помощью смещений стержня $y(z_i)$ в пяти точках z_i ($i = \overline{1; 5}$).

Решение этой обратной задачи, также как и в [13,14], проводится в два этапа. На первом этапе находится q , а на втором – k_i ; $i = \overline{1; 4}$.

Решение уравнения (1) известно [10, с. 230]:

$$y = C_1 + C_2 z + C_3 \sin kz + C_4 \cos kz + y^*, \quad (4)$$

где $y^* = qz^2 / (2N)$ – частное решение уравнения (1), C_1, C_2, C_3, C_4 – числовые константы, $k = \sqrt{N/(EJ)}$.

Подставив значения смещений $y(z_i)$ в точках z_i ($i = \overline{1; 5}$) в (4), получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными C_1, C_2, C_3, C_4 и q

$$y(z_i) = C_1 + C_2 z_i + C_3 \sin kz_i + C_4 \cos kz_i + \frac{qz_i^2}{2N}; \quad i = \overline{1; 5}. \quad (5)$$

Решение системы (5) легко находится по формулам Крамера. С помощью найденных C_1, C_2, C_3, C_4, q и (4) можно записать решение уравнения (1) в любой точке отрезка $[0; \ell]$. Подставив полученное решение $y(x)$ в краевые условия (2)–(3), получим систему относительно коэффициентов k_i ; $i = \overline{1; 4}$.

Решение этой системы определяет коэффициенты жесткости k_i :

$$k_1 = \frac{-EJ y'''(0) - N y'(0)}{y(0)}, \quad k_2 = \frac{EJ y''(0)}{y'(0)}, \quad (6)$$

$$k_3 = \frac{EJ y'''(\ell) + N y'(\ell)}{y(\ell)}, \quad k_4 = \frac{-EJ y''(\ell)}{y'(\ell)}. \quad (7)$$

П р и м е р. Рассмотрим стержень длиной 4 м и квадратным сечением со стороной 0,1 м, $E = 2 \cdot 10^{10}$ кг/м²; $N = 10$ кг; $y(0,5) = 0,0272734$, $y(1) = 0,031819$, $y(2) = 0,040910$, $y(3) = 0,050001$, $y(3,5) = 0,054546$. Найдем для

этого стержня соответствующие краевые условия и нагрузку q . Из системы (5) получаем $C_1 = -83,665641$, $C_2 = -0,002324$, $C_3 = 1,473794$, $C_4 = 83,688369$; $q = 0,050214$. Откуда $y(z) = -83,665641 - 0,002324 \cdot z + 0,002511 \cdot z^2 + 1,473794 \cdot \sin(0,007746z) + 83,688369 \cos(0,007746z)$. Подставив это $y(z)$ в (6) и (7), получим ($J = 0,1^4 / 12 = 8,333 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$): $k_1 = 1,022527$, $k_2 = 1,793911$, $k_3 = 3,005727$, $k_4 = 4,244533$. Заметим, что упругие смещения стержня в пяти точках были выбраны как решения прямой задачи отыскания упругих смещений по известным $k_1 = 1 \text{ кг/м}$, $k_2 = 2 \text{ кг м}$, $k_3 = 3 \text{ кг/м}$, $k_4 = 4 \text{ кгм}$, $q = 0,05 \text{ кг}$.

Таким образом, решение поставленной обратной задачи находится с помощью формул Крамера для (5) и формул (6),(7). Эти формулы позволяют диагностировать интенсивности поперечных нагрузок и надежность закрепления балок по значениям их прогибов в доступных для осмотра местах. А значит, они помогают оценить опасность обрушения строительной конструкции.

Авторы выражают признательность М.А. Ильгамову за полезные советы при обсуждении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и АН Республики Башкортостан (проекты 11-01-00293-а, 11-01-97002-р_поволжье_а).

Л и т е р а т у р а

1. Анфилофьев А.В. Теории «малых» и «больших» искривлений стержней в общем аналитическом представлении // Известия Томского политехнического университета. 2007. Т. 310. № 2. С. 55-59.
2. Астапов Н.С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. № 4. С. 135-138.
3. Богданович А.У. Метод структурно-пластических ослаблений при расчётах сжатых стержней на устойчивость // Известия КГАСУ, 2006, №2(6), С. 34-37.
4. Гениев Г.А., Колчунов В.И., Клюева Н.В. и др. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях. – М.: Изд-во АСВ, 2004.
5. Еремин А.А., Санжаровский Р.С., Бондаренко В.М. К вопросу оценки несущей способности железобетонных колонн // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Строительство и транспорт. 2009. № 1-21. С. 19-21.
6. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967, 984 с.
7. Динник А.Н. Продольный изгиб. – М.;Л.: ГОНТИ, 1939.
8. Крылов А.Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе / Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
9. Николаи Е.Л. О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Труды по механике. – М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1.
11. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. Пер. с англ. – М.: Гостехиздат, 1957. 536 с.
12. Якупов Н.М. Леонард Эйлер – один из основателей строительной механики (К 300-летию со дня рождения) // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2007. Т. 7. № 1. С. 52-55.
13. Ахтямов А. М. К решению обратной статической задачи // Эл. журнал "Исследовано в России", 49, с. 567--573, 2003: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/049.pdf>
14. Ахтямов А.М., Нафикова Э.Р. Восстановление краевых условий и функций нагрузки // Контроль. Диагностика. 2007. № 9. С.50–52.
15. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит. 2009. – 272 с.

THE INVERSE PROBLEM FOR LONGITUDINAL-AND-TRANSVERSAL BENDING OF BAR

Akhtyamov A.M., Zakharova M.A.