

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ КОНСТРУКЦИИ И ФУНДАМЕНТА С УЧЕТОМ НАРАЩИВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ

В.И. АНДРЕЕВ, *д-р техн. наук, проф.*

Е.В. БАРМЕНКОВА, *аспирант*

А.В. МАТВЕЕВА, *студент*

*Московский государственный строительный университет*

*129337, Москва, Ярославское шоссе, 26; e-mail: [asv@mgsu.ru](mailto:asv@mgsu.ru)*

*Разработана модель «конструкция-фундамент-основание» в виде двухслойной балки, нижний слой которой соответствует фундаменту, а верхний – конструкции с соответствующими приведенными характеристиками. Модель учитывает совместную работу конструкции и фундамента на упругом основании. Из общих уравнений теории упругости с учетом массовых сил получено разрешающее уравнение и формулы для трех компонент напряжения. Построены зависимости внутренних усилий в балке от высоты конструкции, а также эпюры напряжений для рассматриваемой модели и традиционной постановки задачи. Показано, что эпюры напряжений для двух рассмотренных расчетных схем существенно отличаются.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** конструкция, фундамент, основание, двухслойная балка, теория упругости

В работах [1,2] рассматривалась задача моделирования конструкции, работающей совместно с фундаментом и основанием, с помощью двухслойной балки или плиты, лежащей на упругом основании. В настоящей работе приводятся полученные на основе разработанной модели результаты расчетов напряженного состояния двухслойной балки-полоски на упругом основании, которая соответствует задаче о плоском деформируемом состоянии.

### **1. Основные соотношения**

Уравнение изгиба рассматриваемой балки, выведенное на основе общих уравнений теории упругости с учетом массовых сил, имеет вид [1,2]:

$$D_z \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = q^*, \quad (1)$$

где  $q^* = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$  – приведенная нагрузка;  $h_1, h_2$  – соответственно толщина фундаментной плиты единичной ширины и толщина верхнего слоя, моделирующего конструкцию;  $\gamma_1, \gamma_2$  – соответственно удельный вес материала плиты и приведенный удельный вес конструкции;  $k$  – коэффициент постели основания;  $D_z$  – приведенная жесткость сечения, определяемая равенством

$$D_z = \frac{E_2}{2} \left[ y_6^2 y^* - \frac{(y^*)^3}{3} + \frac{2y_6^3}{3} \right] - \frac{E_1}{2} \left[ y_n^2 y^* - \frac{(y^*)^3}{3} - \frac{2y_n^3}{3} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости материалов слоев балки,  $y_n = y_C + h_1/2$ ;  $y_6 = h_2 + h_1/2 - y_C$ ;  $y = y^* = y_C - h_1/2$  (рис.1).

Уравнение (1) отличается от традиционного уравнения изгиба балки на упругом основании наличием приведенной жесткости и тем, что нагрузка не прикладывается к верхней поверхности фундамента, а представляет собой объемные силы (рис.2).

Зная решение уравнения (1), напряжения, действующие в балке, можно вычислить по формулам:

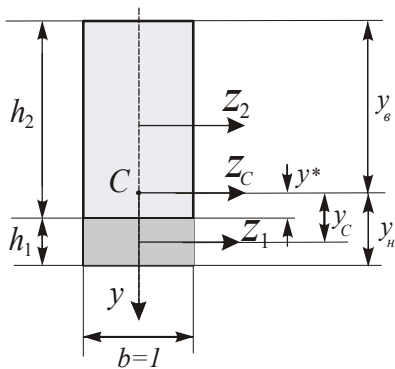


Рис. 1. Поперечное сечение двухслойной балки

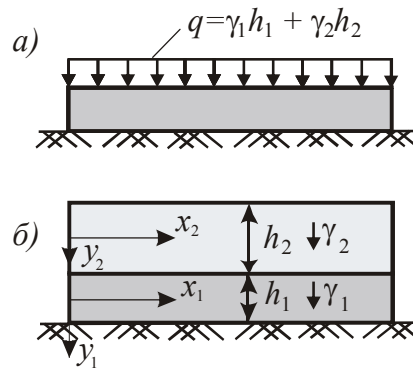


Рис. 2. Традиционная постановка задачи (а) рассматриваемая модель (б)

$$\sigma_{xi} = \frac{E_i M_z y}{D_z} = \frac{-E_i D_z \frac{d^2 v}{dx^2} y}{D_z} = -E_i \frac{d^2 v}{dx^2} y; \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = \frac{E_1}{2} \frac{d^3 v}{dx^3} (y^2 - y_H^2); \quad \tau_{xy}^{(2)} = \frac{E_2}{2} \frac{d^3 v}{dx^3} (y^2 - y_6^2); \quad (4)$$

$$\sigma_{y1} = \frac{E_1}{2} \frac{d^4 v}{dx^4} \left( y_H^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2y_H^3}{3} \right) - \gamma_1 (y - y_H) - kv; \quad (5)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{E_2}{2} \frac{d^4 v}{dx^4} \left( y_6^2 y - \frac{y^3}{3} + \frac{2y_6^3}{3} \right) - \gamma_2 (y + y_6), \quad (6)$$

где  $E_i$  – модули упругости материала слоев. Нетрудно проверить, что касательные напряжения совпадают на границе между слоями  $y = y^*$ .

## 2. Пример расчета

Ниже приводятся результаты расчета модели четырехэтажного здания, каждый этаж которого равен 3 м, а толщина фундаментной плиты  $h_1 = 1$  м. В качестве модели рассматривается двухслойная балка на двух шарнирных опорах.

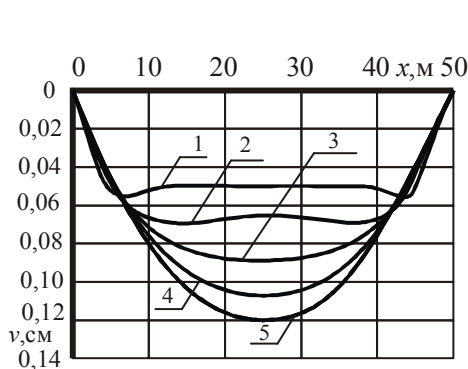


Рис. 3. Эпюры прогибов

1 -  $h_2 = 0$ ; 2 -  $h_2 = 3$  м; 3 -  $h_2 = 6$  м;  
4 -  $h_2 = 9$  м; 5 -  $h_2 = 12$  м

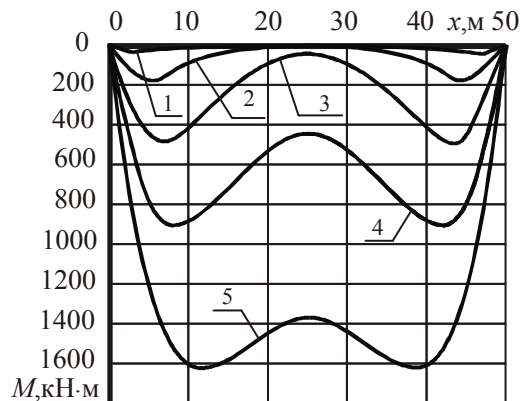


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов. Обозначения, как на рис. 3

Остальные исходные данные:  $E_1 = 10^7$ кПа;  $E_2 = 10^6$ кПа;  $\gamma_1 = 25$  кН/м<sup>3</sup>;  $\gamma_2 = 2,5$  кН/м<sup>3</sup>;  $L = 50$  м;  $k = 5 \cdot 10^4$ кН/м<sup>3</sup>. Решение уравнения (1) ищется с помощью функций А.Н.Крылова [3].

Расчеты проводились с учетом наращивания здания, т.е. последовательно при  $h_2 = 0, 3, 6, 9$  и  $12$  м. На рис. 3,4 приведены эпюры прогибов и изгибающих моментов для всех вариантов. Наибольший интерес представляют эпюры напряжений. На рис. 6, а показана эпюра напряжений  $\sigma_x$ , которые вычислялись в двухслойной балке для варианта  $h_2 = 6$  м в сечениях, где  $M = M_{\max}$ , а на рис 6,б – напряжения  $\tau_{xy}$ , вычисленные на опорах, где  $Q = Q_{\max}$ . Для сравнения там же показаны эпюры в однослойной балке, при традиционной постановке задачи (рис. 2, а), когда нагрузка  $q = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2$  соответствует  $h_2 = 6$  м.

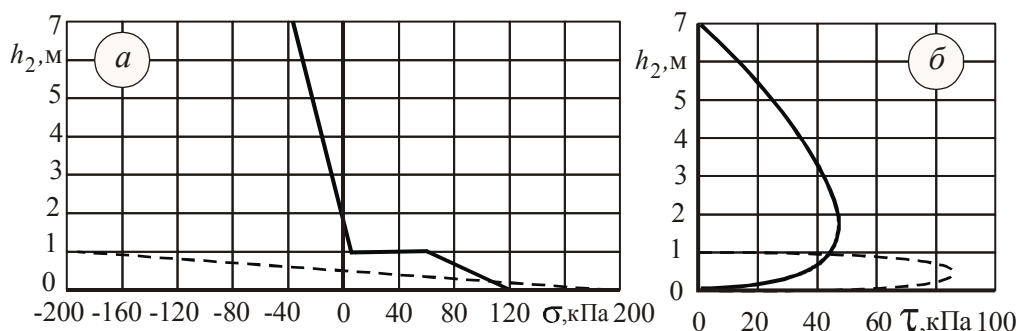


Рис.6. Эпюры нормальных (а) и касательных (б) напряжений  
 ---- расчетная схема 2,а; ——— расчетная схема 2,б

### Выводы.

Рассматривая в целом различия между двумя постановками задачи, приведенными на рис. 2, а и 2, б, отметим следующие существенные отличия в результатах.

- Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании при рассмотрении двухслойной балки содержит приведенную изгибную жесткость, существенно отличающуюся от жесткости нижнего слоя.
- Если вес слоев балки приводится к поверхностной нагрузке, то изгибается только нижний слой, при рассмотрении же двухслойной балки оба слоя деформируются совместно, при этом нейтральный слой смещается в сторону верхнего слоя, откуда следует, что вся фундаментная плита может находиться в условиях растяжения, как это имеет место в рассмотренном примере.
- Касательные напряжения, несмотря на увеличение поперечной силы в двухслойной балке, по сравнению с однослойной, уменьшаются, поскольку площадь поперечного сечения балки существенно увеличивается.

### Л и т е р а т у р а

1. Андреев В.И., Барменкова Е.В. Об изгибе двухслойной балки на упругом основании с учетом массовых сил. Труды межд. Научно-практ. конф. «Инженерные системы – 2009», РУДН, 6-9.04.2009, т. II, с.220-225
2. Андреев В.И., Барменкова Е.В. Изгиб двухслойной балки на упругом основании с учетом массовых сил XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. Proceedings. Архангельск 01.07 – 05.078.2009. Warszawa, 2009, pp. 51-56.
3. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Изд-во АСВ, 1995. - 572 с.

**MODELING OF TEAMWORK OF CONSTRUCTION AND THE BASE  
TAKING INTO ACCOUNT CONSTRUCTION ESCALATING**

Vladimir I. Andreev, Elena V. Barmenkova, A.V. Matveyeva

The model "design-foundation-basis" in the form of the two-layer beam which bottom layer corresponds to the foundation, and top – designs with the corresponding resulted characteristics are developed. The model considers the joint work of construction and the foundation on elastic foundation. From the general equations of elasticity theory, taking into account the mass forces obtained resolving equations and formulas for the three components of stress. The dependencies of internal forces in a beam of high design, as well as diagrams of the stresses for the model and the traditional formulation of the problem. It is shown that the stress diagrams for the two considered design schemes differ considerably.

KEYWORDS: construction, foundation, base, two-layer beam theory of elasticity

