

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Д. ПОТАПОВ, *д-р техн. наук, профессор*

В.А. ДИБРОВ, *старший преподаватель*

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Москва
127994, Москва, ГСП-4, ул. Образцова, 9, стр. 9; potapov.vd@relcom.ru

В настоящей статье на примере стержня, лежащего на сплошном нелинейно упругом основании, рассматривается задача моделирования движения нелинейной системы, находящейся под действием детерминированной и стохастической параметрической нагрузки, и анализа его устойчивости. Показано, что и в этом случае возможна стабилизация неустойчивого невозмущенного движения стержня путем наложения на детерминированную нагрузку стохастической составляющей в виде гауссовского стационарного процесса.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, нелинейность, стохастические параметрические уравнения, численный метод, стабилизация движения.

Рассмотрим упругий стержень длиной l , сжатый продольной силой, приложенной по концам стержня, и лежащий на сплошном упругом основании (рис. 1), реакция r которого определяется выражением

$$r = -cw^3,$$

где w - прогиб стержня, c - физическая константа материала основания. Поперечные колебания стержня описываются уравнением

$$m \ddot{w} + 2k\dot{w} + EJw'''' + F(t)w'' + cw^3 = 0, \quad (1)$$

причем m - погонная масса стержня, k - коэффициент, характеризующий демпфирование системы, EI - изгибная жесткость стержня, $F(t)$ - продольная сила, зависящая от времени t , x - продольная координата, отсчитываемая от одного из концов стержня.

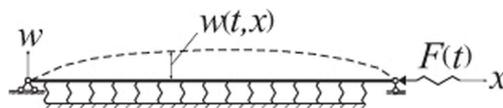


Рис. 1. Стержень, лежащий на сплошном нелинейно упругом основании

Решение $w(t, x)$ уравнения (1) ищем в виде суммы

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (2)$$

Для определения функций $f_i(t)$ воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. В результате получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\ddot{f}_i(t) + 2kf_i(t) + \frac{i^4\pi^4}{l^4}f_i(t) - F(t)\frac{i^2\pi^2}{l^2}f_i(t) + c\frac{2}{l}I_i = 0, \quad (3)$$

где

$$I_i = \int_0^l \sin \frac{i\pi}{l} x \left(\sum_n f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \sum_m f_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x \sum_q f_q(t) \sin \frac{q\pi}{l} x \right) dx = \\ = \sum_n \sum_m \sum_q \frac{l}{8} f_n(t) f_m(t) f_q(t) \sum_j a_j.$$

Здесь
$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } i - n + m - q \neq 0 \\ 1, & \text{если } i - n + m - q = 0 \end{cases}$$

Аналогично определяются остальные величины $a_j, j = 2, \dots, 8$.

Вводя безразмерные величины

$$\tau = \omega_1 t, \quad 2\varepsilon = \frac{k}{m\omega_1}, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{i^4\pi^4}{l^4} EJ + c \right), \quad \alpha_i = \frac{i^2\pi^2 F}{l^2 (EJ \frac{i^4\pi^4}{l^4} + c)}, \quad \xi_i = \frac{f_i}{h},$$

причем h высота поперечного сечения стержня, перепишем уравнение (3) следующим образом

$$\xi_i'' + 2\varepsilon\xi_i' + \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 (1 - \alpha_i)\xi_i + \beta I_i^* = 0 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (4)$$

Здесь
$$\xi_i' = \frac{d\xi_i}{d\tau}, \quad \beta = \frac{ch^2}{4m\omega_1^2}, \quad I_i^* = \sum_n \sum_m \sum_q \xi_n \xi_m \xi_q \sum_{k=1}^8 a_k.$$

В дальнейшем будем считать $\beta = 0,11375$. Безразмерная продольная сила $\alpha_1(\tau)$ принимается в виде суммы

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \Theta \tau + \alpha^o(\tau),$$

причем α_0, α_1 - константы, $\alpha^o(\tau)$ - гауссовский случайный стационарный процесс, ($\langle \alpha^o(\tau) \rangle \equiv 0$) с корреляционной функцией

$$K(\tau_1 - \tau_2) = \sigma^2 e^{(-\delta|\tau_1 - \tau_2|)} \left[\cos \theta(\tau_1 - \tau_2) + \frac{\delta}{\theta} \sin \theta(\tau_1 - \tau_2) \right]$$

и спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2\delta}{\pi} \frac{\delta^2 + \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2 - \delta^2) + 4\delta^2\omega^2}.$$

Здесь ε^2 - дисперсия случайного процесса, δ - параметр, характеризующий масштаб корреляции случайного процесса, Θ - частота периодической составляющей продольной силы, θ - частота скрытой периодичности. Угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Стационарный процесс $\alpha^o(\tau)$ с такими корреляционной функцией и спектральной плотностью можно рассматривать как результат прохождения белого шума через линейный фильтр 2-го порядка [4]

$$\alpha^{o''} - a_2\alpha^{o'} - a_3\alpha^o = b_2\sigma\chi(\tau), \quad (5)$$

причем $a_3 = -(\delta^2 + \theta^2)$, $a_2 = -2\delta$, $b_2 = \sqrt{2(\delta^2 + \theta^2)}$, $\chi(\tau)$ - гауссовский белый шум, который моделируется выражением

$$\chi(\tau) = \sqrt{2\delta / \Delta} \psi_{\Delta}(\tau).$$

Здесь $\psi_{\Delta}(\tau) = \psi_j$, $\tau \in [j\Delta, (j+1)\Delta]$, ψ_j - последовательность нормально распределенных некоррелированных чисел с нулевым средним значением и дисперсией $\langle \psi^2 \rangle = 1$, $\Delta = \Delta\tau$ - шаг по времени.

Для анализа устойчивости решения системы уравнений (4, 5) (невозмущенного решения) рассмотрим систему уравнений описывающих возмущенное движение системы, вызванное возмущением начальных условий. В этом случае решение уравнений (4) имеет вид

$$z_i = z_i + \delta z_i. \quad (6)$$

После подстановки выражения (6) в уравнения (4) получим линеаризованные уравнения возмущенного движения в возмущениях

$$\delta \xi_i'' + 2\varepsilon \delta \xi_i' + \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 (1 - \alpha_i) \delta \xi_i + \beta \delta I_i^* = 0, \quad (7)$$

где
$$\delta I_i^* = \sum_n \sum_m \sum_q \sum_{k=1}^8 a_k (\delta \xi_n \xi_m \xi_q + \xi_n \delta \xi_m \xi_q + \xi_n \xi_m \delta \xi_q).$$

В дальнейшем будем считать $\beta = 0,11375$.

Представим уравнения (7) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \delta y_i' &= \delta y_{i+n}, \\ \delta y_{i+n}' &= -2\varepsilon \delta y_{i+n} - \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 (1 - \alpha_i) \delta y_i - \beta \delta I_i^*, \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

причем $\delta y_i \equiv \delta \xi_i$, $\delta y_{i+n} = \delta \xi_i'$.

Решение уравнений (7) должно удовлетворять начальным условиям

$$\delta y_i(0) = \delta y_{i0}, \quad (j=1, \dots, 2n).$$

Далее под устойчивостью системы понимается устойчивость по отношению к возмущению начальных условий (устойчивость в смысле Ляпунова).

При исследовании устойчивости стохастических уравнений используются различные определения устойчивости. В дальнейшем рассматривается устойчивость почти наверное.

Решение уравнений $\delta y_j(\tau) \equiv 0$, $(j=1, \dots, 2n)$ называется устойчивым почти наверное, если

$$P\left\{ \lim_{|\delta y_j(\tau)_{\tau \rightarrow 0}|} \text{Sup}_{\tau > 0} |\delta y_j(\tau, \delta y_j(\tau)_{\tau=0})| = 0 \right\} = 1,$$

где $P\{\dots\}$ - вероятность события, заключенного в фигурные скобки.

Решение $\delta y_j(\tau) \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым почти наверное, если оно устойчиво почти наверное и дополнительно выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{\text{Sup}_{\tau \geq T} |\delta y_j(\tau, \delta y_j(\tau)_{\tau=0})| = 0\} = 1,$$

Рост вектора $\delta Y(\tau)$ может быть оценен с помощью максимального показателя Ляпунова, который определяется выражением

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\delta Y(\tau)\|}{\|\delta Y(0)\|},$$

где $\|\delta Y(\tau)\|$, $\|\delta Y(0)\|$ - норма вектора $\delta Y(\tau)$ в евклидовом пространстве в момент времени τ и в начальный момент времени $\tau = 0$

$$\|\delta Y(\tau)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \delta y_j^2(\tau)}, \quad \|\delta Y(0)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \delta y_j^2(0)}.$$

Величина λ может быть найдена численно с помощью метода, предложенного Бенеттиным с соавторами [4]. Если максимальный показатель Ляпунова λ положительный, то рассматриваемая система неустойчива, и если λ отрицательный, тогда система асимптотически устойчива.

Приведем пример. Для численного решения уравнений (4, 5) воспользуемся методом Рунге-Кутты 4-ого порядка [2, 3]. С этой целью представим систему уравнений (4, 5) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} y_i' &= y_{i+n}, \\ y_{i+n}' &= -2\varepsilon y_{i+n} - \left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2 (1 - \alpha_i) y_i - \beta I_i^*, \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9)$$

$$y_{2n+1}' = y_{2n+2}$$

$$y_{2n+2}' = a_2 y_{2n+2} + a_3 y_{2n+1} + b_2 \sigma \chi(\tau),$$

причем $y_i \equiv \xi_i$, $y_{i+1} \equiv \xi_i'$, $(i=1, \dots, n)$, $y_{2n+1} = \alpha^o$, $y_{2n+2} = \alpha^{o'}$,

$$I_i^* = \sum_n \sum_m \sum_q \xi_n \xi_m \xi_q \sum_{k=1}^8 a_k.$$

Далее рассмотрим некоторые результаты решения уравнений (4,5) при следующих значениях исходных параметров:

$$\varepsilon = 0.1, \quad \alpha_o = 0.5, \quad \alpha_1 = 2.0, \quad \Theta = \theta = 1.4, \quad \sigma^2 = 0.01, \quad \delta = 0.5, \quad \Delta\tau = 0.1.$$

На рис. 2 показаны графики изменения корреляционной функции (рис. 2, а) и спектральной плотности (рис. 2, б) случайного процесса $\alpha^o(\tau)$ для принятых исходных данных, а на рис. 3 представлены графики изменения периодической составляющей $\alpha_1 \cos \Theta\tau$ (рис. 3, а) и одной из реализаций суммы периодической и стохастической составляющих безразмерной нагрузки $\alpha_1 \cos \Theta\tau + \alpha^o(\tau)$ (рис. 3, б).

На рис. 4 приведены графики изменения безразмерного перемещения среднего сечения стержня ($x = l/2$) на фазовой плоскости (рис. 4, а) при $n = 1$ и (рис. 4, б) при $n = 5$ в том случае, когда функция $\alpha(\tau)$ является детерминированной $\alpha_0 + \alpha_1 \cos \Theta\tau$. Начальные условия приняты следующими:

$\xi_1(0) \equiv \xi_{01} = 1.0, \xi'_1(0) \equiv \xi'_{01} = 0$ при $n = 1$ и
 $\xi_{01} = 1.0, \xi_{02} = \dots = \xi_{05} = 0, \xi'_{01} = 0, \dots, \xi'_{05} = 0$ при $n = 5$.

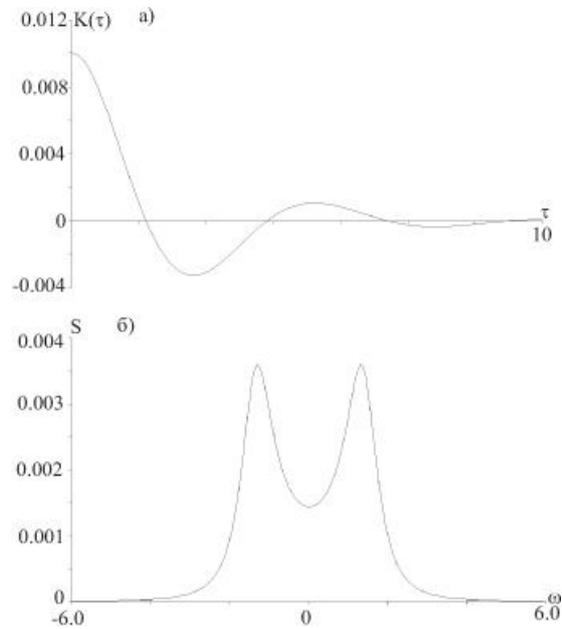


Рис. 2. Графики изменения корреляционной функции $K(\tau)$ (рис. 2,а) и спектральной плотности $S(\omega)$ (рис. 2,б) случайного процесса $\alpha^0(\tau)$ при $\theta = 1.4, \sigma^2 = 0.01, \delta = 0.5$.

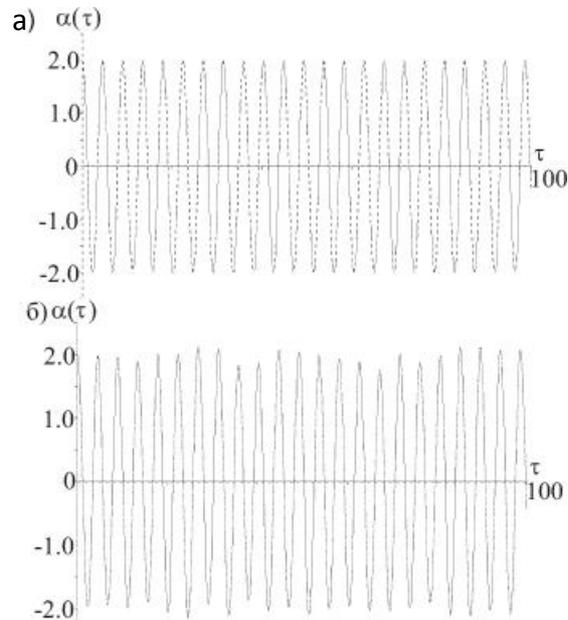


Рис. 3. Графики изменения периодической части $\alpha_1 \cos \Theta \tau$ функции $\alpha(\tau)$ (рис. 3,а) и суммы периодической и одной из реализаций случайной составляющей функции $\alpha^0(\tau)$ (рис. 3,б) при $\theta = 1.4, \sigma^2 = 0.01, \delta = 0.5$.

Для сравнения на рис. 5 показаны аналогичные графики изменения перемещения того же сечения стержня для одной реализации, полученной при $n = 1$ (рис. 5, а), и для другой реализации, полученной при $n = 5$ (рис. 5, б), в том случае, когда функция $\alpha(\tau)$ является стационарным процессом $\alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \Theta \tau + \alpha^o(\tau)$ с параметрами корреляционной функции $\theta = 1.4$, $\sigma^2 = 0.01$, $\delta = 0.5$ и при одних и тех же остальных исходных данных.

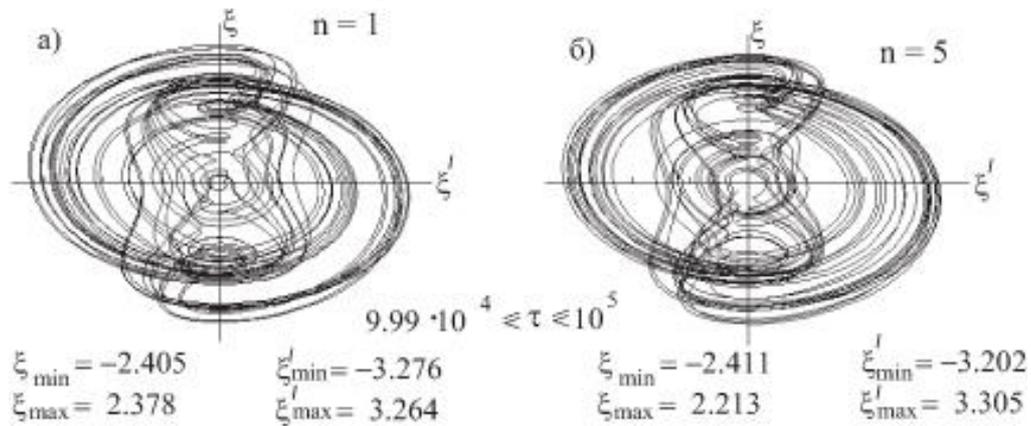


Рис. 4. Графики изменения перемещения среднего сечения стержня на фазовой плоскости при детерминированной постановке задачи

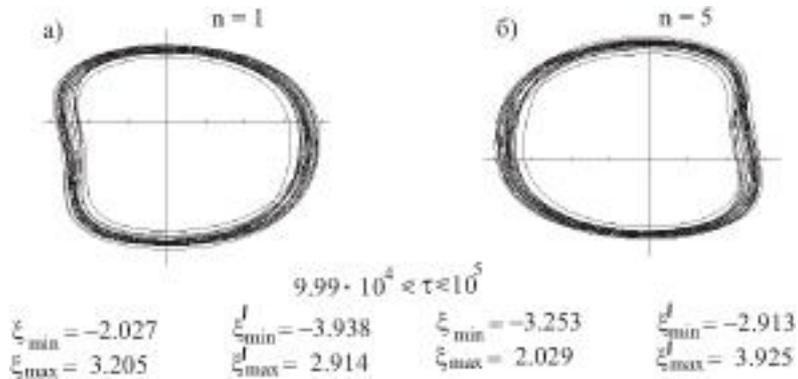


Рис. 5. Реализации перемещения среднего сечения стержня на фазовой плоскости в том случае, когда функция $\alpha(\tau)$ является стационарным процессом

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \Theta \tau + \alpha^o(\tau).$$

Как видно из рис. 3, при заданных значениях исходных параметров малое изменение в продольной силе, вызванное случайной добавкой $\alpha^o(\tau)$, приводит к принципиальному изменению в поведении системы. Это проявляется в том, что из неупорядоченного (хаотического) при детерминированной постановке задачи оно становится более упорядоченным (устойчивым, как будет показано в последующих разделах) при стохастической постановке задачи. Указанное отличие сохраняется при $n = 1$ и $n = 5$, хотя фазовые портреты траектории движения сечения стержня оказываются разными и в том, и другом случаях, как при детерминированной, так и при стохастической постановках задачи.

Результаты анализа устойчивости невозмущенного движения стержня при тех же исходных данных, которые использовались в примере 1, представлены в табл. 1, 2. Табл. 1 содержит значения оценок λ , найденные для стержня, находящегося под действием периодической продольной силы (при детерминированной постановке задачи), при $\xi_{01} = 1.0$ и различных начальных условиях для системы уравнений (9) и при различном числе членов в разложении прогиба стержня n . Как видно, невозмущенное движение стержня оказывается неустойчивым и имеет хаотический характер, который можно оценить по рис. 4.

Таблица 1

Оценки максимального показателя Ляпунова для детерминированной постановки задачи при различных начальных условиях и при $\tau = 10^5$

n	ξ_{0i}	$\delta\xi_{0i}$	λ
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = 1.0$	0.166
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi'_{01} = 1.0$	0.166
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \delta\xi'_{01} = 1/\sqrt{2}$	0.166
3	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{03} = 1/\sqrt{6}$	0.166
5	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	0.165
5	$\xi_{01} = \xi_{03} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	0.167
5	$\xi_{01} = -\xi_{03} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	0.164

Для сравнения в таблице 2 приведены оценки значений λ , полученные для стержня при действии на него той же периодической силы с наложенной не стохастической продольной силой, при тех же исходных данных и начальных условиях. Как видно из сопоставления этих данных, неустойчивая детерминированная система может быть стабилизирована наложением на внешнюю параметрическую периодическую нагрузку даже малой случайной составляющей в виде стационарного процесса.

Таблица 2

Оценки максимального показателя Ляпунова для стохастической постановки задачи (устойчивость почти наверное) при различных начальных условиях и при $\tau = 10^5$

n	ξ_{0i}	$\delta\xi_{0i}$	λ
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = 1.0$	-0.095
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi'_{01} = 1.0$	-0.095
1	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \delta\xi'_{01} = 1/\sqrt{2}$	-0.094
3	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{03} = 1/\sqrt{6}$	-0.095
5	$\xi_{01} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	-0.092
5	$\xi_{01} = \xi_{03} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	-0.095
5	$\xi_{01} = -\xi_{03} = 1.0$	$\delta\xi_{01} = \dots = \delta\xi'_{05} = 1/\sqrt{10}$	-0.095

Графики на рис. 6 иллюстрируют изменения оценок показателя λ для детерминированной (рис. 6, а, б) и стохастической (рис. 6, в, г) постановок задачи

при начальных условиях для невозмущенного движения $\xi_{01} = 1, 0$; $\xi_{02} = \dots = \xi_{02n} = 0$ и числе членов в разложении прогиба (2) равном 1 (рис. 6, а, в) или 3 (рис. 6, б, г). Эти графики показывают, что скорость приближения этих оценок к предельному значению при детерминированной постановке заметно выше, чем при стохастической постановке.

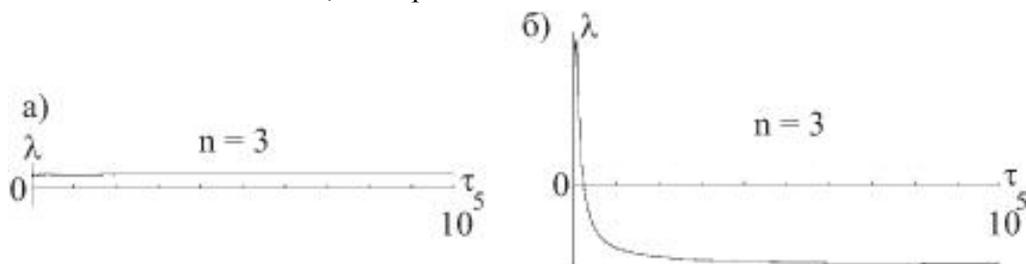


Рис. 6. Графики изменения максимального показателя Ляпунова для детерминированной и стохастической постановок задачи при $n = 3$

Как видно из табл. 1 и 2 значения λ изменяются несущественно с увеличением n как при детерминированной, так и стохастической постановках задачи.

В заключение следует отметить, что в работе [1] было показано, что неустойчивая линейная детерминированная система, находящаяся под действием параметрической нагрузки, может быть стабилизирована путем наложения на параметрическую нагрузку стохастической составляющей в виде гауссовского широкополосного стационарного процесса.

В настоящей статье показано, что аналогичные результаты могут быть получены для нелинейной системы, когда ее решение представляется в виде разложения по собственным формам соответствующей линейной системы при различном числе членов в указанном разложении.

Л и т е р а т у р а

1. *Потапов В.Д.* Об устойчивости стохастических вязкоупругих систем // Проблемы машиностроения и теории надежности машин. – 2009. - №6. - С.85-90.
2. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.
3. *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. - 1000 с.
4. *Benettin G., Galgani L., Giorgolly A., Strelcin J.M.* Liapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a Method for Computing All of Them. P.1, 2 // Meccanica. – 1980. - V. 15. - № 1. - P.9-20, 21-30.

STABILITY OF NON-LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

V.D. Potapov, V.A. Dibrov

This work presents the problem of modeling of the non-linear system movement under the action of determined and stochastic loads. On the example of an elastic beam laying on the non-linear base the numerical method of the problem solution is considered. The stabilization of the unstable motion of the beam by the addition of a random noise is possible

KEY WORDS: stability, non-linear, stochastic parametrical equations, numerical method, stabilization.