

## ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ПО-РАЗНОМУ СОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

С.П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*

Е.С. ИВАНОВА, *студентка*

*Марийский государственный технический университет, 424000, г. Йошкар-Ола,  
пл. Ленина, д. 3, кафедра Сопротивления материалов и прикладной механики*

*В статье предлагается методика расчета на изгиб физически нелинейных пластин из разносопротивляющихся материалов. Получены дифференциальные уравнения равновесия пластины. Рассмотрен пример расчета квадратной пластины. Построен график изменения прогиба в центре пластины в зависимости от действующей нагрузки.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** физическая нелинейность, разносопротивляющиеся материалы, напряженно-деформированное состояние пластины

Экспериментальное исследование материалов (бетона, чугуна, различных композитов) показывает, что они обладают различным сопротивлением не только при растяжении и сжатии, но и при других видах напряженного состояния [1]. Такие материалы правильнее называть разносопротивляющимися. Они обладают физической нелинейностью.

Зависимость между интенсивностями напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$  можно принять в следующей форме:

$$\sigma_i = E \cdot e_i + E_1 e_i^2 - E_2 e_i^3, \quad (1)$$

где постоянные  $E$ ,  $E_1$ , и  $E_2$  принимаются из экспериментальных данных.

С учетом гипотезы Кирхгофа-Лява имеем известные соотношения между деформациями и прогибом пластины:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Выражаем прогиб точек пластины по Власову В. З. [3] в виде разложений:

$$w(x, y) = \sum_k W_k(x) f_k(y), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (3)$$

где  $W_k(x)$  – обобщенный прогиб, определяемый из решения задачи, а  $f_k(y)$  – координатные функции, которые задаются заранее в соответствии с действующей нагрузкой.

Для вывода основных дифференциальных уравнений используется энергетический метод. Удельная энергия  $\Phi$  для элемента пластины с учетом изменения объема и формы имеет вид [2]:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + \int_0^{e_i} \sigma_i de_i - \frac{1-2\nu}{3E} \int_0^{e_i} \sigma_i^2 \frac{de_i}{e_i}, \quad (4)$$

где  $K = E / [(1-2\nu)]$  – модуль объемного сжатия,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  – объемная деформация.

Интенсивность деформаций  $e_i$  выражаем через составляющие деформаций с учетом сжимаемости материала следующим образом:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}. \quad (5)$$

Определим работу, отнесенную к единице площади пластины:

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \Phi dz, \quad (6)$$

Раскрывая (6), получим

$$A = \frac{E \cdot \delta^3}{12} \left[ \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \cdot \frac{d_1}{6} + \frac{b_1}{1+\nu} \right] - \frac{3}{4} \left[ \frac{E_1^2}{E} (1-2\nu) + E_2 (1+4\nu) \right] \frac{\delta^5}{16(1+\nu)^4} b_1^2 - \frac{3}{128} \frac{E_2^2}{E} \frac{(1-2\nu) \cdot \delta^7}{(1+\nu)^6} b_1^3, \quad (7)$$

где

$$d_1 = (\chi_x + \chi_y)^2, \quad b_1 = \nu_1(\chi_x + \chi_y) + \nu_2 \chi_x \chi_y + \chi_{xy}^2, \\ \nu_1 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\nu}{(1+\nu)^2} + 1 \right], \quad \nu_2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1 \right].$$

Здесь  $\delta$  – толщина пластины.

Полная энергия системы складывается из работы внутренних и внешних сил

$$\Pi = \iint (A + q_z \cdot w) dx dy. \quad (8)$$

Изгибающие моменты определим путем дифференцирования выражения  $A$ :

$$M_x = -\frac{\partial A}{\partial \chi_x} = -D(\chi_x + \nu \chi_y) + D_1 \cdot 2b_1(\nu_1 + \nu_2 \chi_y) + D_2 \cdot 3b_1^2(\nu_1 + \nu_2 \chi_y) = \\ = -D(\chi_x + \nu \chi_y) + b_1(\nu_1 + \nu_2 \chi_y) (D_1 + 3b_1 D_2), \\ M_y = -\frac{\partial A}{\partial \chi_y} = -D(\chi_y + \nu \chi_x) + b_1(\nu_1 + \nu_2 \chi_x) (D_1 + 3b_1 D_2), \\ 2M_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial \chi_{xy}} = -2D(1-\nu)\chi_{xy} + 2D_1 b_1 \chi_{xy} + 6D_2 b_1^2 \chi_{xy} = \\ = -2D(1-\nu)\chi_{xy} + 2b_1 \chi_{xy} (D_1 + 3b_1 D_2), \quad (9)$$

$$\text{где} \quad D = \frac{E \cdot \delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_1 = \frac{3}{64} \left[ \frac{E_1^2}{E} (1-2\nu) + E_2 (1+4\nu) \right] \frac{\delta^5}{(1+\nu)^4}, \\ D_2 = \frac{3}{128} \frac{E_2^2}{E} \frac{(1-2\nu) \cdot \delta^7}{(1+\nu)^6}.$$

Уравнения равновесия пластины получим, используя уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial W_k''} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial W_k'} - \frac{\partial F}{\partial W_k} = 0, \quad (10)$$

где  $F$  – подынтегральная функция из выражения (7).

Раскрывая (10), получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия разносопротивляющейся пластины:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} W_k^{IV} - 2 \sum_{k=1}^n b_{ik} W_k'' + \sum_{k=1}^n e_{ik} W_k - \frac{G_i}{D} = \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_k''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_k'} + \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_k}, \quad (11)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ ; где  $F_{нел}$  – нелинейная часть функционала  $F$ .

Коэффициенты линейной части уравнений будут иметь следующий вид:

$$a_{ik} = \int_y f_i \cdot f_k dy; \quad b_{ik} = \int_y f_i' \cdot f_k' dy; \quad c_{ik} = \int_y f_i'' \cdot f_k'' dy; \quad G_i = \int_y q_z \cdot f_i dy. \quad (12)$$

Из-за громоздкости правая часть уравнения (11) в развернутом виде не представлена.

На основании полученных уравнений проведен расчет квадратной пластины из разносопротивляющегося материала на действие равномерно распределенной нагрузки  $q$  при следующих данных:  $\delta/a = 1/10$ ;  $E_1/E = 70$ ;  $E_2/E = 3,29 \cdot 10^3$ ,  $a$  – размеры сторон пластины. Края пластины опираются шарнирно.

Задача решалась в первом приближении, выражение прогиба принималось в следующем виде:

$$w(x, y) = W_1(x)f_1(y). \quad (13)$$

На рис. 1 представлен один из графиков напряженно-деформированного состояния (НДС) изменения относительного прогиба центральной точки пластины  $w/\delta$  в зависимости от относительной величины нагрузки  $Q=q/E$ .

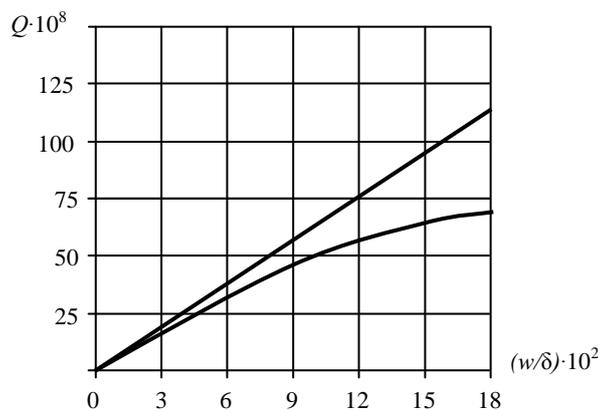


Рис. 1. Графики изменения прогиба в центре пластины в зависимости от действующей нагрузки: прямая - по линейной теории, кривая – с учетом физической нелинейности

Анализ результатов расчета показывает, что физическая нелинейность значительно влияет на НДС пластины. В частности, при учете физической нелинейности значительно увеличивается прогиб пластины.

#### Литература

1. *Матченко, Н. М.* Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. – Тула: ТулГУ, 2000. – 149 с.
2. *Лукаш, П. А.* Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
3. *Власов, В. З.* Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.

### THE BENDING OF PHYSICALLY NONLINEAR PLATES WITH DIFFERENTLY RESISTING IN TENSION AND COMPRESSION MATERIALS

S.P. Ivanov, E.S. Ivanova

In the article, the technique of the bending analysis of physically nonlinear plates with different resisting materials is suggested. The differential equilibrium equations of the plate are induced. The example of design of square plate is considered. The graph of variation of deflection in the plate center against actual loading is constructed.

KEY WORDS: differently resisting materials, physical nonlinear, strain-stress distribution of a plate.