

Расчет тонких упругих оболочек

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ-КУТТА И МЕТОДА ПРОГОНКИ
К РАСЧЕТУ ДЛИННОГО ПОЛОГОГО ТОРСА-ГЕЛИКОИДА**

М.И. РЫНКОВСКАЯ, канд. техн. наук, ассистент
ГОУ ВПО «Российский университет дружбы народов»
117198, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, email: marine_step@mail.ru

В статье показана возможность применения полуаналитического подхода с применением метода Рунге-Кутта и метода прогонки к расчету длинного тонкого пологого торса-геликоида. Дается сравнение результатов, полученных полуаналитическим и аналитическим методами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: торс-геликоид, метод Рунге-Кутта, метод прогонки, полуаналитический метод малого параметра.

Анализ применения метода малого параметра к аналитическому расчету тонкого упругого торса-геликоида подробно рассмотрен в [1], [2]. Однако полученные там уравнения можно решать также с применением численных методов, например, методом Рунге-Кутта [3]. В таком случае получится полуаналитический метод расчета, в котором используются те же исходные дифференциальные уравнения, но которые решаются численно, для чего три уравнения восьмого порядка представляются в виде восьми уравнений первого порядка.

За основу берутся три обыкновенных дифференциальных уравнения с одним независимым параметром α [1]

$$\begin{aligned} & \left(\alpha^2 + \frac{1-\nu}{2} \right) \frac{d^2 u_1}{d\alpha^2} - \frac{1-\nu}{2} B^2 \frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} + \left(\alpha - \frac{1-\nu}{2\alpha} \right) \frac{du_1}{d\alpha} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 3\alpha \right) \frac{du_2}{d\alpha} - \\ & - u_1 - \mu\nu\alpha \frac{dw}{d\alpha} + \mu w + \frac{a\alpha^2}{C} \left(X + \frac{Y}{B} \right) = 0, \\ & \frac{1-\nu}{2} B^2 \left[\frac{d^2 u_1}{d\alpha^2} - B^2 \frac{d^2 u_2}{d\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{du_1}{d\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} - 3\alpha \right) \frac{du_2}{d\alpha} \right] + \mu(1-\nu)\alpha \frac{dw}{d\alpha} + \frac{a\alpha^2}{C} (BY + X) = 0, \\ & - \frac{B^4}{\alpha^3} \frac{d^4 w}{d\alpha^4} + \left(\frac{6}{\alpha^4} - 2 + \frac{4}{\alpha^2} \right) \frac{d^3 w}{d\alpha^3} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{15}{\alpha^5} - \frac{6}{\alpha^3} \right) \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \left(\frac{15}{\alpha^6} + \frac{6}{\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{dw}{d\alpha} - \\ & - \frac{12\mu m^4}{h^2 a^2} \left[(1-\nu) \frac{du_2}{d\alpha} + \nu \frac{du_1}{d\alpha} + \frac{u_1}{\alpha} \right] - \frac{12\mu^2 m^4}{h^2 a^2} \frac{w}{\alpha} - \frac{\alpha m^4}{aD} Z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

которые после некоторых алгебраических преобразований и разложения в ряды по степеням малого параметра μ записываются в удобном для составления вычислительной программы виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{U}{\alpha^2} + \mu \left(\frac{1-\nu}{B^2} \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{dW}{d\alpha} + \mu \frac{W}{\alpha^2} - \frac{a_0 \alpha^2}{CB^2} X; \\ \frac{d^2 V}{d\alpha^2} &= \frac{1}{\alpha B^2} \left[2 \frac{dU}{d\alpha} - \frac{U}{\alpha} + \mu \left(1 + \alpha^2 \frac{1+\nu}{B^2} \right) \frac{dW}{d\alpha} - \mu \frac{W}{\alpha} + (1-3\alpha^2) \frac{dV}{d\alpha} \right] - \frac{a_0 \alpha^2 [2BY + (1+\nu)X]}{CB^4(1-\nu)}; \\ \frac{d^4 W}{d\alpha^4} &= \frac{2}{B^2} \left(\frac{3}{\alpha} - \alpha \right) \frac{d^3 W}{d\alpha^3} + \frac{1}{B^4} \left(\alpha^2 - \frac{15}{\alpha^2} - 6 \right) \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + \frac{1}{B^4} \left(\alpha + \frac{15}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha} \right) \frac{dW}{d\alpha} + \end{aligned}$$

$$\mu \frac{\alpha^2}{tB^4} \left[(1-\nu)\alpha \frac{dV}{d\alpha} - \nu\alpha \frac{dU}{d\alpha} - U - \mu W \right] + \frac{a_0\alpha^4}{tCB^4} Z. \quad (2)$$

Система уравнений (2) имеет восьмой порядок. С помощью векторных обозначений представляем систему (2) в виде системы восьми дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вводим обозначения:

$$y' = f(\alpha, y),$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ U' \\ V \\ V' \\ W \\ W' \\ W'' \\ W''' \end{pmatrix}, \quad f(\alpha, y_i) = \begin{pmatrix} y_1 \\ f_2 \\ y_3 \\ f_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ f_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U' \\ U'' \\ V' \\ V'' \\ W' \\ W'' \\ W''' \\ W^{IV} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для численного решения системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (3) можно применить метод прогонки, известный также как алгоритм Томаса [4], который можно назвать упрощенной формой метода исключения переменных или метода Гаусса.

В ходе прямой прогонки однородной системы находятся коэффициенты метода прогонки, а обратный ход прогонки дает решение неоднородной системы с нагрузкой. В качестве тестового примера был взят длинный пологий торселикоид со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками [5, 6]:

$$h = 0,1\text{ м}, u_1 = 2\text{ м}, u_2 = 4\text{ м}, E = 32500\text{ МПа}, \nu = 0,17; q = 1\text{ кз} / \text{ м}^2.$$

Расчет проводился для двух углов наклона прямолинейных образующих $\varphi = 3^0$ и $\varphi = 10^0$. В тестовом примере метод прогонки был реализован в математической системе MathCad с использованием стандартной функции Odesolve. Результаты расчета по основным силовым факторам, перемещениям представлены на рис. 1 и 2.

Сравнение эпюр, полученных аналитическим методом с учетом первых трех членов ряда и полуаналитическим методом, показывает, что нормальные перемещения u_z при угле наклона прямолинейных образующих $\varphi = 3^0$ почти полностью совпадают, с погрешностью меньше, чем на 0,1%, при угле $\varphi = 10^0$ с погрешностью на 0,5%.

Моменты M_u, M_s, M_{us} при угле образующих $\varphi = 3^0$ совпадают с погрешностью примерно на 0,2%, при угле $\varphi = 10^0$ с погрешностью на 1,2%, в то время как поперечные силы Q_u, Q_s при $\varphi = 3^0$ отличаются меньше, чем на 0,2%, а при $\varphi = 10^0$ отличие составляет около 5%.

Тангенциальные перемещения уже при угле $\varphi = 3^0$ отличаются на 5-13%.

Сравнительные эпюры расчета аналитическим и полуаналитическим методами представлены на рис. 1, 2.

Результат представляется удовлетворительным для первого этапа расчета, однако требует дальнейшего анализа для больших углов наклона образующих.

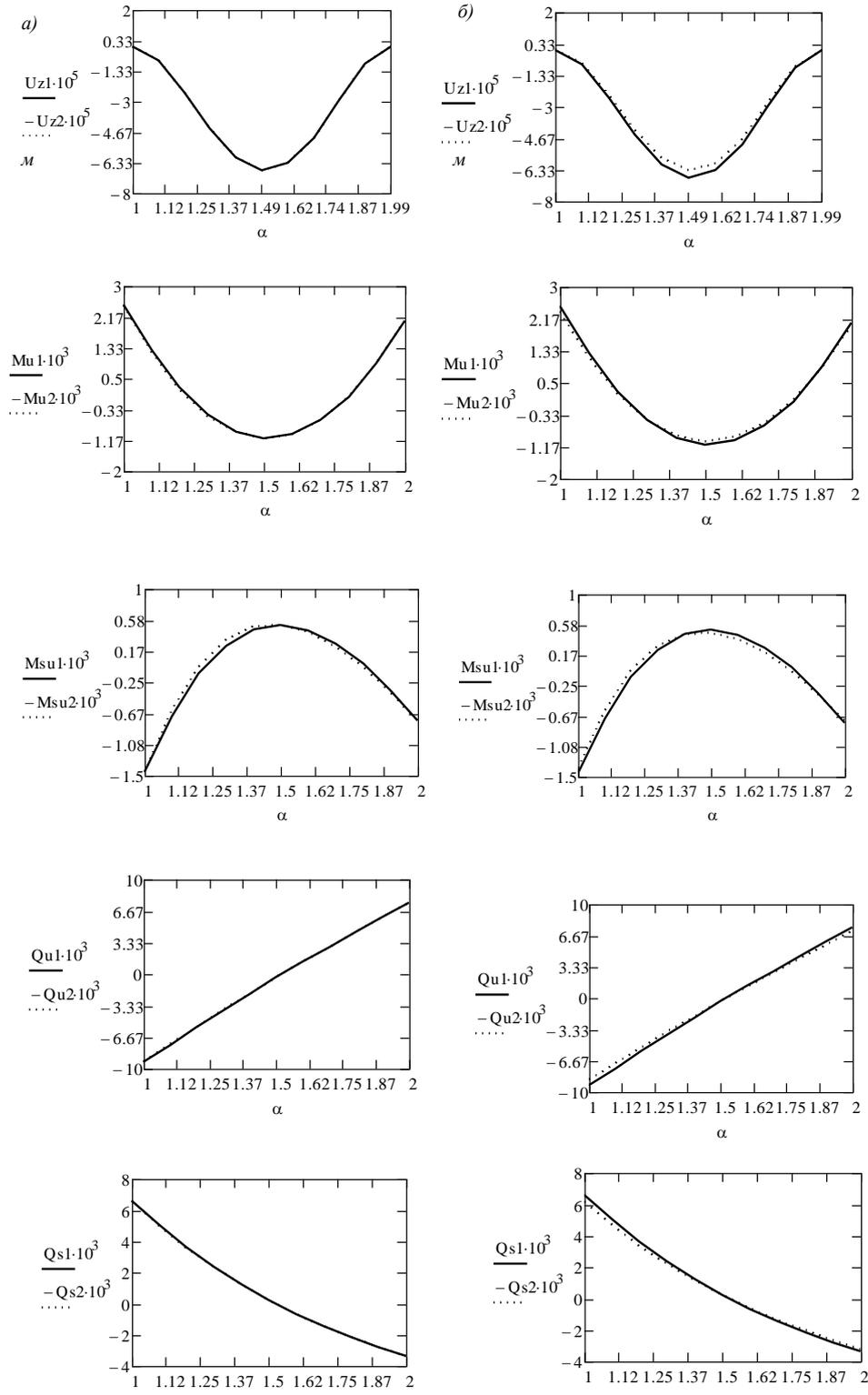


Рис. 1. Эпюры нормальных перемещений u_z , моментов M_u , M_{us} и поперечных сил Q_u , Q_s для углов $\varphi = 3^0$ (а) и $\varphi = 10^0$ (б).

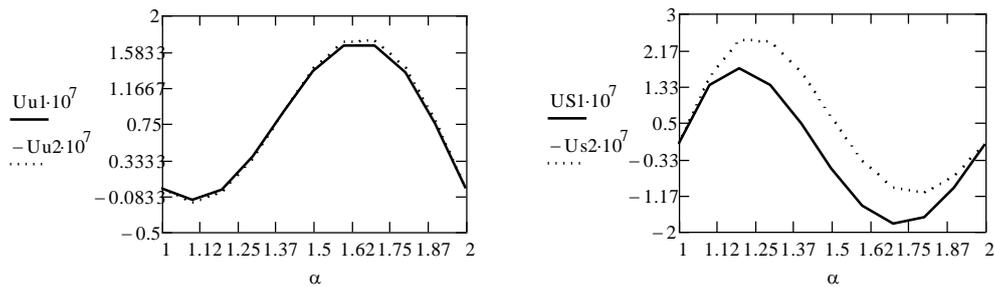


Рис. 2. Эпюры тангенциальных перемещений u_u, u_s для угла $\varphi = 3^\circ$

Л и т е р а т у р а

1. *Кривошапко С.Н.* Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек [Текст] / *Кривошапко С.Н.*: Монография. – М.: РУДН, 2009. – 357с.
2. *Рынкoвская М.И.* Изгибание и задачи расчета тонких упругих оболочек в форме прямого и развертывающегося геликоидов на распределенную нагрузку и осадку одной из криволинейных опор: Дисс. канд. техн. наук – М.: РУДН, 2013. – 217с.
3. *Butcher, J. C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Second Edition, J. Wiley, Chichester, 2008, 463p.
4. *M. El-Mikkawy*, A Generalized Symbolic Thomas Algorithm// Applied Mathematics, Vol. 3 No. 4, 2012, p. 342-345.
5. *Krivoshapko S.N.* Geometry and strength of general helicoidal shells// Applied Mechanics Reviews (USA). – Vol.52. – No 5. – May 1999. – P. 161-175.
6. *Krivoshapko S.N.* Stress-strain analysis of thin elastic open helicoidal shells// Shells in Architecture and Strength Analysis of Thin-Walled Civil- Engineering and Machine-Building Constructions of Complex Forms: Proc. Int. Conf., June 4-8, 2001, Moscow, Russia, Moscow: RPFU. 2001; p. 193-200 (10 ref.).

References

1. *Krivoshapko, SN.* (2009). Geometry of Ruled Surfaces with Cuspidal Edge and Linear Theory of Analysis of Developable Shells: Monograph, Moscow: RUDN, 357 p.
2. *Rynkovskaya, MI.* Bending and Problem of Analysis of Thin Elastic Shells in the Form of Right and Evolvent Helicoids subjected to Uniform Load and on Settlement of One of Curvilinear Supports: Diss. kand. tehn. nauk. Moscow: RUDN, 2013, 217p.
3. *Butcher, JC.* (2008). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Second Edition, J. Wiley, Chichester, 2008.
4. *M. El-Mikkawy* (2014). A generalized symbolic Thomas algorithm. Applied Mathematics, Vol. 3, No 4, p. 342-345.
5. *Krivoshapko, SN.* (1999). Geometry and strength of general helicoidal shells. Applied Mechanics Reviews (USA), Vol. 52, No 5, p. 161-175.
6. *Krivoshapko, SN.* (2001). Stress-strain analysis of thin elastic open helicoidal shells// Shells in Architecture and Strength Analysis of Thin-Walled Civil- Engineering and Machine-Building Constructions of Complex Forms: Proc. Int. Conf., June 4-8, 2001, Moscow: RUDN, p. 193-200.

APPLICATION OF RUNGE-KUTT METHOD AND RUNNING TRI-DIAGONAL MATRIX FOR OPEN HELICOIDAL SHELL CALCULATION

M.I. Rynkovskaya

Peoples Friendship University of Russia, Moscow

The example of the application of the method of Runge-Kutt and running tri-diagonal matrix for thin elastic open helicoidal shells calculations is presented. Comparison of results obtained by half-analytical and analytical methods is given.

KEY WORDS: open helicoidal shell, Runge-Kutt method, running tridiagonal matrix, half-analytical method of small parameter.