

## Расчеты на устойчивость

### КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*

О.Г. ИВАНОВ, *канд. техн. наук, доцент*

А.С. ИВАНОВА, *аспирант*

*Марийский государственный технический университет*

*424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; [sopr@marstu.net](mailto:sopr@marstu.net)*

В работе предлагается методика расчета на колебания и динамическую устойчивость стержней, имеющих нелинейную диаграмму деформирования материала. В качестве примера выполнен расчет стержня, который шарнирно закреплен по концам и подвергается действию динамической нагрузки. По результатам расчета построены графики зависимости стрелы прогиба стержня от параметра времени.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: физическая нелинейность, свободные колебания, динамическая устойчивость.

Новые материалы, обладающие нелинейной диаграммой деформирования, (композиты, сплавы, некоторые виды сталей) широко применяются в различных областях современной техники: строительстве, авиастроении, машиностроении и т.д. Поэтому исследования конструкций на колебания и динамическую устойчивость с учетом физической нелинейности материала являются актуальными.

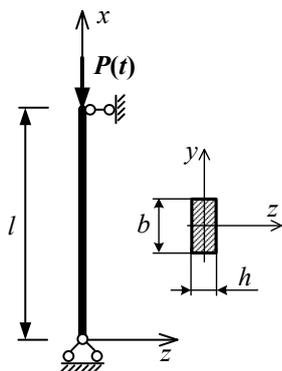


Рис. 1. Стержень под действием динамической нагрузки

В настоящей работе представлены методы расчета на динамическую устойчивость и колебания стержня из материала с нелинейной диаграммой деформирования. Рассматривается стержень (рис. 1), который шарнирно закреплен по концам и подвергается сжатию силой  $P$ , быстро изменяющейся во времени  $t$  по следующему закону

$$P(t) = k \cdot t \cdot A, \quad (1)$$

где  $k$  – величина, характеризующая скорость изменения сжимающего напряжения;  $t$  – время;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

В случае одноосного деформирования-сжатия стержня (рис. 1) зависимость между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  можно принять в виде кубического полинома

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - E_1 \varepsilon^3, \quad (2)$$

где  $E$  – начальный модуль упругости, а  $E_1$  – постоянная, учитывающая степень физической нелинейности материала (определяются экспериментально).

Поставленную задачу решаем энергетическим методом. Составляется выражение для полной энергии  $L$  системы:

$$L = \Pi + K, \quad (3)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия,  $K$  – кинетическая энергия.

Потеря устойчивости будет наблюдаться в сторону меньшего радиуса инерции

$$i = \sqrt{J_y / A}, \quad (4)$$

где  $J_y = bh^3 / 12$  – осевой момент инерции поперечного прямоугольного сечения стержня,  $A = b \cdot h$  – площадь поперечного сечения стержня.

Введем следующие обозначения:

$w(x, t)$  – прогиб стержня при потере устойчивости,

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad w_{xxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}; \quad w_{xxxx} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}; \quad w_t = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad w_{tt} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Запишем удельную энергию

$$\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \cdot d\varepsilon, \quad (5)$$

где деформация  $\varepsilon = -z \cdot w_{xx}$ .

Определим работу внутренних сил

$$U = \int_{-h/2}^{h/2} \Phi dz. \quad (6)$$

Потенциальная энергия  $\Pi$  состоит из работы внутренних, внешних  $P(t)$  и  $q$  сил ( $q$  – поперечная нагрузка, учитывающая начальное несовершенство системы)

$$\Pi = \int \left\langle \frac{1}{2} \left[ \left( EJ \cdot w_{xx}^2 - E_1 \frac{bh^5}{320} w_{xx}^4 \right) - P(t) w_x^2 \right] - q \cdot w \right\rangle dx. \quad (7)$$

Кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot A}{g} \int w_t^2 \cdot dx, \quad (8)$$

где  $\gamma$  – объемный вес материала,  $g$  – ускорение свободного падения.

Для определения экстремального значения полной энергии используем уравнение Лагранжа

$$-\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial w_{xx}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial w_x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial w_t} - \frac{\partial L}{\partial w} = 0. \quad (9)$$

Раскрывая уравнение (9), получим

$$EJ_y w_{xxxx} + P(t) \cdot w_{xx} + \frac{\gamma \cdot A}{g} w_{tt} = q + \frac{3}{80} E_1 bh^5 (2 \cdot w_{xx} w_{xxx}^2 + w_{xx}^2 w_{xxxx}). \quad (10)$$

Принимаем форму потери устойчивости стержня по синусоиде

$$w = f(t) \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (11)$$

где  $f(t)$  – функция стрелы прогиба, зависящая от времени  $t$ ,  $m$  – число полуволовн (для расчета было принято  $m=2$ ),  $l$  – длина стержня.

Подставляем (11) в (10) и делим все члены полученного уравнения на статическую эйлерову критическую силу  $P_{кр} = \pi^2 EJ_y / l^2$ . После ортогонализации получим следующее уравнение

$$\frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{l^2}{\pi^2 EJ_y} \frac{d^2 f}{dt^2} - m^2 \left( \frac{P(t)}{P_{кр}} - m^2 \right) \cdot f = \frac{9}{80} \frac{E_1}{E} \frac{h^2}{l^6} m^8 \pi^6 f^3 + Q, \quad (12)$$

где  $Q$  – некоторая малая величина поперечной нагрузки, учитывающая начальное несовершенство стержня.

Если принять  $P(t) = 0, Q = 0$ , то получим уравнение свободных поперечных колебаний стержня с учетом физической нелинейности материала

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{E \cdot g}{\gamma} \cdot \frac{\pi^2 \cdot J_y \cdot m^4}{A \cdot l^2} f = \frac{9}{80} \frac{E_1 \cdot \pi^8 m^8 J_y \cdot h^2 \cdot g}{\gamma \cdot l^8 \cdot A} f^3. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения:

$$t^* = \frac{P(t)}{P_{кр}} = \frac{k \cdot t \cdot A \cdot l^2}{\pi^2 E J_y}; \quad \zeta = \frac{f}{i}; \quad (14)$$

$$S^* = \left( \frac{P_{кр}}{E \cdot A} \right)^3 \cdot \left( \frac{\pi \cdot c \cdot E}{k \cdot l} \right)^2 = \frac{\pi^8 \cdot J_y^3 \cdot c^2 \cdot E^2}{k^2 \cdot A^3 \cdot l^8}.$$

где  $t^*$  – безразмерный параметр времени;  $\zeta$  – безразмерная величина стрелы прогиба;  $S^*$  – безразмерный параметр скорости изменения напряжения,

$$c = \sqrt{\frac{E \cdot g}{\gamma}} \text{ – скорость распространения деформации в материале, м/с.}$$

Используя новые обозначения (14) в уравнении (12), получим окончательно уравнение для исследования динамической устойчивости сжатого стержня

$$\frac{1}{S^*} \cdot \frac{d^2 \zeta}{dt^{*2}} - m^2 (t^* - m^2) \cdot \zeta = \frac{9}{80} \frac{E_1}{E} \frac{h^2}{l^4} m^8 \pi^4 \zeta^3 + Q. \quad (15)$$

Правая часть уравнения (14) учитывает физическую нелинейность материала.

Интегрирование дифференциального уравнения (15) выполнено численным методом Рунге-Кутты на ПЭВМ при следующих значениях параметров:

$$S^* = 0,1; Q = 0,016; h/l = 0,1; b = h; m = 2.$$

По результатам расчета построены графики зависимости стрелы прогиба  $\zeta$  от параметра времени  $t^* = P(t) / P_{кр}$  (рис. 2).

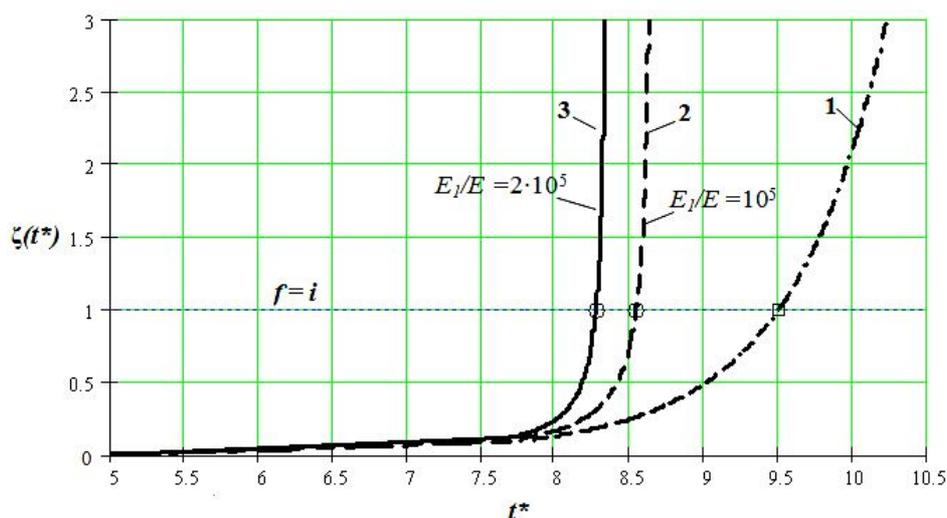


Рис. 2. Графики зависимости стрелы прогиба  $\zeta$  от параметра времени  $t^*$ :

- 1 – при линейной зависимости между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\epsilon$ ,
- 2 и 3 – с учетом физической нелинейности материала.

По результатам проведенных расчетов на динамическую устойчивость можно сделать следующие выводы:

1. Из графика 1 на рис. 2 видно, что увеличение прогибов ( $\zeta(t^*) \approx 0,01$ ) наблюдается при изгибе по двум полуволнам ( $m=2$ ) при силе  $P$ , превышающей эйлерову силу  $P_{кр}$  примерно в 5 раз (т.е.  $t^* = P / P_{кр} \approx 5$ ), а при  $t^* = P / P_{кр} \approx 9,50$  прогиб достигает величины, равной радиусу инерции ( $f = i$ ). Полученные результаты расчета совпадают с данными из [1].

2. При учете физической нелинейности материала кривая зависимости  $\zeta(t^*)$  смещается влево (графики 2 и 3).

Так при  $E_I/E = 10^5$  прогиб, равный радиусу инерции ( $f = i$ ), достигается, когда  $t^* = P / P_{кр} = 8,55$  (график 2 на рис. 2), а при  $E_I/E = 2 \cdot 10^5$ , когда  $t^* = P / P_{кр} = 8,28$  (график 3 на рис. 2).

3. Результаты расчета показывают, что если материал физически нелинейный, то бурное выпучивание стержня наступает раньше, чем в упругом стержне.

На основании уравнения (13) исследовались нелинейные свободные колебания стержня (рис. 3) при  $E_I/E = 10^5$ ,  $m = 1$ .

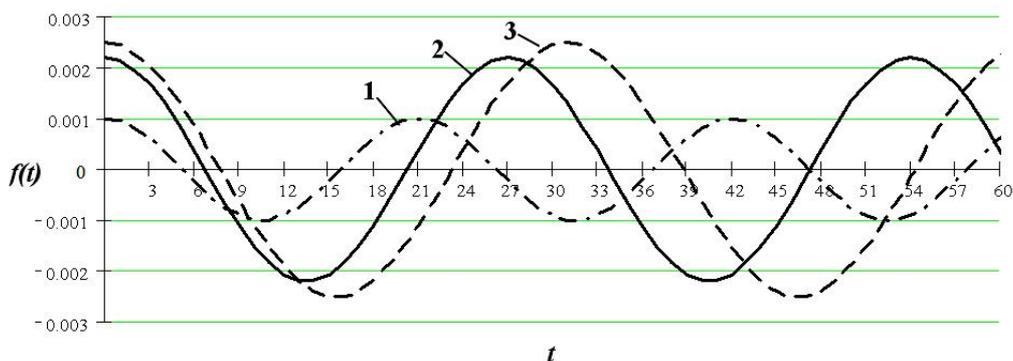


Рис. 3. График 1 – линейные колебания, графики 2 и 3 – нелинейные колебания.

Из графиков, построенных на рис. 3 видно, что с увеличением амплитуды свободных колебаний возрастает влияние физической нелинейности на период. Период увеличивается, что соответствует уменьшению частоты колебаний.

*Работа выполнена в рамках гранта РФФИ "№ 10-08-97017-р\_поволжье\_a.*

#### Л и т е р а т у р а

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем /А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967.– 432с.

### THE VIBRATIONS AND STABILITY OF BARS WITH PHYSICALLY NONLINEAR MATERIALS

S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

In the article, the methods of vibrations and dynamic stability analysis of bars having the nonlinear diagram deformation of material are suggested. The example of calculation of a bar with hinged supports of ends is given. The graphs of bar deflection as a function of time parameter are constructed.

KEY WORDS: physical nonlinear, free vibrations, dynamic stability.