

Расчеты на устойчивость

**УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ
ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ**

Е.А. ЛАРИОНОВ, *д-р техн. наук, профессор*
 Московский государственный строительный университет,
 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; vmat@mgsu.ru

В нелинейной постановке энергетическим методом оценивается продольная критическая сила, влекущая потерю устойчивости железобетонного стержня. При этом учитывается как диссипация его энергии сопротивления силовому нагружению и воздействию окружающей среды, так и податливость его нормальных сечений деформациям сжатия и сдвига.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *диссипация, критическая сила, бифуркация, жесткость.*

1. Оценка устойчивости элементов строительных конструкций приводит в частности к задаче определения продольной критической силы $N_k(t)$, при которой железобетонный стержень теряет прямолинейную форму равновесия. В базовом случае шарнирно-опертого стержня длины l , сжатого центральной силой N , критическая N_k сила согласно Эйлеру определяется формулой

$$N_k = (\pi/l)^2 D \quad (1)$$

При этом изгибная жёсткость D стержня полагается постоянной по длине l и инвариантной от силы N_k и трансформации прямолинейной формы равновесия в форму, задаваемую кривой $u(v) = f \sin \pi v/l$. Вследствие статистического распределения прочностей $\sigma_b^i(t)$ и $\sigma_s^i(t)$ бетонных и стальных волокон, объединением которых являются компоненты стержня, усилие $N_k(t)$ разрушает все волокна с прочностями $\sigma_b^i(t) \leq \sigma_k(t)$ и $\sigma_s^i(t) \leq \sigma_k(t)$, где $\sigma_k(t) = N_k(t)/A$; $A = A_b + A_s$; A_b и A_s - площади нормальных сечений компонент. Способная к сопротивлению (работоспособная) часть стержня обладает изгибной жёсткостью $D_p(t) < D(t)$. Однородность стержня вдоль длины влечёт независимость $D_p(t)$ от v .

В линейной постановке все волокна стержня предполагаются целыми в процессе сжатия стержня и трансформации прямолинейной формы равновесия в криволинейную форму, что равносильно отсутствию диссипации энергии по соотношению

$$W(t) = \Phi_u(t) = \Phi_u(t), \quad (2)$$

где $\Phi_u(t)$ - потенциальная энергия стержня, равная работе $W(t)$, затраченной на его сжатие; $\Phi_u(t)$ - потенциальная энергии изогнутого стержня.

На самом деле часть $W_g(t)$ работы $W(t)$ затрачивается на разрушение волокон и

$$W(t) = \Phi_u(t) + W_g(t), \quad (3)$$

Согласно (2) и (3) при оценке критической силы $N_k(t)$ за основу примем концепцию экvipотенциальности

$$\Phi_u(t) = \Phi_u(t), \quad (4)$$

равновесных форм стержня.

Поскольку диссипация энергии $\Phi_u(t)$ при бифуркации форм равновесия возможна лишь вследствие разрушения ещё некоторых целых к моменту t волокон, то концепция (4) означает сохранение работоспособной части стержня и, следовательно, его изгибной жёсткости $D_p(t) = J \cdot E_s(t, t_0)$ в результате этой бифуркации. Инвариантность величины $D_p(t)$ является ключевым моментом при оценке $N_k(t)$, ибо позволяет её определение и в нелинейной постановке как в классическом случае Эйлера рассмотрением частного решения $u(v) = f \sin \pi v/l$ дифференциального уравнения

$$D_p(t)u'' + N_k(t)u = 0, \quad (5)$$

влекущему оценку

$$N_k(t)u = (\pi/l)^2 D_p(t), \quad (6)$$

2. Итак, задача оценки $N_k(t)$ сводится к определению жёсткости $D_p(t)$ при центральном сжатии в момент t бифуркации равновесных состояний, и поскольку

$$D_p(t) = D_{pb}(t) + D_{ps}(t), \quad (7)$$

то найдём жёсткости компонент стержня относительно оси OX , проходящей через центр тяжести приведённого сечения.

При совместной работе относительные деформации компонент стержня равны и

$$\varepsilon_b(t, t_0) = \frac{\sigma_k(t)S_b^0(t)}{E_b(t, t_0)}, \quad \varepsilon_s(t, t_0) = \frac{\sigma_k(t)S_s^0(t)}{E_s(t, t_0)}, \quad (8)$$

$$E_b(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_b(t)} + C_b^*(t, t) - \int_{t_0}^t \frac{\sigma_b[\tau]}{\sigma_b(t)} \frac{\partial C_b^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]^{-1}, \quad (9)$$

$$E_s(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_s(t)} + C_s^*(t, t) - \int_{t_0}^t \frac{\sigma_s[\tau]}{\sigma_s(t)} \frac{\partial C_s^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]^{-1}, \quad (10)$$

где $E_b(t)$ и $E_s(t)$ - модули мгновенных упругих деформаций; $C_b^*(t, \tau)$ и $C_s^*(t, \tau)$ - меры простой ползучести в момент t при нагружении в момент τ ; $S_b^0(t) = A_b/A_b(t)$ и $S_s^0(t) = A_s/A_s(t)$ - функции нелинейности напряжений.

При $\sigma_b(\tau) = \sigma_s(\tau) = \sigma_k(t)$:

$$E_b(t, t_0) = \frac{E_b(t)}{1 + E_b(t)C_b^*(t, t_0)}, \quad E_s(t, t_0) = \frac{E_s(t)}{1 + E_s(t)C_s^*(t, t_0)}. \quad (11)$$

Величины $E_b(t, t_0)$ и $E_s(t, t_0)$ - временные линейные модули, а

$$E_{bc}(t, t_0) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} = E_b(t, t_0)\tilde{S}_b^0(t) \quad \text{и} \quad E_{sc}(t, t_0) = \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} = E_s(t, t_0)\tilde{S}_s^0(t)$$

- временные секущие модули компонент.

Обозначая J_b и J_s моменты инерции компонент относительно оси OX , получим

$$D_p(t) = J_b E_b(t, t_0)\tilde{S}_b^0(t) + J_s E_s(t, t_0)\tilde{S}_s^0(t) = D_b(t)\tilde{S}_b^0(t) + D_s(t)\tilde{S}_s^0(t) = D(t)\tilde{S}^0(t), \quad (12)$$

где
$$\tilde{S}^0(t) = \frac{D_b(t)\tilde{S}_b^0(t) + D_s(t)\tilde{S}_s^0(t)}{D_b(t) + D_s(t)}. \quad (13)$$

Согласно (6), (12) и (13):

$$N_k(t) = (\pi/l)^2 \tilde{S}^0(t) D(t). \quad (14)$$

В расчётах использованы функции

$$S_b^0(t) = 1 + V_b [\sigma_b(t) / R_b(t)]^{m_b}, \quad S_s^0(t) = 1 + V_s [\sigma_s(t) / R_s(t)]^m, \quad (15)$$

где V_b , σ_s , m_b и m_s - эмпирические параметры.

Критическая сила

$$N_k(t) = N_b(t) + N_s(t), \quad (16)$$

где $N_b(t) = N_k(t) A_b / (A_b + A_s), \quad N_s(t) = N_k(t) A_s / (A_b + A_s), \quad (17)$

Согласно (7), (15), (16) и (17) получим уравнение относительно $N_k(t)$:

$$N_k(t) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \left[\frac{J_b E_b(t, t)}{1 + V_b \left[\frac{N_k(t)}{(A_b + A_s) R_b(t)} \right]^{m_b}} + \frac{J_s E_s(t, t)}{1 + V_s \left[\frac{N_k(t)}{(A_b + A_s) R_s(t)} \right]^{m_s}} \right]. \quad (18)$$

Для бетона обычно полагают $m_b = 4$. При целых m_b и m_s решением соответствующего алгебраического уравнения одним из стандартных способов определяется величина $N_k(t)$.

4. В [1], [2] оценка (1) получена энергетическим методом, основанным на равенстве (4) потенциальных энергий в равновесных состояниях. В линейной постановке величина Φ_u равна работе силы $N_k(t)$ на её перемещении [1], [2]

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l [u'(v)]^2 dv, \quad u'(v) = \frac{du}{dv}, \quad (19)$$

а энергия изгиба

$$\Phi_u = \frac{D}{2} \int_0^l [u'(v)]^2 dv, \quad (20)$$

и равенство (4) при $u(v) = f \sin \pi v / l$ влечёт оценку (1).

Если, следуя подходу [1], [2], полагать, что энергия $\Phi_u(t)$ равна работе приложенной к работоспособной вплоть до момента t части (I) стержня силы $N_k(t)$ на перемещении Δl , то соотношение

$$N_k(t) \int_0^l [u'(v)]^2 dv = \frac{1}{2} D_p(t) \int_0^l [u''(v)]^2 dv, \quad (21)$$

также приводит к оценке (6).

5. В работе [3] оценка $N_k(t)$ получена модификацией энергетического подхода из [1].

При этом величина $\Phi_u(t)$ определяется как работа силы $N_k(t)$ на обратимой части

$$\Delta l_{об}(t) = K_{об}(t) \Delta l(t), \quad (22)$$

перемещения $\Delta l(t)$, где $K_{об}(t)$ - коэффициент обратимости деформаций.

Приложенная мгновенно в статическом смысле сила $N_k(t)$ порождает напряжение $\sigma_k(t) = N_k(t) / A$ и в единице объёма стержня совершает работу:

$$W_1(t) = \sigma_k(t) \varepsilon(t), \quad (23)$$

равную площади прямоугольника $OABb$ (рис. 1)

Удельная потенциальная энергия равна площади прямоугольника $OACc$:

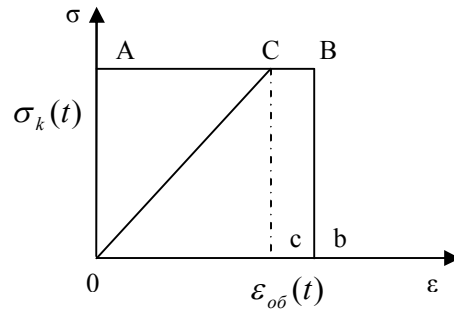


Рис. 1. Удельная работа и потенциальная энергия

$$\Phi_{1y}(t) = \sigma_k(t)\varepsilon_{ob}(t) = \sigma_k(t)K_{ob}\varepsilon(t) = \frac{N_k(t)}{A} \cdot K_{ob}(t) \frac{\Delta l(t)}{l} \quad (24)$$

и согласно (24):

$$\Phi_y(t) = A l \Phi_{1y}(t) = N_k(t) K_{ob} \Delta l(t). \quad (25)$$

Поскольку энергия изогнутого стержня

$$\Phi_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_k(t) u^2(v) dv}{D(t)}, \quad (26)$$

то в силу (4) с учётом (19) и $u(v) = \sin \pi v / l$ получена [3] оценка:

$$N_k(t) = K_{ob} (\pi / l)^2 D(t), \quad (25)$$

6. Для бетона и стали с завершёнными физико-химическими процессами становления коэффициенты $K_{ob}(t)$ и $K_{os}(t)$ обратимости их относительных деформаций совпадают соответственно с величинами $\tilde{S}_b^0(t)$ и $\tilde{S}_s^0(t)$, а потому коэффициент $K_{ob}(t)$ обратимости относительной деформации $\varepsilon(t) = \Delta l(t) / l(t)$ совпадает с величиной $\tilde{S}^0(t)$.

Таким образом, с учётом (14) оценки (6) и (27) идентичны.

7. В работе [3] нахождение $\Phi_y(t)$ связывается с удельной работой $W_2(t)$ при разгрузении, равной площади треугольника OAc (рис. 1)

$$W_2(t) = \sigma_k(t)\varepsilon_{ob}(t) / 2. \quad (28)$$

Соответствующая $W_2(t)$ потенциальная энергия

$$\Phi_{yp}(t) = A l W_2(t) = \Phi_y(t) / 2 \quad (29)$$

и равная $\Phi_y(t)$ работа на перемещении $\Delta l_{ob}(t)$ реализуется силой $\tilde{N}_k(t) = 2N_k(t)$. Это означает, что величина продольной силы, влекущей потерю устойчивости прямолинейной формы стержня зависит от способа его нагружения.

Следует заметить, что при бифуркации форм равновесия разгрузение не происходит и они соответствуют двум возможным видам напряжённо-деформированного состояния, порождаемых усилием $N_k(t)$.

8. Наряду с диссипацией энергии при силовом деформировании и коррозионные повреждения компонент стержня снижают значение критической силы.

Согласно концепции эквипотенциальности (4) имеет место оценка

$$N_k^*(t) = (\pi / l)^2 D_p^*(t). \quad (30)$$

В (30) в соответствующих величинах учтены и коррозионные повреждения. Инвариантность жёсткости $D_p^*(t)$ при бифуркации равновесных форм, вытекающая из равенства (4), значительно облегчает её нахождение. Приведём

оценки величин $D_p^*(t)$ и $N_k^*(t)$ для стержней с круглыми и прямоугольными нормальными сечениями (рис. 2).

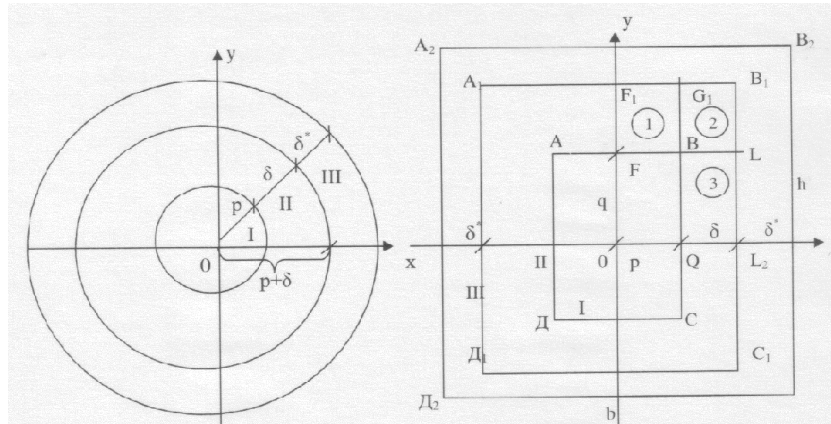


Рис. 2. Схема послойных коррозионных повреждений

Кольцо III и часть III прямоугольника $A_2B_2C_2D_2$ вне прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ – сечения полностью повреждённых зон толщины δ^* :

Кольцо II и часть II прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ вне прямоугольника ABCD – сечения частично повреждённых зон толщины δ . Круг I и прямоугольник ABCD (часть I) – сечения неповреждённых коррозией зон стержней.

Полностью повреждённые зоны стержней не оказывают силового сопротивления и их жёсткости равны нулю.

Изгибные жёсткости неповреждённых зон компонент стержней определяются формулами:

$$D_{pb}^{(I)}(t) = J_{pb} \cdot E_{cb}(t, t_0), \quad (31)$$

$$D_{ps}^{(I)}(t) = J_{ps} \cdot E_{cs}(t, t_0), \quad (32)$$

где J_{pb} и J_{ps} – моменты инерции компонент относительно осей OX и OY ; $E_{cb}(t, t_0) = E_s(t, t_0) / S_s(t)$ – секущие модули компонент; $E_b(t, t_0)$ и $E_s(t, t_0)$ – временные линейные модули бетона и стали; $S_b(t)$ и $S_s(t)$ – функции нелинейности напряжений бетона и стали.

Полярный момент инерции круга с диаметром $d = 2p$ равен $J_{ob} = \pi p^4 / 2$ и $J_{bx} = J_{by} = \pi p^4 / 4$, а для прямоугольника ABCD $J_{bx} = 4pq^3 / 3$ и $J_{by} = 4qp^3 / 3$.

Моменты инерции арматуры относительно центральных осей OX и OY

$$\alpha_{sx} = \sum_{i=1}^n A_{si} y_i^2, \quad J_{sy} = \sum_{i=1}^n A_{si} x_i^2, \quad (33)$$

где A_{si} – площадь нормального сечения i -ой её части.

Согласно (31) – (33) изгибные жёсткости неповреждённых зон относительно осей OX и OY :

$$D_{p1}^{(I)}(t)_x = \pi p^4 E_{cb}(t, t_0) / 4 + E_{cs}(t, t_0) \sum_i A_{si} Y_i^2, \quad (34)$$

$$D_{p2}^{(I)}(t)_x = 4pq^3 E_{cb}(t, t_0) / 3 + E_{cs}(t, t_0) \sum_i A_{si} Y_i^2, \quad (35)$$

$$D_{p1}^{(I)}(t)_y = \pi p^4 E_{cb}(t, t_0) / 4 + E_{cs}(t, t_0) \sum_i A_{si} X_i^2, \quad (36)$$

$$D_{p2}^{(I)}(t)_y = 4qp^3 E_{cb}(t, t_0) / 3 + E_{cs}(t, t_0) \sum_i A_{si} X_i^2. \quad (37)$$

Функция повреждений $K^*(\zeta, t)$ бетона описывает изменение интенсивности коррозии в переходной зоне II и вводится как множитель в соотношении

$$E_b^*(\zeta, t) = K^*(\zeta, t)E_b(t), \quad (38)$$

где $E_b(t)$ - модуль мгновенных упругих деформаций, а $\zeta = \rho$ или $\zeta = x$ или $\zeta = y$.

Поскольку $E_b^*(p + \delta, t) = E_b^*(q + \delta, t) = 0$, а $E_b^*(p, t) = E_b(t)$ и $E_b^*(q, t) = E_b(t)$, то

$$K^*(\rho + \delta) = 0, \quad K^*(\rho) = K^*(q) = 1, \quad (39)$$

а вследствие

$$\left. \frac{dE_b^*(\zeta, t)}{d\zeta} \right|_{\zeta=p} = \left. \frac{dE_b^*(\zeta, t)}{d\zeta} \right|_{\zeta=q} = 0,$$

$$\left. \frac{d^*K(\zeta, t)}{d\zeta} \right|_{\zeta=p} = \left. \frac{d^*K(\zeta, t)}{d\zeta} \right|_{\zeta=q} = 0. \quad (40)$$

Аппроксимируя $K^*(\zeta, t)$ многочленом второй степени по ζ и, используя для нахождения его коэффициентов условия (39) и (40), получим

$$K^*(\rho, t) = 1 - \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^2 + \frac{2\rho}{\delta^2}\rho - \frac{\rho^2}{\delta^2}, \quad (41)$$

$$K^*(x, t) = 1 - \left(\frac{p}{\delta}\right)^2 + \frac{2px}{\delta^2} - \frac{x^2}{\delta^2}, \quad (42)$$

$$K^*(y, t) = 1 - \left(\frac{q}{\delta}\right)^2 + \frac{2qy}{\delta^2} - \frac{y^2}{\delta^2}. \quad (43)$$

Величины $\phi_b(t) = E_b(t)C_b(t, t_0)$ и $\phi_s(t) = E_s(t)C_s(t, t_0)$, где $C_b(t, t_0)$ и $C_s(t, t_0)$

□ меры ползучести компонент в момент t при нагружении в момент t_0 , являются параметрами силового деформирования и инвариантны от коррозионных повреждений, а потому

$$C_b^*(t, t_0) = C_b(t, t_0) / K^*(t), \quad C_s^*(t, t_0) = C_s(t, t_0) / K_s^*(\zeta, t). \quad (44)$$

В силу (38) и (44) для временного модуля полных деформаций бетона в переходной зоне получим:

$$E_0^*(\zeta, t, t_0) = K^*(\zeta, t)E_b(t, t_0). \quad (45)$$

Для стали при $\zeta = x_i$ или $\zeta = y_i$ полагаем

$$K^*(x_i, t) = \omega_{s,i}(t), \quad K^*(y_i, t) = \omega_{s,i}(y_i), \quad (46)$$

где $\omega_{s,i}$ - коэффициент коррозионного снижения расчётной площади арматуры.

Поскольку прочности всех бетонных и стальных волокон на уровне ζ ослабляются в равной мере, то функции $S_b^0(t)$ и $S_s^0(t)$ инвариантны от коррозионных повреждений.

Изгибная жёсткость кольца II относительно осей OX и OY

$$D_{p1}^{(II)}(t) = \frac{\pi E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \int_{\rho}^{\rho+\delta} K^*(\rho, t) \rho^3 d\rho + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_k \omega_{sk} A_{sk} \zeta_k^2, \quad (47)$$

а всего сечения

$$D_{p1}(t) = \frac{\pi E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \left[\frac{p^4}{4} + \int_{\rho}^{\rho+\delta} K^*(\rho, t) \rho^3 d\rho \right] + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \left[\sum_i A_{si} \zeta_i^2 + \sum_k \omega_{sk} A_{sk} \zeta_k^2 \right], \quad (48)$$

где $\zeta_i = Y_i$; $\zeta_k = Y_k$ или $\zeta_i = X_i$; $\zeta_k = X_k$.

Для определения изгибной жёсткости переходной зоны II прямоугольного сечения относительно осей OX и OY необходимо найти величины D_1 , D_2 и D_3 для прямоугольников FF_1G_1B ; $BG_1V_1L_1$; BL_1L_2Q , обозначенных на рис.1 как (1), (2) и (3). С учётом (45) и (46) получим:

$$D_{1x}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} p \int_q^{q+\delta} K^*(y, t) y^2 dy + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_e \omega_{se} A_{se} Y_e^2, \quad (49)$$

$$D_{1y}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \delta \int_0^{\rho} \left(\int_q^{q+\delta} K^*(y, t) dy \right) x^2 dx + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i \omega_{si} A_{si} X_i^2, \quad (50)$$

$$D_{2y}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \delta \int_{\rho}^{\rho+\delta} \left(\int_q^{q+\delta} K^*(y, t) dy \right) K^*(x, t) x^2 dx + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i \omega_{se} A_{se} X_e^2, \quad (51)$$

$$D_{2x}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \delta \int_q^{q+\delta} \left(\int_{\rho}^{\rho+\delta} K^*(x, t) dx \right) K^*(y, t) y^2 dy + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i \omega_{si} A_{si} Y_i^2, \quad (52)$$

$$D_{3x}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} \delta \int_0^{\rho} \left(\int_{\rho}^{\rho+\delta} K^*(x, t) dx \right) y^2 dy + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i \omega_{si} A_{si} Y_i^2, \quad (53)$$

$$D_{3y}^*(t) = \frac{E_b(t, t_0)}{S_b^0(t)} q \int_{\rho}^{\rho+\delta} K^*(x, t) x^2 dx + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i \omega_{si} A_{si} X_i^2. \quad (54)$$

Складывая соответствующие величины, находим:

$$D_{p2}^*(t)_x = \frac{4E_b(t, t_0)}{3S_b^0(t)} pq^3 + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i A_{si} Y_i^2 + 4(D_{1x} + D_{2x} + D_{3x}), \quad (55)$$

$$D_{p2}^*(t)_y = \frac{4E_b(t, t_0)}{3S_b^0(t)} qp^3 + \frac{E_s(t, t_0)}{S_s^0(t)} \sum_i A_{si} X_i^2 + 4(D_{1y} + D_{2y} + D_{3y}). \quad (56)$$

При $b < h$ очевидно $D_{p2}^*(t)_y < D_{p2}^*(t)_x$ и критической будет сила

$$N_k(t) = \pi^2 / l^2 D_{p2}^*(t)_y.$$

Величины $E_{bc}(t, t_0) = E_b(t, t_0) / S_b^0(t)$ и $E_{sc}(t, t_0) = E_s(t, t_0) / S_s^0(t)$ и, следовательно, жёсткость $D_p^*(t)$ зависят от искомой силы $N_k(t)$ и относительно неё получается уравнение $N_k(t) = f[N_k(t)]$, решением которого и находится оценка критической силы. В расчётах приемлемы функции

$$S_b^0(t) = 1 + V_b [\sigma(t) / R_b(t)]^{m_b}, \quad S_s^0(t) = 1 + V_s [\sigma(t) / R_s(t)]^{m_s}, \quad (57)$$

где V_b , V_s , m_b и m_s - эмпирические параметры (для бетона обычно полагают $m_b = 4$). В уравнении (57) $\sigma(t) = N_k(t) / (A_b + A_s)$, где A_b и A_s - площади нормальных сечений компонент. Оценка $N_k(t)$ проще в случае кратковременного нагружения, когда $E_{bc}(t, t) = E_b(t) / (1 + E_b(t)C_b(t, t))$ и допустимо полагать $S_b^0(t) = 1$ и $E_{sc}(t) = E_s(t)$.

Замечание 1. Согласно Эйлеру смена положений равновесия одноосно сжатого стержня реализуется при соотношении

$$N(t) / D(t) = \pi^2 / l^2, \quad (58)$$

и при этом полагается независимость величины $D(t)$ от t и силы $N(t)$.

Жёсткость $D_p(t)$ нормального сечения железобетонного стержня определяется моментом инерции $J_p(t)$ её работоспособной части $A_p(t)$ и упруго-

пластическими модулями $E_b(t, t_0)$ и $E_s(t, t_0)$. Величина $I_p(t)$ вычисляется по геометрии сечения и заданным функциям нелинейности напряжений $S_b^0(t)$ и $S_s^0(t)$, а в соотношении

$$D_p(t) = \tilde{S}_0(t) D(t), \quad (59)$$

множитель $\tilde{S}_0(t)$, определяемый равенством (13), выражает статистическое распределение прочностей составляющих стержень звеньев и ползучесть его компонент. Зависимость $D_p(t)$ от $N(t)$, задаваемая (59), порождает уравнение относительно искомой величины критической силы, и следует отметить, что предлагаемый способ оценки величины $N(t)$ проще применения энергетического метода для её оценки.

Замечание 2. Приведённым выше способом получается и оценка продольной силы $N(t_0)$, приложенной к стержню в момент t_0 и обеспечивающей его длительную устойчивость. Для её определения (из соответствующего уравнения) в функциях $S_b^0(t)$ и $S_s^0(t)$ полагаем $\sigma_b(t) = N_b(t_0) / A_b$ и $\sigma_s(t) = N_s(t_0) / A_s$, а $E_b(t, t_0) = E_b / (1 + E_b C_b)$ и $E_s(t, t_0) = E_s / (1 + E_s C_s)$.

Здесь $N_b(t_0)$ и $N_s(t_0)$ части усилия $N(t_0)$ на площадях A_b и A_s ; E_b и C_b (E_s и C_s) - предельные значения соответствующих величин при $t \rightarrow \infty$.

Замечание 3. Сопоставляя силе $N(t)$ возможные равновесные положения стержня определяются отвечающие и потенциальные энергии Φ_u и Φ_u . Из условия $\Phi_u = \Phi_u$ снова получается уравнение относительно $N(t)$.

При этом определение Φ_u , связанное с вычислением жёсткости $D(v, t)$ нормальных сечений изогнутого стержня, приводит равенство $\Phi_u = \Phi_u$ к достаточно сложному уравнению для искомой силы $N(t)$.

В приложениях важно оценить реально действующую на стержень силу $N(t)$, влекущую в результате сжатия его бифуркацию и в этом аспекте предпочтителен способ, основанный на вычислении жёсткости $D_p(t)$.

9. Эйлера критическая сила $N_s(t) = \pi^2 / l^2 D(t)$ и приведённые выше оценки неявно предполагают отсутствие податливостей стержня на сжатие и сдвиг и для учёта их влияния на величину $N_k(t)$ мы применим энергетический метод, предложенный в [1], [2] для нахождения $N_s(t)$.

Сначала рассмотрим линейную постановку задачи и начнём с эффекта сжатия стержня. Вследствие уменьшения l на величину $\Delta \tilde{l}_1(t) = N_k(t) / E(t, t_0) A$ изогнутому стержню длины $\Delta \tilde{l}_1(t) = [1 - N_k(t) / D_1(t, t_0)] l$ отвечает его перемещение $\Delta \tilde{l}_1(t) = [1 - N_k(t) / D_1(t, t_0)] \Delta l(t)$. Здесь перемещение $\Delta l(t)$ - перемещение стержня при $1 / D_1(t, t_0) = 0$ и $1 / D_2(t, t_0) = 0$, а $D_1(t, t_0)$ и $D_2(t, t_0)$ - его жёсткости на сжатие и сдвиг.

Согласно энергетическому балансу

$$N_k(t) [1 - N_k(t) / D_1(t, t_0)] \Delta l(t) = N_s(t) \Delta l(t) \quad (60)$$

получим квадратное уравнение и меньший его корень

$$N_{k,1}(t) = \left[D_1(t, t_0) - \sqrt{D_1^2(t, t_0) - 4 N_s(t) D_1(t, t_0)} \right] / 2 \quad (61)$$

представляет критическую силу в рассматриваемом случае. Из (61) явствует, что $N_{k,1}(t) > N_s(t)$ и это соотношение следовало ожидать в физическом аспекте.

В процессе бифуркации стержня возникают сдвиги его нормальных сечений, порождающие уменьшение его проекции на ось OX и, следовательно, увеличение $\Delta l(t)$. В результате учёта этих сдвигов получим приращение $\Delta l(t)$ на

величину $\tilde{\Delta l}_2(t) = \frac{N_k(t)\Delta l(t)}{D_2(t, t_0)}$, а при $1/D_1(t, t_0) = 0$ соотношение

$$N_k(t)[1 + N_k(t)/D_2(t, t_0)]\Delta l(t) = N_s(t)\Delta l(t), \quad (62)$$

согласно которому

$$N_{k,2}(t) = \frac{D_2(t, t_0)}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4N_s(t)}{D_2(t, t_0)}} - 1 \right]. \quad (63)$$

При учёте податливостей $L_1(t, t_0) = 1/D_1(t, t_0)$ и $L_2(t, t_0) = 1/D_2(t, t_0)$ на сжатие и сдвиг из соотношения энергетического баланса

$$N_k(t) \left\{ 1 + N_k(t) \left[\frac{1}{D_2(t, t_0)} - \frac{1}{D_1(t_0)} \right] \right\} \Delta l(t) = N_s(t)\Delta l(t) \quad (64)$$

находим критическую силу

$$N_k(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\sqrt{1 + 4N_s(t) \left[\frac{1}{D_2(t, t_0)} - \frac{1}{D_1(t, t_0)} \right]} - 1 \right] \left[\frac{1}{D_2(t, t_0)} - \frac{1}{D_1(t, t_0)} \right] \right\}^{-1}. \quad (65)$$

Замечание 4. Формулы вида (63) и (65) на основе соответствующих уравнений в вариация получены в [4]; [5]. Приведённый выше энергетический подход их вывода нагляднее и значительно проще. Как отмечено в [5] известная [6], [9] формула Энтессера

$$N_k(t) = N_s / (1 + N_s / D_2) \quad (66)$$

не является корректной. В самом деле, согласно нашему подходу она эквивалента невозможному энергетическому балансу

$$N_k(1 + N_s / D_2)\Delta l = N_s \cdot \Delta l. \quad (67)$$

10. Оценка величины $N_k(t)$ связана с неизбежной диссипацией энергии сопротивления стержня и воздействием окружающей среды, влекущими деградацию его жёсткостей. Существенно, что статистическое распределение величины $R_i(t)$ наряду с нелинейной зависимостью деформаций и напряжений порождает зависимость этих параметров от $N_k(t)$. Выражениями $D_{i,\rho}(t, t_0) = D_i(t, t_0)\tilde{S}(t)$; $i = 1, 2, 3$ определяются их значения в момент $\tau = t$ при нагружении $N_k(t_0)$, где $\tilde{S}^0(t) = 1/S^0(t)$, а $S^0(t)$ - известная функция нелинейности напряжений. Задавая в функциях $S_b^0(t)$ и $S_s^0(t)$ уровни напряжений $\sigma_b(t_0) = N_{sb}(t_0)/A_b R_b(t)$ и $\sigma_s(t_0) = N_{ss}(t_0)/A_s R_s(t)$, получим уравнения

$$N_{sb}(t_0) = (\pi^2 / l^2) D_{3b}(t, t_0) / S_b^0(t), \quad N_{ss}(t_0) = (\pi^2 / l^2) D_{3s}(t, t_0) / S_s^0(t), \quad (68)$$

из которых определяем $N_s(t_0) = N_{sb}(t_0) + N_{ss}(t_0)$; $D_{3\rho}(t, t_0) = D_{3\rho b}(t, t_0) + D_{3\rho s}(t, t_0)$ и значение $S^0(t)$, отвечающее $N_s(t_0) = (\pi^2 / l^2) D_{3\rho}(t, t_0)$. Подставив найденные жёсткости в (65), получим критическую силу:

$$\tilde{N}_k(t) = \tilde{S}^0(t) N_k(t) \quad (69)$$

влекущую потерю устойчивости в момент $\tau = t$ при нагружении $N_k(t_0)$.

Для учёта коррозионных воздействий при заданных функциях повреждений бетона и стали и геометрии нормальных сечений находим жёсткости $D_{ip}^*(t, t_0)$ и, согласно (65) получим:

$$\tilde{N}_k^*(t) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 4N_s^*(t_0) \left[\frac{1}{D_{2\rho}^*(t, t_0)} - \frac{1}{D_{1\rho}^*(t, t_0)} \right]} - 1 \right\} \left[\frac{1}{D_{2\rho}^*(t, t_0)} - \frac{1}{D_{1\rho}^*(t, t_0)} \right]^{-1} \quad (70)$$

В заключение приведём некоторые выводы.

1. Формула (70) учитывает все существенные факторы, влияющие на величину продольной критической силы.

2. Равенством (70) при $t \cong \infty$ определяется длительная критическая сила, обеспечивающая при условии $N(\tau) < \tilde{N}_k(t)$ длительную устойчивость железобетонного стержня.

3. Основой наших построений являются концепция статистического распределения прочностей звеньев, в совокупности составляющих конструктивный элемент и концепция эквипотенциальности форм равновесия.

4. Трансформация прямолинейной формы равновесия сопровождается разрушением части целых к моменту бифуркации звеньев стержня, влекущем соотношением $\Phi_u(t) < \Phi_u(t)$. Поскольку устойчивому состоянию отвечает минимально возможное значение потенциальной энергии, то при силе $\tilde{N}_k(t)$ реализуется потеря устойчивости железобетонного стержня.

Литература

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Бондаренко В.М. Учёт энергетической и коррозионной диссипации силового сопротивления при оценке устойчивости строительных конструкций// Строительная механика и расчёт сооружений. – № 2. – 2011. – С. 51-57.
4. Лалин В.В., Кушова Д.А. Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб// International Journal for Computational Civil Structural Engineering. – 2013. – Volume 9. – Issue 4. – С. 178 – 185.
5. Лалин В.В., Кушова Д.А. Решение задачи устойчивости сжатого стержня динамическим методом с учетом жесткостей на сдвиг и растяжение // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2014. – № 5. – С. 49 – 54.
6. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1. – М.: Изд-во СКАДСАФТ, 2010. – 704 с.
7. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение. 1978. – 312 с.
8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
9. Bigoni D. Nonlinear solid mechanics: bifurcation theory and material instability. – Cambridge University Press, 2012. – 550 с.

References

1. Timoshenko, S.P. (1971). *Ustoychivost' Sterzhney, Plastin i Obolochek*. M.: Nauka, 807 p.
2. Feodos'ev, V.I. (1979). *Soprotivlenie Materialov*. Moscow: Nauka, 560 p.
3. Bondarenko, V.M. (2011). Uchet energeticheskoy i korrozionnoy dissipatsii silovogo soprotivleniya pri otsenke ustoychivosti stroitel'nykh konstruksiy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, Moscow, № 2, p. 51-57.
4. Lalin, V.V., Kushova, D.A. (2013). Geometrical nonlinear deforming and stability of plane elastic bars with taking into account rigidities for tensile and compress, shearing and, *International Journal for Computational Civil Structural Engineering*, Vol. 9, Iss. 4, p. 178 – 185.
5. Lalin, V.V., Kushova, D.A. (2014). Reshenie zadachi ustoychivosti szhatogo sterzhnya dinamicheskim metodom s uchedom zhestkostey na sdvig i rastyazhenie. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, № 5, p. 49 – 54.
6. Perel'muter, A.V., Slivker, V.I. (2010). *Ustoychivost' Ravnovesiya Konstruksiy i Rodstvennye Problemy*. Vol.1, Moscow: Izd-vo SKADSAFT, 704 p.
7. Alfutov, N.A. (1978). *Osnovy Rascheta na Ustoychivost' Uprugikh Sistem*. Moscow: Mashinostroenie, 312 p.
8. Vol'mir, A.S. (1967). *Ustoychivost' Deformiruemykh Sistem*, Moscow: Nauka, 984 p.
9. Bigoni, D. (2012). *Nonlinear Solid Mechanics: Bifurcation Theory and Material Instability*. Cambridge University Press, 550 p.

**TAKING INTO ACCOUNT THE ENERGY DISSIPATION
FOR COMPRESSED ROD STABILITY**

Larionov E. A.

Moscow State University of Civil Engineering

Generating the loss of stability of reinforced concrete rod the longitudinal critical force is estimated by the energy method in the nonlinear formulation. The energy dissipation of the loading resistance force, the influence of the environment, compliance normal sections to the compressional and shear deformations are taken into account.

KEY WORDS: dissipation, the critical force, bifurcation, stiffness.

