ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.А. ЛАРИОНОВ, *д-р техн. наук, проф.*
В.И. РИМШИН, *член-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф.*
Н.Т. ВАСИЛЬКОВА, *аспирант*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московская государственная академия коммунального хозяйства и строительства»,
109029, Москва, Ср. Калитниковская ул., д. 30

В работе для оценки ресурса устойчивости сжатых продольной силой железобетонных элементов используется энергетический метод.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: устойчивость, жёсткость, критическая сила

Известно, что сжатый осевой силой $P(t)$ стержень теряет устойчивость прямолинейной формы при

$$P(t) = P_{кр}(t)\,, \tag{1}$$

где величина $P_{кр}(t)$ критической силы существенно зависит от его изгибной жёсткости $Д(t)$.

В случае центральной силы согласно Эйлеру

$$P_{кр}(t) = \left(\frac{\pi}{l_0 \mu_k}\right)^2 Д(t)\,, \tag{2}$$

В формуле (2) l_0 – длина стержня при $P(t) = 0$; μ_k отражает влияние краевых условий и для шарнирно энертого стержня $\mu_k = 1$. В классической постановке полагается инвариантность жёсткости по продольной координате и отсутствие эксцентриситета l_0 приложения силы $P(t)$.

Зависимость жёсткости $Д(v,t)$ нормальных сечений $\sum_v$ стержня от их напряжённо деформированного состояния, от коррозионных повреждений бетона и арматуры, а также от величины l_0, учитываемая в нелинейной постановке, приводит к значительному уменьшению резерва устойчивости железобетонного стержня.

Поскольку жёсткость $Д(v,t)$ максимальна при $P(t)=0$ и $M(v,t)=0$ (изгибающего момента внутренних сил в сечении Σ_v), а минимальна когда $P(t)=P_{пр}(t)$ и $M(v,t)=M_{пр}(v,t)$, то в качестве критической жёсткости, отвечающей $P_{кр}(t)$, принимается величина

$$Д_{кр}(v,t)=Д_0(t)\left\{1-\alpha(t)\left[\frac{P_{кр}(t)}{P_{пр}(t)}+\frac{M(v,t)}{M_{пр}(v,t)}\right]\right\} \quad . \tag{3}$$

В равенстве (3)

$$\alpha(t)=1-\frac{Д_{пр}(t)}{Д_0(t)}, \tag{4}$$

где $Д_0(t)$ – максимальная жёсткость сечения, а $Д_{пр}(t)$ её жёсткость, отвечающая предельному изгибающему моменту $M_{пр}(t)$ при $P(t)=0$; $P_{пр}(t)=\left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 Д_0(t)$ – эйлерова сила $P_э(t)$ при $M(t)=0$.

В работе [1] оценка $P_{кр}(t)$ получена на основе принципа возможных перемещений в модификации Бубнова-Галеркина, приводящему к уравнению

$$\int_0^{l_0} -Д(v,t)f^*\left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 \sin\frac{\pi v}{l_0}+P^*(t)\left[l_0+f^*\sin\frac{\pi v}{l_0}\right]\sin\frac{\pi}{l_0}v\,dv=0 \quad (5)$$

Наличие $e_0\neq 0$ приводит к зависимости искомой критической силы от амплитуды f^* прогиба

$$u^*=f^*\sin\frac{\pi}{l_0}v,$$

позволяющей определить $f^*_{кр}$ и $P^*_{кр}(t)$. Звёздочкой отмечены рассматриваемые величины при коррозионных повреждениях.

В процессе решения многих прикладных задач при поиске оценок соответствующих величин более простым оказывается энергетический метод. В качестве примера успешного применения этого метода отметим способ Рэлея оценки величины основной частоты колебаний

$$\omega^2(t)=\frac{W_n(t)}{W_k(t)}, \tag{6}$$

где $W_n(t)$ и $W_k(t)$ максимальные значения потенциальной и кинетической энергии.

В данной работе предлагается энергетический способ оценки величины $P_{кр}(t)$ с учётом коррозионных повреждений. Его физическая сущность в рассматриваемом вопросе заключается в том, что энергия $W_u(t)$ изогнутой балки рассматривается как результат работы $A(t)$ критической силы $P_{кр}(t)$ на её перемещении S при изгибе [2]

$$W_u(t) = A(t)\,. \tag{7}$$

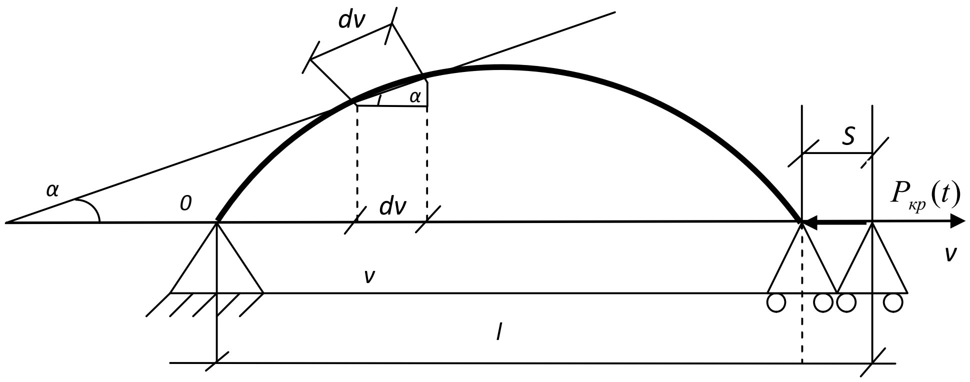

Рис. 1. Интерпретация к вычислению перемещения S при $e_0 = 0$

Величина S является разностью между длиной l и проекцией изогнутой линии на ось $0v$

$$S = \int_0^l ds\,, \tag{8}$$

где $ds = dv - dv\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)dv$.

Поскольку при малых α имеем $\alpha \approx u^{/}$, то $ds \approx \left(\frac{u^{/}}{2}\right)^2 dv$ и $s = \frac{1}{2}\int_0^l \left(u^{/}\right)^2 dv$,

а потому

$$A(t) = \frac{1}{2}P_{кр}(t)\int_0^l \left(u^{/}\right)^2 dv \tag{9}$$

и с учётом, что $u(t) = f\sin\frac{\pi}{l}v$, имеем

$$A(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 P_к(t) f^2 \int_0^l \cos^2\frac{\pi}{l}v dv = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 P_к(t) f^2(t) l\,. \tag{10}$$

Энергия изогнутой балки

$$W_u(t) = \frac{1}{2}\int_0^l Д(t)\chi^2(t)dv\,, \tag{11}$$

где кривизна $\chi(t) = u^{//}(t) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 f(t)\sin\frac{\pi}{l}v$ и

$$W_u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 f^2 \cdot \int_0^l Д_0(t)\left\{1 - \alpha\left[\frac{P_{кр}(t)}{P_э(t)} + \frac{P_{кр}(t) f \sin\frac{\pi v}{v}}{M_{пр}(t)}\right]\right\}\sin^2\frac{\pi v}{l}dv\,, \tag{12}$$

$$W_u(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot P_э^0(t)f^2\left[1-\alpha\frac{P_{кр}(t)}{P_э(t)}+\frac{8fP_{кр}(t)\alpha}{3\pi\cdot M_{пр}(t)}\right] \qquad (13)$$

Согласно энергетическому балансу с учётом (10) и (13) получим

$$P_{кр}(t)=\frac{P_э^0(t)}{1+\alpha+\frac{8}{3\pi}f\alpha_0\frac{P_э(t)}{M_{пр}}} \qquad (14)$$

и для нахождения $P_{кр}(t)$ необходимо определить максимальный прогиб f.

В приложениях интересен случай, когда сила $P_{кр}(t)$ исчерпывает несущую способность $M^*(t)$ изгибаемого стержня, и тем самым

$$M^*(t)=P_{кр}(t)f\,, \qquad (15)$$

а тогда согласно (13) и (15)

$$P_{кр}(t)=\frac{\left(1-\frac{8\alpha}{3\pi}\right)P_э}{1+\alpha}\,, \qquad (16)$$

$$P_{кр}(t)=\frac{\left[\left(3\pi-8Д_{\max}+8Д_{\min}\right)\right]}{3\pi\left(2Д_{\max}-Д_{\min}\right)}\cdot\left(\frac{\pi}{l}\right)^2Д_{\max}\,. \qquad (17)$$

При $e_0\neq 0$ выкладки несколько усложняются, однако как раз наличие эксцентриситета позволяет кроме энергетического равенства (7) вывести из него соотношение, из которого сначала определяется критический прогиб $f_{кр}$ стержня, а затем и $P_{кр}(t)$.

Условие $e_0\neq 0$ влечёт дополнительное к величине S перемещение S_1 точки приложения $P_{кр}(t)$

$$S_1=\int_0^l ds_1\,, \qquad (18)$$

где $$ds_1=\frac{1}{f}\left(\frac{l_0}{\sin\alpha}-\frac{l_0\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)dv=\frac{l_0 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\approx\frac{l_0u^{/}d}{f}\,. \qquad (19)$$

Используя (19) с учётом

$$M(v,t)=P_{кр}(t)\left[l_0+f\sin\frac{\pi}{l}v\right] \text{ и } u^{/}=\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}v\,,$$

приходим к соотношению между $P_{кр}(t)$ и $f(t)$:

$$P_э(t)-\alpha P_{кр}(t)\left[1+\alpha\frac{l_0}{M_{пр}(t)}+\frac{8P_э}{3\pi\cdot M_{пр}(t)}f\right]=\frac{4l_0l^2}{\pi^2 f}\cdot P_{кр}(t)+P_{кр}(t) \qquad (20)$$

и, дифференцируя обе его части по f, находим

$$f_{кр}=\frac{l}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{M_{пр}(t)l_0}{\left(Д_{\max}-Д_{\min}\right)}}\,. \qquad (21)$$

Таким образом

$$P_{кр}(t)=\frac{P_э(t)}{1+\frac{4l_0l^2}{\pi^2\hat{f}_{кр}}+\alpha\left[1+\frac{l_0}{M_{пр}(t)}+\frac{8P_э\hat{f}_{кр}}{3\pi\cdot M_{пр}(t)}f\right]}\ . \qquad (22)$$

Следует отметить, что в [1] дифференцированием по f равенства, аналогичного (20), получена оценка

$$\hat{f}_{кр}=\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{3M_{пр}(t)l_0}{2\left(Д_{\max}-Д_{\min}\right)}}\ . \qquad (23)$$

Поскольку из выражений (21) и (23) явствует, что $f_{кр}>\hat{f}_{кр}$, то согласно формуле (22) получим

$$P_{кр}(t)<\hat{P}_{кр}(t) \qquad (24)$$

и оценка (22) в аспекте конструктивной безопасности более предпочтительна оценки $\hat{P}_{кр}(t)$, полученной в [1].

Уточнение (24) обязано учёту работы внешних сил на перемещениях второго порядка малости ds и ds_1, а именно этот учёт характерен и принципиально важен в задачах, связанных с явлением потери устойчивости [2].

Коррозионные повреждения бетона и арматуры значительно уменьшают их жёсткость и несущую способность $M^*(t)$ и, согласно формулам (17) и (22), существенно снижают силовой резерв сжатого железобетонного элемента по устойчивости.

Литература

1. *Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Усиление железобетонных конструкций при коррозионных повреждениях. – М.: МГАКХиС, 2008. – 87 с.
2. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 560с.

ENERGY METHOD OF ESTIMATION OF STABILITY OF PRESSED REINFORCED CONCRETE ELEMENTS

Larionov E.A., Rimshin V.I., Vasilkova N.T.

An energy method is used for the estimation of resources of stability of reinforced concrete elements pressed by longitudinal force