РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К РАСЧЕТУ БАЛОК, КОНТАКТИРУЮЩИХ СО СРЕДОЙ

С. П. ИВАНОВ, *д-р. техн. наук, профессор*
М. Н. АХМЕТШИН, *аспирант*
Марийский государственный технический университет,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3.

Разработана методика решения физически нелинейной плоской задачи теории упругости в перемещениях. Представлено приложение данной методики к расчету балок, взаимодействующих со средой, имеющих нелинейную диаграмму деформирования. Приведен пример расчета балки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**:** плоская задача, нелинейность, балка.

Рассмотрим методику решения плоской задачи теории упругости с учетом физической нелинейности материала. При малых упругопластических деформациях, согласно теореме [1, 2] можно считать материал нелинейно-упругим. В частности для сплавов, бетона, сталей, композитов и различных сред (при активных деформациях) можно принять зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и деформаций e_i в виде полинома [2]

$$\sigma_i = Ee_i - E_1 e_i^3, \tag{1}$$

где E – модуль упругости; E_1 – постоянная, учитывающая степень нелинейности материала, принимаются из экспериментальных данных.

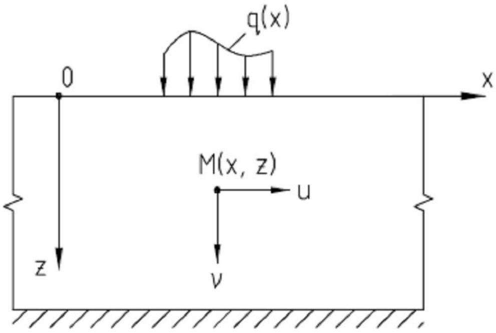

Рис. 1. Виды перемещений точки системы

Задачу решаем в перемещениях.

Перемещения в направлении осей z и x - v(x, z) и u(x, z) (рис. 1) принимаем в виде разложений по В. З. Власову [3]:

$$\begin{aligned} u(z,x) &= \sum_i U_i(x)\cdot\varphi_i(z); \ (i = 1, 2, 3, ..., n); \\ \mathrm{v}(z,x) &= \sum_k V_k(x)\cdot\psi_k(z), \ \ (k = 1, 2, 3, ..., m), \end{aligned} \tag{2}$$

где U_i (x) и V_i (x) – обобщенные перемещения; φ_i *(z) и* $\psi_i(z)$ – координатные функции, которыми задаемся по физическому смыслу задачи. При выполнении дальнейших выкладок переменные x и z, указанные в скобках опускаем.

Запишем выражения линейных и угловых деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_i U_i^{'}\cdot\varphi_i; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} = \sum_k V_k\cdot\psi_k^{'}; \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = \sum_i U_i\cdot\varphi_i^{'} + \sum_k V_k^{'}\cdot\psi_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Для вывода уравнений равновесия используем энергетический метод. Запишем удельную энергию изменения объема и формы системы [2]:

$$\Phi = \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{2}{3}(1+\nu)\int_0^{e_i}\sigma_i de_i, \tag{4}$$

где $K = \dfrac{E_0}{3 \cdot (1-2\nu)}$ - модуль объемного сжатия; Θ – объемная деформация; ν – коэффициент Пуассона.

Запишем выражение интенсивности деформаций e_i

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_z) + \frac{3}{2}\varepsilon_{zx}^2},$$

то для квадрата интенсивности деформаций получим

$$e_i^2 = \frac{1}{(1+\nu)^2}\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_z + \frac{3}{4}\varepsilon_{zx}^2\right). \tag{5}$$

Определим полную энергию деформации системы

$$\Pi = \int_z (\Phi - q_x u - q_z \mathrm{v})\, dz. \tag{6}$$

Учитывая (2), выражаем полную энергию через обобщенные перемещения и их производные, и используя уравнения Эйлера-Лагранжа, определим ее экстремальное значение:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial U_i'} - \frac{\partial F}{\partial U_i} = 0; \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial V_k'} - \frac{\partial F}{\partial V_k} = 0, \tag{7}$$

где F – подынтегральная функция выражения (6).

Раскрывая (7), получим систему (n + m) обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\sum_i a_{ji} U_i'' - \frac{1-\nu}{2}\sum_i b_{ji} U_i + \sum_i (\nu\, t_{jk} - \frac{1-\nu}{2} c_{jk}) V_k' + \frac{1-\nu^2}{E} Q_j = \Phi_j^{нел.}; \\
-\sum_k (\nu\, t_{hi} - \frac{1-\nu}{2} c_{hi}) U_i' + \frac{1-\nu}{2}\sum_k r_{hk} V_k'' - \sum_k s_{hk} V_k + \frac{1-\nu^2}{E} Q_h = \Phi_h^{нел.}; \\
(j = 1, 2, 3, \ldots, n;\ h = 1, 2, 3, \ldots, m).
\end{gathered} \tag{8}$$

Коэффициенты линейной части уравнений и свободные члены имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
a_{ji} = \int_z \varphi_j \varphi_i b dz; \ b_{ji} = \int_z \varphi_j' \varphi_i' b dz; \ t_{jk} = \int_z \varphi_j \psi_k' b dz; \ t_{hi} = \int_z \varphi_i \psi_h' b dz; \\
c_{jk} = \int_z \varphi_j' \psi_k b dz; \ c_{hi} = \int_z \varphi_i' \psi_h b dz; \ r_{hk} = \int_z \psi_h \psi_k b dz; \ s_{hk} = \int_z \psi_h' \psi_k' b z;. \\
Q_j = \int_z q_x \varphi_j dz; \quad Q_h = \int_z q_z \psi_h dz.
\end{gathered} \tag{9}$$

Правые части уравнений учитывают физическую нелинейность материала (в развернутом виде здесь не представлены из-за громоздкости) и определяются следующим образом:

$$\Phi_j^{нел.} = -\frac{d}{dx}\frac{\partial F_{нел.}}{\partial U_i'} + \frac{\partial F_{нел.}}{\partial U_i}; \quad \Phi_h^{нел.} = -\frac{d}{dx}\frac{\partial F_{нел.}}{\partial V_k'} + \frac{\partial F_{нел.}}{\partial V_k}, \tag{10}$$

где $F_{нел}$ – нелинейная часть выражения F.

С использованием уравнений (8) совместно с граничными условиями на краях системы можно решить физически нелинейную плоскую задачу теории упругости.

При действии только вертикальных нагрузок перемещениями $u(x, z)$ в направлении оси x можно пренебречь, тогда уравнения (8) упростятся

$$\frac{1-\nu}{2}\sum_k r_{hk}V_k^{"} - \sum_k s_{hk}V_k + \frac{1-\nu^2}{E}Q_h = \Phi_h^{нел.}. \quad (11)$$

Если рассматривается задача плоской деформации, то вводя следующие обозначения: $E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$ - соответственно модуль деформации и коэффициент Пуассона, для k, h = 1 получим

$$\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}r_{11}V^{"} - \frac{E_0 s_{11}}{1-\nu_0^2}V + p(x) = \Phi_1^{нел.}. \quad (12)$$

В уравнении принято обозначение V вместо V_1. Принимаем высоту деформируемой среды, находящейся в условиях плоской деформации, равной H и координатную функцию $\psi = (H\text{-}z)/H$ (см. рис. 2).

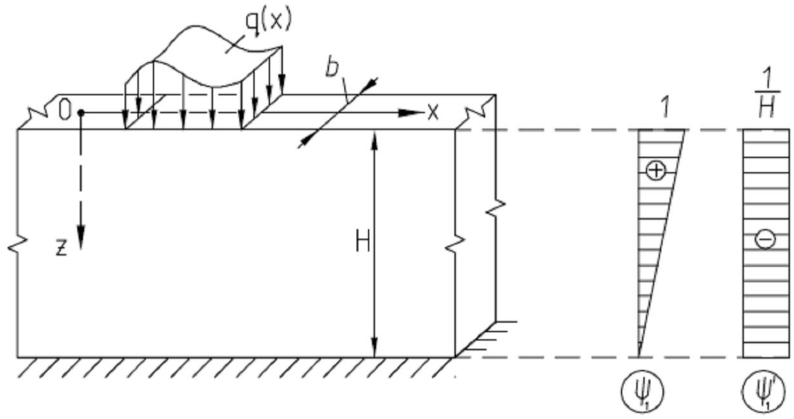

Рис. 2. Схема деформируемой среды, вид координатной функции и ее производной

Положим, что с верхней частью среды контактирует балка, то можем составить уравнение изгиба балки

$$E_b J \cdot V^{IV} = q(x) - p(x), \quad (13)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – соответственно реакция среды и внешняя нагрузка, действующие на балку; $E_b I$ – жесткость балки.

Исключив $p(x)$, с учетом (12) получим следующее уравнение изгиба балки, лежащей на слое высотой H

$$E_b J \cdot V^{IV} - \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}r_{11}V^{"} + \frac{E_0 s_{11}}{1-\nu_0^2}V = q(x) - \frac{E_1}{12(1+\nu_0)^3}\left[-\frac{1}{H}V^2V^{"} + 1.37bH\left(V^{'}\right)^2V^{"} - \frac{4b}{H^3}V^3\right], \quad (14)$$

где b –ширина балки; H – высота деформируемого слоя среды.

Коэффициенты определяем по формулам (9):

$$r_{11} = \int_0^H \psi_1^2 b dz = \frac{bH}{3};\ s_{11} = \int_0^H (\psi_1^{'})^2 b dz = \frac{b}{H}. \quad (15)$$

В качестве примера рассмотрена шарнирно-опертая балка, контактирующая с нелинейной средой и загруженная равномерно распределенной нагрузкой q, со следующими данными: E_b=300000 кг/см^2; J = 416666 см^4; E_0 = 100 кг/см^2; ν_0 = 0,3; l = 400 см; H = 300см; b = 40см; h = 50см; E_1= $9\cdot10^5$кг/см^2.

Для решения нелинейного дифференциального уравнения вида (14) применялся численный метод Рунге-Кутта. Для определения недостающих граничных условий краевой задачи использовался итерационный метод типа Ньютона.

На рис. 3 представлена качественная и количественная картина перемещения сечения балки в центре пролета в зависимости от действующей нагрузки. Кривая 1 получена из линейной теории расчета, а кривая 2- с учетом физической нелинейности среды. В системе координат принятые следующие обозначения: $q^* = \dfrac{q}{E_b h}$, $v^* = \dfrac{v}{h}$ - соответственно приведенная величина нагрузки и прогиба.

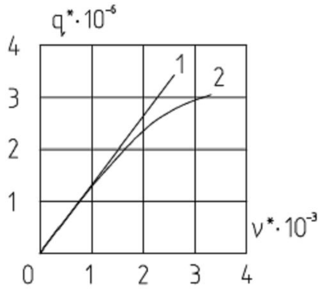

Рис.3. Графики зависимости прогиба балки в середине пролета от действующей нагрузки: 1 – по линейной теории; 2- с учетом физической нелинейности

На основании приведенных в статье результатов можно сделать выводы:

1. Разработанная методика позволяет решать физически нелинейные плоские задачи теории упругости и применить ее к расчету балок, контактирующих с различными средами, имеющих нелинейную диаграмму деформирования материала.

2. При учете нелинейности материала среды с увеличением нагрузки прогиб балки значительно увеличивается по сравнению с результатом, полученным по линейной теории.

Л и т е р а т у р а

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 342с.

2. *Лукаш П. А.* Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. - 204с.

3. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы.- М.: Госстройиздат,1958. – 502с.

THE DECISION OF PHYSICALLY NONLINEAR FLAT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY AND ITS APPLICATION TO CALCULATION OF THE BEAMS CONTACTING WITH BED

S.P. Ivanov, M.N. Akhmetshin

The technique of the decision of physically non-linear plane problem of the elastic theory in moving is developed. The application of the given technique to calculation of the beams cooperating with the bed, having the non-linear diagram of deformation is presented. The example of analysis of a beam is resulted.

KEYWORDS: a plane problem, nonlinearity, a beam.