ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕМБРАННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*С.И. ТРУШИН, *д-р техн. наук, проф.*
**Е.В. СЫСОЕВА, *канд. техн. наук*
**МГСУ, ЦНИИСК им.В.А.Кучеренко*
***МГАХИ им.В.И.Сурикова*

Предлагается методика расчета нелинейно деформируемых мембранных оболочек на прямоугольном плане. Для решения краевой задачи используется вариационно-разностный метод, нелинейная часть задачи решается с помощью процедуры Ньютона-Рафсона. Компоненты вектора градиента и элементы матрицы Гессе вычисляются по своим явным выражениям с использованием зависимостей между приращениями деформаций и приращениями перемещений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: мембранная оболочка, процедура Ньютона-Рафсона, матрица Гессе, геометрическая нелинейность.

Для мембраны с малой стрелой провиса, уравнение поверхности которой записано в декартовой системе координат в форме $z = z(x, y)$, геометрические соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \tag{1}$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2k_{12} w + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

где u, v – тангенциальные перемещения соответственно в направлении осей x и y; w – прогиб; $k_1 = -\partial^2 z/\partial x^2$, $k_2 = -\partial^2 z/\partial y^2$ – кривизны соответственно в направлении осей x и y; $k_{12} = \partial^2 z/\partial x \partial y$ – кривизна кручения. Функции перемещений представляются в виде суммы перемещения на предыдущем шаге и приращения перемещения на текущем шаге. Тогда выражения для приращения деформаций на основе формул (1) можно записать в виде:

$$\Delta e_{11} = \Delta e_{11}^L + \Delta e_{11}^{NL}; \quad \Delta e_{22} = \Delta e_{22}^L + \Delta e_{22}^{NL}; \quad \Delta e_{12} = \Delta e_{12}^L + \Delta e_{12}^{NL};$$

$$\Delta e_{11}^L = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + k_1 \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}; \quad \Delta e_{22}^L = \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + k_2 \Delta w + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial y};$$

$$\Delta e_{12}^L = \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + 2k_{12}\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \Delta w}{\partial x}; \tag{2}$$

$$\Delta e_{11}^{NL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x}\right)^2; \quad \Delta e_{22}^{NL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y}\right)^2; \quad \Delta e_{12}^{NL} = \frac{\partial \Delta w}{\partial x}\frac{\partial \Delta w}{\partial y},$$

где e_{ij}^L, e_{ij}^{NL} - линейная и нелинейная части приращения деформаций соответственно ($i, j = 1, 2$); Δu, Δv, Δw – приращения функций перемещений u, v, w.

Физические соотношения, связывающие усилия и деформации в мембране, записываются в виде:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(e_{11} + \nu e_{22}\right); \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(e_{22} + \nu e_{11}\right); \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} e_{12},$$

где E –модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина мембраны.

Для решения краевой задачи используется вариационный подход, основанный на принципе возможных перемещений, который на шаге с номером m представляется в виде:

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{e} dV - \iint\limits_S \boldsymbol{q}^T \delta \boldsymbol{u} dS = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{12})^T$ - вектор напряжений; $\mathbf{e} = (e_{11}\ e_{22}\ e_{12})^T$ - вектор деформаций; $\boldsymbol{u} = (u\ v\ w)^T$ - вектор перемещений; $\mathbf{q} = (q_1\ q_2\ q_z)^T$ - вектор внешних нагрузок; V – объем, занимаемый мембраной; S – площадь поверхности мембраны.

Из уравнения (3) получим двумерный функционал Лагранжа в виде:

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \iint\limits_S \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{e} dS - \iint\limits_S \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{u} dS, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{D}$ - матрица упругости, которая имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{Eh}{1-\nu^2} & \dfrac{Eh\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ & \dfrac{Eh}{1-\nu^2} & 0 \\ \textit{Симметрично} & & \dfrac{Eh}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}.$$

В основу методики расчета мембранной конструкции в геометрически нелинейной постановке положен вариационно-разностный метод в сочетании с методом Ньютона-Рафсона и шаговым нагружением. Производные первого порядка сеточной функции и значения самой функции в ячейке сетки вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2h_i}\left(u_{i+1\,j+1} + u_{i+1\,j} - u_{i\,j+1} - u_{i\,j}\right); \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2h_j}\left(u_{i+1\,j+1} + u_{i\,j+1} - u_{i+1\,j} - u_{i\,j}\right); \\ u_{i+\frac{1}{2}\,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}\left(u_{i\,j} + u_{i+1\,j} + u_{i\,j+1} + u_{i+1\,j+1}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где i, j – номера узла сетки; h_i, h_j – шаги сетки по направлениям осей x и y соответственно.

С использованием формул (5) и замены интегрирования суммированием по области S, занимаемой оболочкой, функционал (4) сводится его дискретному аналогу, представляющему собой скалярную функцию векторного аргумента $J(\boldsymbol{u}, p)$, где $\boldsymbol{u} = (u_1\ u_2\ \ldots u_n)^T$ - вектор узловых перемещений; p – параметр нагрузки; n – размерность задачи.

Нелинейная задача решается методом Ньютона-Рафсона:

$$\boldsymbol{u}_m^{k+1} = \boldsymbol{u}_m^k + \tau_m^k \left(\boldsymbol{H}_m^k\right)^{-1} \boldsymbol{G}_m^k,$$

где $\mathbf{H}_m^k$ - матрица Гессе (матрица вторых производных) функции $J(\mathbf{u}, p)$; $\mathbf{G}_m^k$ - градиент (вектор невязки) функции $J(\boldsymbol{u}, p)$; τ_m^k - итерационный параметр, регулирующий величину шага от $\boldsymbol{u}_m^k$ до $\boldsymbol{u}_m^{k+1}$; k – порядковый номер итерации внутри шага нагружения с номером m.

Компоненты вектора градиента и элементы матрицы Гессе вычисляются с помощью формул [1] на основе выражений (2):

$$g_i = \iint_S \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{D} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial u_i} dS;$$

$$h_{ij} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial u_i} \right)^T \boldsymbol{D} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial u_j} + \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{D} \frac{\partial^2 \boldsymbol{e}}{\partial u_i \partial u_j} \right) dS$$

Представленный алгоритм реализован в среде Fortran PowerStation для решения геометрически нелинейных задач расчета мембран на прямоугольном плане при статическом нагружении.

Задача расчета включала в себя анализ напряженно-деформированного мембраны на квадратном плане с недеформируемым контуром, находящейся под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки.

В качестве первого этапа решения, для подтверждения работоспособности алгоритма, выполнен расчет первоначально плоской мембраны. Геометрические параметры мембраны имеют следующие значения: длина стороны $2a$=36 м; толщина h=0,002 м; кривизны $k_1 = k_2 = k_{12} = 0$. Физические параметры мембраны имеют следующие значения: модуль упругости E = 2,1*10^5 МПа, коэффициент Пуассона ν=0,3. Интенсивность поперечной равномерно распределенной нагрузки составляет 3 кПа. Начальное приближение для итерационного процесса задавалось в виде: $u_0(x, y) = 0$; $v_0(x, y) = 0$; $w_0(x, y) = f_0 \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2a}$, где стрела провиса мембранного покрытия $f_0 = 60$ см. Решение задачи получено за 6 итераций. Значение прогиба в центре мембраны, полученное по разработанному алгоритму, составляет $w_c = 65{,}8$ см. Для сравнения, прогиб в центре мембраны, полученный согласно справочным рекомендациям [2], составляет: $w_c = 0{,}285 \sqrt[3]{\frac{q}{E}\left(\frac{2a}{h}\right)^4} h = 65{,}3$ см. Разница в значениях прогибов не превышает 1%.

Вторым этапом является расчет мембраны, имеющей указанные выше геометрические и физические характеристики и начальную форму, определяемую уравнением (рис.1):

$$z(x, y) = f_0 \left(1 - x^2/a^2\right)\left(1 - y^2/a^2\right),$$

где стрела провиса покрытия $f_0 = 60$ см. Начало координат расположено в центре мембраны, оси координат параллельны ее сторонам.

Кривизны мембраны определяются по формулам:

$$k_1 = f_0 \frac{2}{a^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right); \; k_2 = f_0 \frac{2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \; k_{12} = 4 f_0 \frac{xy}{a^4}.$$

Решение задачи получено за 9 итераций метода Ньютона-Рафсона. На рис. 2 приведена эпюра прогибов w мембранной конструкции, а на рис.3 эпюра нормальных усилий N_{11} вдоль оси x.

Картина деформированного состояния мембраны, как показывает рисунок, характеризуется смещением амплитудных значений прогибов от центра к краям покрытия. Нормальные усилия N_{11} и N_{22} достигают максимальных значений в центре мембранной оболочки.

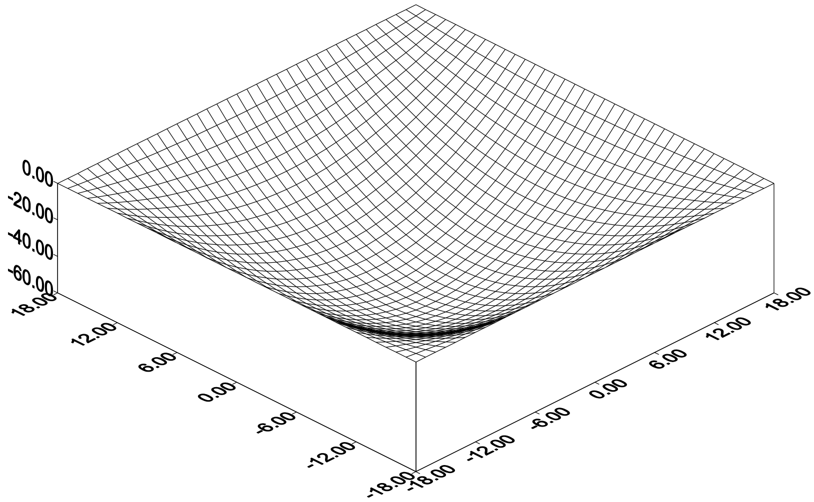

Рис. 1. Общий вид мембраны

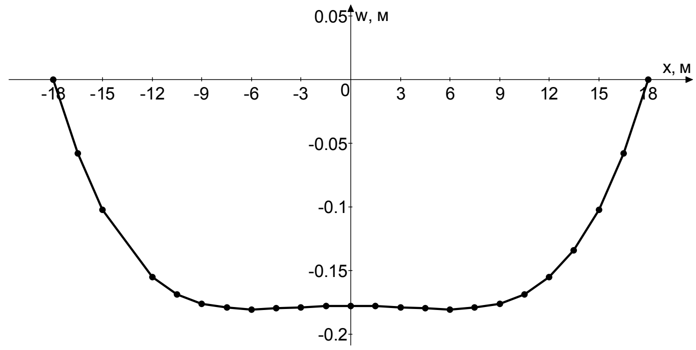

Рис.2. Прогибы мембраны вдоль оси *x*

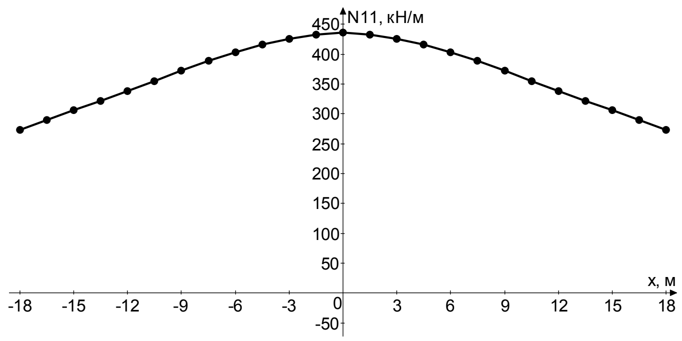

Рис. 3. Эпюра нормальных усилий N_{11} вдоль оси *x*

Л и т е р а т у р а

1. *Mileikovskii I.E., Trushin S.I.* Analysis of Thin-Walled Structures. – Rotterdam: A.A. Balkema Publishers, 1994. – 187 pp.
2. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений (расчетно-теоретический). – М.: Стройиздат, 1960. – 1040 с.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE MEMBRANE SHELL WITH ACCOUNT OF GEOMETRICAL NON-LINEARITY

S.I. Trushin, E.V. Sysoeva

The numerical procedures and results of analysis of rectangular membranes are presented. For the solution of the nonlinear problem the finite difference energy method and Newton-Raphson method are used.