

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЕМ**

Д.Н. НИЗОМОВ\*, *д-р. техн. наук, проф.*,  
А.А. ХОДЖИБОЕВ\*\*, *канд. техн. наук*,  
О.А. ХОДЖИБОЕВ\*, *инж.*

*\*Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Республики Таджикистан, 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни 267, эл.-почта: tiees@mail.ru*

*\*\*Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими, 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков Раджабовых 10, эл.-почта: hojiboev@mail.ru*

*В работе исследуется концентрация напряжений на контурах отверстий анизотропного тела в условиях плоской деформации.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** – численные методы – анизотропная пластина – незакрепленная выработка – граничные интегральные уравнения – отверстие – функция напряжений – характеристическое уравнение.

В последние годы в практике научных исследований и инженерных расчетов в области прочности все чаще прибегают к использованию численных методов решения задач теории упругости и пластичности. Использование численных методов приобретает особенное значение в связи с развитием вычислительной техники и технологии.

Как известно, линейная теория упругости основана на предположении, что шесть компонент тензора напряжений ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) линейно связаны с шестью компонентами тензора деформаций ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ )

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\}, \quad (1)$$

где матрица упругих постоянных  $[a]$  и векторы деформации и напряжений записываются в виде

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{16} & a_{26} & \dots & a_{66} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_j}, \quad a_{ii} = \frac{1}{E_i},$$

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy})^T, \quad \{\sigma\} = (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{yz} \ \tau_{xz} \ \tau_{xy})^T,$$

$\nu_{ij}$  – коэффициент Пуассона, выражающий относительную поперечную деформацию в направлении  $i$ , вызванную продольной деформацией  $\varepsilon_j = \sigma_j / E_j$  в направлении  $j$ ,  $E_j$  – модуль упругости, соответствующий  $j$  – тому главному направлению.

Следующие три соотношения

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3},$$

определяют взаимосвязь поперечных деформаций в ортотропном материале.

Максимальное число независимых упругих постоянных с учетом симметрии для любого материала, обладающего наиболее общей формой упругой анизотропии, равно 21. Многие реальные материалы обладают той или иной структурной симметрией, поэтому число упругих постоянных для них значительно сокращается. Например, ортотропный материал имеет девять независимых упругих постоянных, а трансверсально-изотропный – пять.

Рассмотрим однородное упругое тело с анизотропией общего вида, ограниченной цилиндрической поверхностью и нагруженное поверхностными и объемными силами, которые не меняются вдоль образующей. Ось  $z$  системы декартовых координат направим параллельно образующей, а оси  $x$  и  $y$  – произвольно. Проекция усилий, приложенных к цилиндрической поверхности на единицу площади, обозначим через  $X_n, Y_n$ . Будем считать, что длина тела бесконечна или значительно больше характерного размера отверстия, область поперечного сечения – произвольной, конечной или бесконечной, односвязной или многосвязной. В теле с анизотропией общего вида плоская деформация в смысле изотропного тела, где все поперечные сечения остаются плоскими, становится невозможным. Можно лишь утверждать, что все составляющие напряжений и перемещений не будут зависеть от  $z$ , т.е. имеет место обобщенная плоская деформация [3]. Далее предполагаем, что цилиндр бесконечной длины имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальную к образующей. В этом

случае мы будем иметь чисто плоскую деформацию, полагая  $w = w_0$  и считая перемещения  $u_x, u_y$  функциями только  $x$  и  $y$ . При этом  $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \varepsilon_z = 0$ , и вследствие этого

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}). \quad (3)$$

Уравнения равновесия плоской задачи с учетом объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \quad (4)$$

закон Гука (1) с учетом (2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{26}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (5)$$

и уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

позволяют записать решение плоской задачи в виде одного уравнения относительно функции напряжений. Представим напряжения через функцию напряжений  $\Phi(x, y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \bar{U} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \bar{U} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

где  $X = -\partial \bar{U} / \partial x$ ,  $Y = -\partial \bar{U} / \partial y$ ,  $\bar{U}$  – потенциал объемных сил. Напряжения в (7) тождественно удовлетворяют (4), внося их в (5) с учетом (3) из (6) получим [4]

$$\begin{aligned} \beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -(\beta_{12} + \beta_{22}) \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial x^2} - \\ - (\beta_{11} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + (\beta_{16} + \beta_{26}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (8)$$

где общее выражение для функции  $\Phi(x, y)$  зависит от комплексных корней характеристического уравнения

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0, \quad (9)$$

здесь  $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3} / a_{33}$  – приведенные коэффициенты деформации,  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .

Если анизотропное тело обладает тремя плоскостями симметрии (орто-тропное тело), то  $\beta_{16} = \beta_{26} = 0$ , и характеристическое уравнение (9) приобретает вид

$$\beta_{11}\mu^4 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 + \beta_{22} = 0, \quad (10)$$

где  $\beta_{11} = a_{11} - a_{13}^2 / a_{33}$ ;  $\beta_{12} = a_{12} - a_{13}a_{23} / a_{33}$ ;  $\beta_{22} = a_{22} - a_{23}^2 / a_{33}$ ;  $\beta_{66} = a_{66}$ .

При замене  $\mu$  на  $i\gamma, i = \sqrt{-1}$ , из (10) получим

$$\beta_{11}\gamma^4 - (2\beta_{12} + \beta_{66})\gamma^2 + \beta_{22} = 0. \quad (11)$$

откуда  $\gamma_{1,2} = \sqrt{2\beta_{12} + \beta_{66} \pm \sqrt{(2\beta_{12} + \beta_{66})^2 - 4\beta_{11}\beta_{22}}} / \sqrt{2\beta_{11}}$ . (12)

Как следует из (12) для решения задачи ортотропного тела в условиях плоской деформации необходимы семь упругих постоянных  $(E_1, \nu_{12}, E_2, \nu_{13}, E_3, \nu_{23}, G_{12})$ :  $a_{11} = 1 / E_1$ ,  $a_{12} = -\nu_{12} / E_2$ ,  $a_{13} = -\nu_{13} / E_3$ ,  $a_{22} = 1 / E_2$ ,  $a_{23} = -\nu_{23} / E_3$ ,  $a_{33} = 1 / E_3$ ,  $a_{66} = 1 / G_{12}$ . Далее будет строить алгоритм численного решения задачи плоской деформации на основе метода граничных уравнений. Закон Гука (1) для ортотропного материала с учетом  $a_{16} = a_{26} = a_{36} = 0$ , а также (3) представляется в обратной форме

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

$b_{11} = \beta_{22} / b_0$ ,  $b_{12} = -\beta_{12} / b_0$ ,  $b_{22} = \beta_{11} / b_0$ ,  $b_{66} = 1 / a_{66} = G_{xy}$ ,  $b_0 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$ .

Из уравнений (13) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= b_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + b_{12} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x}, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= b_{12} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + b_{22} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= b_{66} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right), & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= b_{66} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Внося (14) в (4), получим систему уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} b_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + b_{66} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + X &= 0, \\ b_{22} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + b_{66} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть в точке  $\xi$  двумерного анизотропного пространства действует сосредоточенная сила  $X = \delta(x, \xi) \delta_{ik}$ , направленная параллельно оси  $x_k$ . Решение задачи о сосредоточенной силе в ортотропной среде дано в работе [9], где даны фундаментальные решения, соответствующие решению дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} b_{11} \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2} + b_{66} \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x \partial y} &= -\delta(x, \xi) e_x, \\ b_{22} \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2} + b_{66} \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x \partial y} &= -\delta(x, \xi) e_y, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\delta(x, \xi)$  – дельта функция,  $e_x, e_y$  – единичные векторы, направленные соответственно по осям  $x$  и  $y$ ;  $u_x^* = u_{xx}^* + u_{xy}^*$ ,  $u_y^* = u_{yy}^* + u_{yx}^*$  – компоненты фундаментальных перемещений.

На основе фундаментальных решений, которые удовлетворяют (16), строится система сингулярных граничных интегральных уравнений.

Например, для первой основной задачи теории упругости, в которой на поверхности задаются напряжения, система граничных интегральных уравнений записывается в тензорной форме

$$c_{ij}^* u_j + \int_s P_{ij}^* u_j ds = \int_s u_{ij}^* P_j ds. \quad (17)$$

где  $P_{ij}^*$  – компоненты фундаментальных напряжений.

Проведя сплайновую аппроксимацию граничных параметров по контуру отверстия, из (17) получим систему алгебраических уравнений. В результате решения этой системы получим вектор искомых перемещений. Затем вычисляются относительные деформации и на последнем этапе определяются компоненты напряжений.

На основе предлагаемого алгоритма и разработанной программы получено численное решение задачи в условиях плоской деформации при следующих данных:

$$E_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; E_2 = 1.7 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; E_3 = E_1, G_{12} = 0.81 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; \eta = 2.5, \\ \nu_1 = 0.2, \nu_{13} = \nu_1, \nu_{12} = 0.057, h = 40 \text{ см}, \nu_{32} = \nu_{12}, \delta = 0.003 \text{ см}. \quad (18)$$

Механические характеристики имеют следующие интерпретации и определяются по методике, приведенной в [5]:  $E_1$  – модуль деформации материала ненарушенной породы;  $E_2 = E_1 / (1 + \eta)$  – модуль деформации твердой среды в перпендикулярной плоскости слоистости;  $\eta = \delta / h\xi$  – коэффициент, зависящий от  $\delta$  – ширины раскрытия трещины,  $h$  – толщины ненарушенного слоя (расстояние между трещинами);  $\xi = 3 \cdot 10^{-4}$  – постоянный коэффициент, зависящий от относительной площади скальных контактов;  $E_3$  – модуль деформации в плоскости изотропии;  $G_{12}$  – модуль сдвига, определяемый по формуле  $G_{12} = E / 2(1 + \nu_1 + \eta)$ ;  $\nu_1$  – коэффициент Пуассона материала ненарушенной породы;  $\nu_{12} = \nu_1 / (1 + \eta)$ .

Таблица 1. Сопоставление результатов при различных разбиениях контура отверстия

Число разбиений	Перемещение $u_n \cdot 10^5$			Напряжение $\sigma_s$		
	1	2	3	1	2	3
2	-0.4845	-0.1384	0.2177	-0.4709	0.7834	4.391
4	-0.5095	-0.1305	0.2588	-0.4731	0.7276	4.333
8	-0.5238	-0.1254	0.2766	-0.4926	0.7374	4.252
16	-0.5319	-0.1233	0.2863	-0.5068	0.7386	4.225
32	-0.5363	-0.1224	0.2917	-0.5154	0.7384	4.227

С целью проверки сходимости численного решения были получены результаты (нормальные перемещения и тангенциальные напряжения) при разбиении четверти контура кругового отверстия на  $n = 2, 4, 8, 16, 32$  постоянных элементов (табл. 1). Эти результаты соответствуют растяжению анизотропной среды вдоль волокон (рис. 1, а). Можно заметить, как по перемещениям, так и по напряжениям в контрольных точках контура круглого отверстия, имеет место хорошая сходимость.

В табл. 2 результаты расчета по данным (18) сопоставляются с аналитическим решением задачи Кирша [7, 2] для изотропной среды (знаменатель) при  $E = 6 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2, \nu = 0.2$ . С целью сравнения в х последней строке табл. 2 приво-

дятся результаты численного решения задачи Кирша при разбиении четверти контура отверстия на 16 граничных элементов.

Сравнение результатов (табл. 2) показывает, что коэффициент концентрации напряжений увеличивается примерно в 1,5 раза в случае растяжения вдоль волокон по сравнению с изотропией. Нормальное перемещение при растяжении поперек волокон (рис. 2, б) увеличивается почти в 3 раза.

Таблица 2. Сравнение результатов

Вид растяжения	Напряжение $\sigma_s$			Перемещение $u_n \cdot 10^5$		
	1	2	3	1	2	3
Растяжение вдоль волокон	-0.4926	0.7374	4.252	-0.5238	-0.1254	0.2766
	-1.000	1.000	3.000	-0.320	-0.100	0.120
Растяжение поперек волокон	2.733	1.248	-1.702	0.268	-0.371	-1.010
	3.000	1.000	-1.000	0.120	-0.100	-0.320
$n=16$	-1.027	0.9780	2.983	-0.3295	-1.004	0.1286

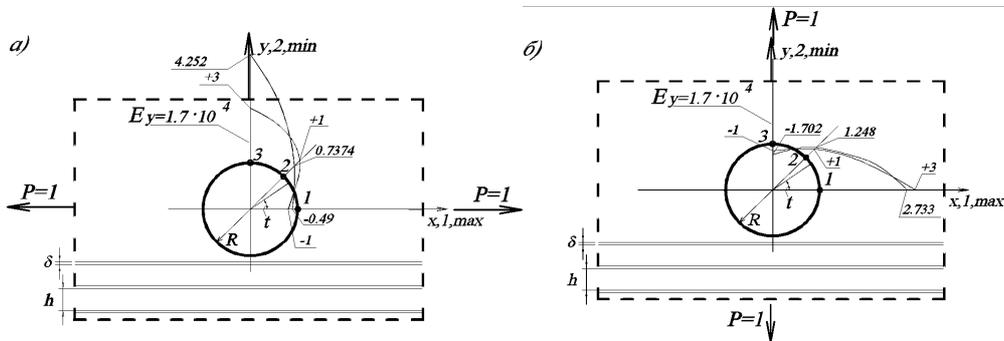


Рис. 1. Концентрация тангенциальных напряжений на контуре незакрепленной выработки: а) при растяжении вдоль трещин; б) при растяжении поперек трещин

Таким образом, разработанный алгоритм численного моделирования на основе метода граничных интегральных уравнений позволяет решать задачи оценки степени концентрации напряжений в анизотропной среде, ослабленной отверстием.

Л и т е р а т у р а

1. Космодамианский А.С. О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя отверстиями. Изв. АН СССР, ОНТ. Механика и машиностроение, 1961, №1.
2. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: «Мир», 1987, 328 с.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947, 355 с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 415 с.
5. Руппенейт К.В. Деформируемость массивов трещиноватых горных пород. М.: «Недра», 1975, 223 с.
6. Савин Г.Н. Распределения напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968, 887с.
7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975, 576 с.
8. Koiter W.T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a double periodic set of equal holes. Boundary problems of different equation. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1940.
9. Rizzo F.J, Shippy D.J. A method for stress determination in plane anisotropic bodies, J. Composite Materials 4, 36-61 (1970).

R e f e r e n c e s

1. Kosmodamianskiy, A.S. (1961). On stress state of an anisotropic plate with two openings, Izv. AN SSSR, ONT, Mechanika I mashinostroenie, № 1.

2. *Krauch, S, Starfield, A. (1987). The Methods of Boundary Elements in Mechanics of Solid Body, Moscow: "Mir", 328 p.*
3. *Lehnitskiy, S.G. (1947). Anisotropic Plates, Leningrad: Gostehixdat, 355 p.*
4. *Lehnitskiy, S.G. (1977). The Theory of Anisotropic Body, Moscow: "Nauka", 415 p.*
5. *Ruppeneit, K.V. (1975). Deformiruemost massivov treschinovatih gornih porod, Moscow: "Nedra", 223 p.*
6. *Savin, G.N. (1968). The Distribution of Stresses Near the Openings, Kiev: Naukova Dumka, 887 p.*
7. *Timoshenko, S.P., Gudier, J. (1975). The Theory of Elasticity, Moscow: "Nauka", 576 p.*
8. *Koiter, W.T. (1940). Stress distribution in an infinite elastic sheet with a double periodic set of equal holes, Boundary problems of different equation, Madison: Univ. Wisconsin Press.*
9. *Rizzo, F.J, Shippy, D.J. (1970). A method for stress determination in plane anisotropic bodies, J. Composite Materials, 4, 36-61.*

#### STRESS-STRAIN STATE OF ANISOTROPIC PLATE WEAKENED WITH HOLE

J.N. Nizomov, A.A. Hojiboev, O.A. Hojiboev

*Institut seysmologii, seysmostoykogo stroitelstva i seysmologii AN Respuliki Tadjikistan, Tadjikskiy ehnikeskiy universitet im. M.S. Osimi, Tadjikistan*

The problem has exploring the concentration of stress-strain condition around the contour of the hole in terms of flat deformation. In accordance to expanding of using of anisotropic materials in different kind of technique, the important question is influences of anisotropic materials to concentration of stress.

KEY WORDS: numerical method, anisotropic plate, weakened mine, boundary integral equation, hole, stress function, characteristic equation.

