

## КОЛЕБАНИЯ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА СПЛОШНОМ НЕЛОКАЛЬНО УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А.А. ВАСИЛЕНКО, аспирант  
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет путей  
сообщения императора Николая II»  
127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9  
e-mail: [wasilenkoalena@yandex.ru](mailto:wasilenkoalena@yandex.ru)

*В настоящее время при расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании, используются различные модели упругого основания. Одной из наиболее распространенных является модель, базирующаяся на гипотезе о пропорциональной зависимости между реакцией основания в точке с координатой  $x$  и осадкой в той же точке – гипотеза Винклера, которая однако не достаточно корректно описывает поведение конструкций, лежащих на сплошном упругом основании.*

*В предлагаемой статье рассматривается задача о колебаниях балки, лежащей на сплошном нелокально упругом основании. Дается сравнение результатов расчета, полученных с использованием предлагаемой модели и модели Винклера.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: балки, нелокально упругое основание, колебания

В настоящее время при расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании, в большинстве случаев применяется модель Винклера-Циммермана [1, 2], основанная на прямой пропорциональной зависимости между прогибом и реакцией основания в рассматриваемом сечении балки:

$$r(x) = cw(x), \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент постели.

Прогиб балки определяется из уравнения:

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + cw(x) = q(x), \quad (2)$$

где  $EI$  – жесткость балки,  $q(x)$  – внешняя нагрузка.

Гипотеза Винклера-Циммермана много раз подвергалась критике. Главный недостаток этой гипотезы заключается в том, что в действительности значение реакции в рассматриваемой точке зависит не только от прогиба балки в этой же точке, но и от значений прогибов в соседних точках.

Герсеванов Н. М. и Мачерет Я. А. в своей работе [3] рассмотрели плоскую задачу теории упругости (задачу о плоском деформированном состоянии) для изгиба бесконечно большой тонкой пластины, выделив из нее полосу, которая далее рассматривалась как балка на упругом основании, нагруженная сосредоточенной силой  $P$  по середине.

Формула для определения изгибающего момента в среднем сечении балки, то есть в точке приложения силы  $P$ , в этом случае имеет вид:

$$M = 2P \sqrt[3]{2EI(1-\mu^2)/(E_1 b)} / 9, \quad (3)$$

где  $E_1$  – модуль сжатия, или модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $b$  – ширина подошвы фундамента.

Результаты решения задачи в такой постановке значительно отличаются от решения, получаемого с помощью гипотезы Винклера. Одним из принципиальных отличий является отсутствие зон с растягивающими напряжениями в грунте на крайних участках балки при решении плоской задачи. Если для решения той же задачи воспользоваться гипотезой Винклера, то коэффициент постели

может быть получен путем сравнения формулы (3) с формулой для определения момента под силой  $P$  согласно гипотезе Винклера:

$$M = P^3 \sqrt{4EI / kb} / 4, \quad (4)$$

где  $k$  – искомый коэффициент постели для грунта.

В результате авторами сделан вывод о том, что коэффициент постели является расчетной величиной, зависящей не только от свойств грунта, но и от жесткости балки и ширины ее подошвы.

В работе Горбунова-Посадова М.И. [4] рассмотрен расчет балок с использованием уравнения Буссинеска для определения вертикальных перемещений поверхности упругого полупространства. Распределение давлений и вертикальные перемещения выражаются в виде степенных рядов. Сравнение результатов, полученных при решении плоской и пространственной задач, с аналогичными результатами, найденными с помощью гипотезы Винклера, показало значительную их разницу. Например, при действии равномерно распределенной нагрузки  $q$  по длине балки решение как плоской, так и пространственной задачи дает положительные максимальные значения изгибающих моментов, в то время как по гипотезе Винклера они равны нулю. Изгибающие моменты для жестких балок при решении плоской задачи оказываются преувеличенными, но при уменьшении жесткости или увеличении длины балки результаты решения плоской задачи приближаются к результатам пространственной задачи.

Перечисленные методы расчета основаны на решении задач теории упругости. Такие методы имеют ряд недостатков, связанных с появлением бесконечно больших напряжений по контуру фундамента или у концов балки, лежащей на упругой полуплоскости, а также с преувеличенными значениями изгибающих моментов.

Пастернак П.Л. предложил модель основания [5], которое характеризуется двумя коэффициентами постели: коэффициентом сжатия и коэффициентом сдвига, которые не зависят друг от друга. Однако по сути эта модель так же, как и модель Винклера-Циммермана является локальной.

К. Wiegardt [6] высказал критику по поводу модели упругого основания Винклера -Циммермана, считая такой подход в корне ошибочным. Он заметил, что осадка зависит не только от давления в рассматриваемом сечении балки, но и от давлений в соседних областях:

$$w(x) = c \int_{-a}^{+a} p(\xi) K(|x - \xi|) d\xi. \quad (5)$$

Здесь  $c$  – жесткость основания,  $2a$  – длина балки,  $p(\xi)$  – давление в точке с координатой  $\xi$ ,  $K(|x - \xi|)$  – функция влияния, которую предлагается определять опытным путем. В упомянутой работе были проведены исследования и расчеты для балок различной жесткости с использованием теории Циммермана и двух предложенных теорий, одна из которых основана на решении задачи теории упругости, а другая представляет собой комбинацию решения теории упругости и уравнения (5). Решение задачи об изгибе балки согласно теории Циммермана существенно отличается от решения с учетом нелокального эффекта.

В работе [7] предложен метод расчета балок с учетом нелокальности основания и использованием метода конечных элементов.

Реакция основания определяется соотношением:

$$r(x, t) = \int_{x_1}^{x_2} K(x, \xi) w(\xi, t) d\xi + \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^t C(x, \xi, t - \tau) \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\tau d\xi, \quad (6)$$

где  $K(x, \xi)$  – функция влияния, учитывающая нелокальность основания,  $C(x, \xi, t - \tau)$  – функция демпфирования основания,  $x_1$  и  $x_2$  – координаты начала и конца основания.

Используя равенство (6), авторы с помощью метода конечных элементов исследовали влияние нелокальности на значения собственных частот колебаний балок. Численные расчеты показали, что нелокальность основания может оказывать существенное влияние на динамические характеристики конструкций.

В статье [8] рассматривается задача о колебаниях балок, лежащих на нелокально упругом основании. В качестве модели упругого основания выбрана модель аналогичная (6), но без учета нелокальности затухания. Функция влияния  $K(x, \xi)$  выбрана в виде экспоненты. Для решения задачи используется метод конечных разностей. Показано, что учет нелокальности основания приводит к заметному изменению траектории движения балки и ее прогибов по сравнению с балкой на Винклеровском основании.

В работе [9] на основании физического и численного экспериментов предложена модель сплошного нелокально упругого основания, которая является комбинацией модели Винклера и модели, рассмотренной в работе [8]. Показано, что такая модель дает существенно более корректные результаты по сравнению с моделью, предложенной в работах [7, 8].

В настоящей работе исследуется напряженно-деформируемое состояние конструкции с учетом нелокальности упругого основания. Реакция отпора основания в рассматриваемой точке балки определяется выражением:

$$r(x, t) = c \int_0^l C(|x - \xi|) w(\xi, t) d\xi, \quad (7)$$

причем в качестве функции  $C(|x - \xi|)$  используется выражение:

$$C(|x - \xi|) = C_0 \delta(|x - \xi|) + C_1 e^{-\eta|x - \xi|}. \quad (8)$$

Здесь  $\delta(|x - \xi|)$  – дельта-функция,  $C_0$ ,  $C_1$  и  $\eta$  – характеристики упругого основания. Прогиб балки при действии статической нагрузки определяется из интегродифференциального уравнения:

$$EI \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + c \int_0^l C(|x - \xi|) w(\xi) d\xi = q(x), \quad (9)$$

где  $w(\xi)$  – прогиб балки в рассматриваемой точке с координатой  $\xi$ ;  $l$  – длина балки. В том случае, когда функция  $C(|x - \xi|)$  принимается в виде (8) с учетом сил инерции и внешнего демпфирования аналогичное уравнение (9) записывается следующим образом:

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + C_0 w(x, t) + C_1 \int_0^l e^{-\eta|x - \xi|} w(\xi, t) d\xi = q(x, t), \quad (10)$$

где  $\gamma$  – коэффициент демпфирования;  $m$  – погонная масса балки;  $t$  – время;  $q(x, t)$  – распределенная нагрузка.

Далее в качестве примера рассмотрим балку шарнирно закрепленную по концам. При решении дифференциального уравнения (9) воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. Для этого представим функцию прогибов в виде:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right), \quad (11)$$

где  $f_i(t)$  – искомые обобщенные перемещения.

Подставив выражение (11) в уравнение (10), получим:

$$\sum_{i=1}^n \left[ m \frac{\partial^2 f_i(t)}{\partial t^2} \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right) + \gamma \frac{\partial f_i(t)}{\partial t} \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right) + EI \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right) + C_0 f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right) \right] + C_1 \int_0^l e^{-\eta|x-\xi|} \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi}{l} \xi\right) d\xi - q(x,t) = R(x), \quad (12)$$

$R(x)$  – функция невязки.

Значения  $f_i(t)$  определяются из условия минимизации этой функции:

$$\int_0^l R(x) \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right) dx = 0. \quad (13)$$

После подстановки (12) в (13) и некоторых преобразований получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m \frac{\partial^2 f_i(t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial f_i(t)}{\partial t} + EI \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 f_i(t) + C_0 f_i(t) + \frac{2}{l} C_1 \sum_{j=1}^n f_j(t) \int_0^l \int_0^l e^{-\eta|x-\xi|} \sin\left(\frac{i\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right) d\xi dx - \frac{2}{l} \int_0^l q(x,t) \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right) dx = 0. \quad (14)$$

При решении уравнения (13) воспользуемся численным методом решения дифференциальных уравнений Рунге-Кутты 4-го порядка. Для вычисления двойного определенного интеграла

$$\int_0^l \int_0^l e^{-\eta|x-\xi|} \sin\left(\frac{i\pi}{l} \xi\right) \sin\left(\frac{j\pi}{l} x\right) d\xi dx$$

воспользуемся формулой трапеций.

В качестве примера рассмотрим бетонную балку длиной  $l = 2000$  см с размерами поперечного сечения  $b = 100$  см,  $h = 100$  см при действии равномерно распределенной нагрузки  $q = 1000$  Н/см. Начальный прогиб и начальная скорость принимаются нулевыми  $w(0) = 0$ ,  $\partial w / \partial t(0) = 0$

На рис. 1 приведены графики изменения прогиба в среднем сечении балки во времени, полученные при использовании модели сплошного нелокально упругого основания и модели Винклера-Циммермана без учета затухания, а на рис. 2 – те же графики с учетом затухания. Пунктирные кривые на всех графиках соответствуют результатам решения задачи с использованием модели Винклера, а сплошные кривые – с использованием модели нелокально упругого основания. Результаты получены при шаге интегрирования по координате  $\Delta \xi = \Delta x = 1$  см, коэффициенте  $\gamma = 0.1$  Н сек/см<sup>2</sup> и шаге по времени  $\Delta t = 0.0001$  с. Характеристики основания приняты согласно [9]:  $C_0 = 353.5$  Н/см<sup>2</sup>,  $C_1 = -258.5$  Н/см<sup>2</sup>,  $\eta = 0.034$  1/см.

При расчете этой же балки с использованием модели Винклера коэффициент постели принят равным [9]  $c = 183$  Н/см<sup>2</sup>. В разложении прогибов в обоих случаях удерживаются 5 членов ( $n = 5$ ).

Значение максимального прогиба, полученное из решения дифференциального уравнения (14) при  $t = 30$  составило  $w_{\max} = 0,1157$  см, что значительно отличается от значения прогиба в том же сечении в случае модели Винклера, которое составило  $w_{\max} = 0,058$  см.

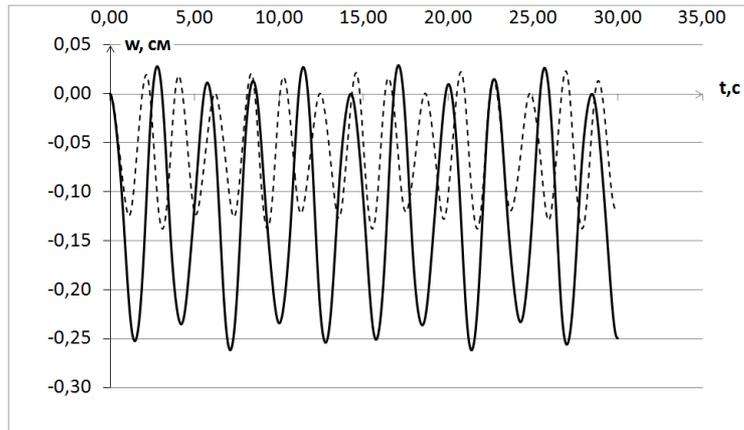


Рис. 1

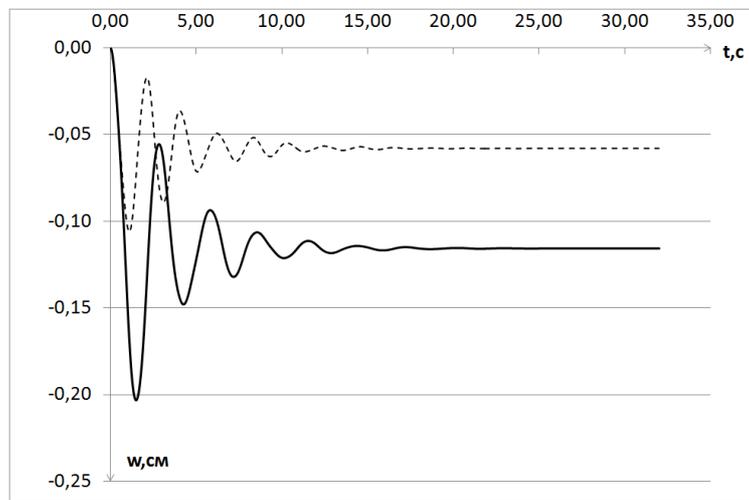


Рис. 2

На графиках изменения прогиба во времени рис. 3 приведены результаты расчета той же балки при действии распределенной нагрузки, изменяющейся во времени по закону:  $q = q_0 \sin(\omega t)$  и по длине – по синусоиде.

В расчете принято:  $q_0 = 1000 \text{ Н/см}$ ,  $\gamma = 0.1 \text{ Н сек.см}^2$ ,  $\Delta t = 0.01 \text{ с}$ .

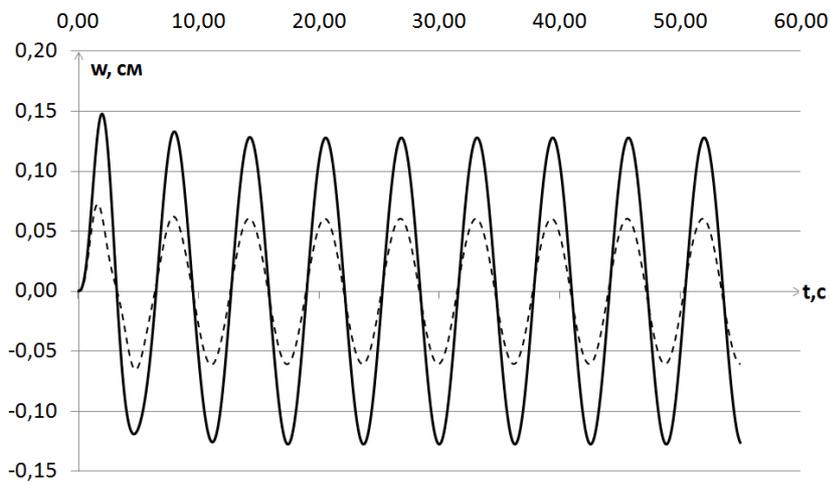


Рис. 3

Анализируя графики, можно так же сказать о значительной разнице результатов. Амплитуда колебаний в случае модели нелокально упругого основания равна 0.123 см, что более чем в 2 раза больше амплитуды колебаний, равной 0.057 см, полученной при использовании модели Винклера. Учет нелокальности основания приводит к значительным увеличениям значений прогибов балок по сравнению с винклеровской моделью основания.

Теперь для той же балки рассмотрим расчет на сейсмическое воздействие. Для этого используем искусственную акселерограмму вертикальных ускорений, которая принималась при расчете спортивных сооружений в г. Сочи (рис. 4). Шаг по времени  $\Delta t$  составляет 0.005 с.

При такой нагрузке график изменения во времени прогиба балки в среднем сечении при использовании модели нелокально упругого основания в общем имеет совершенно другой вид по сравнению с тем же графиком, полученным из результатов расчета по модели Винклера (рис. 5).

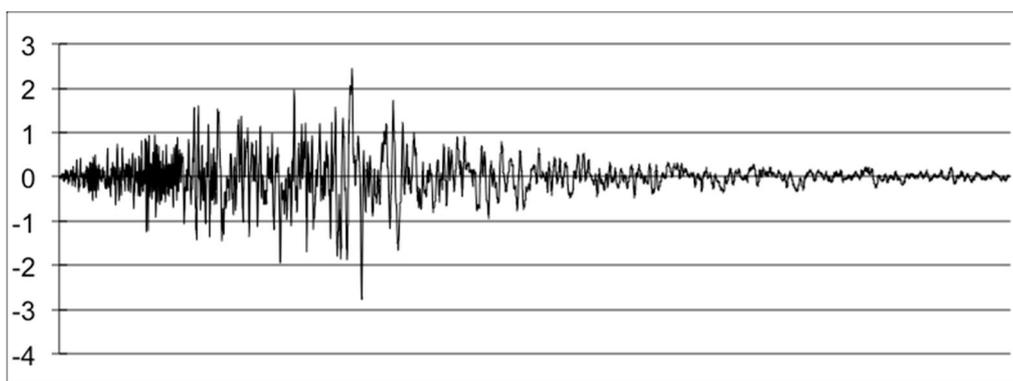


Рис.4

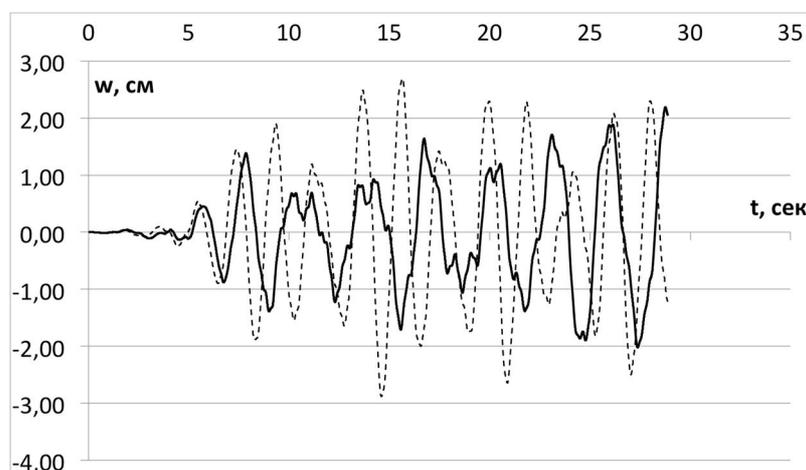


Рис. 5

**Заключение.** В статье проведен анализ колебаний балки, лежащей на сплошном упругом основании и приведены результаты расчета этой системы с помощью модели нелокально упругого основания и модели Винклера-Циммермана. На основании приведенных результатов можно подчеркнуть, что учет нелокальности основания при действии на балку внешней распределенной нагрузки приводит к большим значениям прогибов по сравнению с моделью Винклера. В случае же сейсмического воздействия прогибы балки при использовании модели Винклера могут оказаться большими по сравнению с аналогич-

ными прогибами, полученными с использованием модели нелокально упругого основания.

Л и т е р а т у р а

1. *Winkler E.* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. – Prague, 1867.
2. *Zimmerman H.* Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. – Berlin, 1888.
3. *Герсеванов Н.М., Мачерет Я. А.* К вопросу о бесконечно длинной балке на упругой почве, нагруженной силой  $P$ // Сборник НИИС Фундаментостроя. – 1937. – №8. – С. 3-5.
4. *Горбунов-Посадов М.И.* Расчет балок и плит на упругом полупространстве// Прикладная математика и механика. – 1940, т. IV, vsg. 3. – С. 61-80.
5. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре. – 1954.
6. *Wieghardt K.* Über den Ralken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift für angewandte Methematik und Mechanik, 1922, Bd. 2, H. 3, s. 165 - 184.
7. *Friswell M. I., Adhikari S. A., Lei Y.* Vibration analysis of beams with non-local foundations using the finite element method// Int. J. for Numerical Methods in Engineering – Vol. 43. N 3. – P. 3381 - 3400.
8. *Потапов В.Д.* К вопросу о расчете балок на нелокально упругом основании// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 4. – С. 63 – 68.
9. *Потапов В.Д., Фимкин А.И., Пепанян А.Р.* Экспериментальная проверка модели нелокально упругого основания// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №5. – С. 63 - 68.

References

1. *Winkler, E.* (1867). Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague.
2. *Zimmerman, H.* (1888). Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. Berlin.
3. *Gersevanov, N.M., Macheret, Ya.A.*(1937). K voprosu o beskonechno dlinnoj balke na uprugoj pochve, nagruzhennoj siloj , *Sbornik NIIS Fundamentostroya*, №8, pp. 3-5.
4. *Gorbunov-Posadov, M.I.* (1940). Raschet balok i plit na uprugom poluprostranstve, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, tom IV, vyp. 3, pp. 61-80.
5. *Pasternak, P. L.* (1954). *Osnovy Novogo Metoda Rascheta Fundamentov na Uprugom Osnovanii pri Pomoshchi Dvuh Koehfficientov Posteli*, M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu i arhitekture, 1954.
6. *Wieghardt, K.* (1922). Über den Ralken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift für angewandte Methematik und Mechanik, Bd. 2, H. 3, s. 165 - 184.
7. *Friswell, M. I., Adhikari, S. A., Lei, Y.* (2006). Vibration analysis of beams with non-local foundations using the finite element method, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.*, Vol. 43, N 3, P. 3381 - 3400.
8. *Potapov, V.D.* (2014). K voprosu o raschete balok na nelokal'no uprugom osnovanii, *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernyh Konstrukcij i Sooruzhenij*, № 4, pp. 63 – 68.
9. *Potapov, V.D., Fimkin, A.I., Pepanyan, A.R.* (2015). Experimental'naya proverka modeli nelokal'no uprugogo osnovaniya, *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernyh Konstrukcij i Sooruzhenij*, №5, pp. 63 - 68.

**VIBRATION OF BEAMS,  
LYING ON THE SOLID NONLOCAL ELASTIC FOUNDATION**

A.A. Vasilenko

Now, the calculation of beams, lying on the solid elastic foundation is fulfilled with using different model of elastic foundation. One of the most common is a model, based on the hypothesis of a proportion between the reaction of the foundation at the point with the coordinate  $x$  and slump at the same point (the hypothesis of Winkler) which however is not accurate enough describes the behavior of structures lying on the solid elastic foundation.

In this paper, we consider the problem of beam vibration, lying on the solid nonlocal elastic foundation. We give a comparison of calculation results, obtained with using the proposed model and the Winkler model.

**Keywords:** beam, solid nonlocal elastic foundation, vibration.