

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГОГО ПОТЕНЦИАЛА СФЕРИЧЕСКИХ РЕЗИНОВЫХ МЕМБРАН

Н.К. ГАЛИМОВ, канд. ф.-м. наук, с.н.с.

С.Н. ЯКУПОВ, научный сотрудник

ФГБУ Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН,

420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, e-mail: imtkazan@mail.ru

Для выполнения расчета на прочность резинотехнических изделий, испытывающих большие деформации, необходимо знать их упругий потенциал  $W$ . Зная деформации исследуемого элемента, можно по формулам Грина, используя потенциал  $W$ , вычислить напряжения. Воспользовавшись потенциалами Муни и Черных К.Ф., по экспериментальным данным испытаний резиновых сферических мембран, нагруженных равномерным давлением, можно определить постоянные этих потенциалов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: резиновая мембрана, упругий потенциал, прочность.

Для выполнения расчета на прочность резинотехнических изделий, испытывающих большие деформации, необходимо знать их упругий потенциал  $W$ . Зная деформации исследуемого элемента, можно по формулам Грина, используя потенциал  $W$ , вычислить напряжения [1]. На сегодняшний день существует около десяти потенциалов [2-7]. Воспользовавшись потенциалами Муни [3] и К.Ф. Черных [4], по экспериментальным данным испытаний резиновых сферических мембран, нагруженных равномерным давлением, можно определить постоянные этих потенциалов. Приведены некоторые результаты.

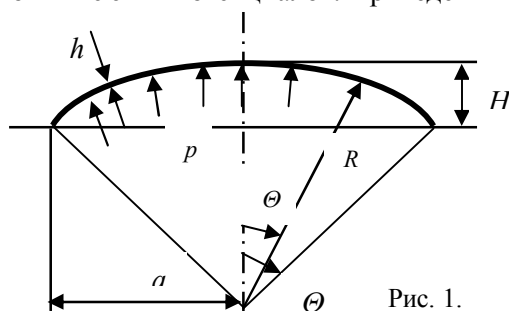


Рис. 1.

1. Рассмотрена защемленная по контуру сферическая резиновая мембрана, находящаяся под давлением  $p$ , со следующими параметрами (рис.1): радиус опорного круга  $a = 36$  мм, толщина стенки  $h = 2.2$  мм, радиус сферы  $R = 55.9$  мм,  $a / R = 0.644$ ,  $H = 13.1$  мм.

Значения безразмерного прогиба  $a^* = w/a$ , давление  $p$ , степень удли-

нения  $\lambda = 1 + \varepsilon(0)$ , напряжения  $\sigma$  в центре мембраны, модуля упругости  $E$  для десяти ступеней нагружения приведены в табл. 1 ( $\varepsilon(0)$  – деформация в центре мембраны). Величины  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $E$  определялись по методике, приведенной в [8].

Вначале была использована методика [4] с потенциалом:

$$W = \mu \left[ (1 + \beta)(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + (1 - \beta)(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) \right],$$

$$\sigma = \mu \left[ (1 + \beta)(\lambda - \lambda^{-2}) - (1 - \beta)(\lambda^{-1} - \lambda^2) \right], \quad (1)$$

где  $\mu$  и  $\beta$  – постоянные потенциала; формулы (1) записаны для центральной точки мембраны. Расчет показал, что при  $\lambda > 1.077$  постоянные  $\mu = 26.3$ ,  $\beta = 5.9$ , а при  $\lambda < 1.077$  –  $\beta = 6.9$ . Напряжения при этих значениях  $\mu$  и  $\beta$  определяются с погрешностью не более чем 2.5%.

Если взять потенциал Муни

$$W = C_1 \cdot J_1 + C_2 \cdot J_2, \quad (2)$$

где  $J_1, J_2$  – первый и второй инварианты тензоры деформаций, то постоянные  $C_1$  и  $C_2$  соответственно равны  $C_1 = 12.9$ ,  $C_2 = 3.3$ . При этом напряжения, вычисленные по этому потенциалу, отличаются от данных табл.1 до 7%.

Если дополнить потенциал (2) слагаемым  $C_3 \cdot J_1 \cdot J_2$ :

Таблица 1

$a^*$	$p$ (кг/см <sup>2</sup> )	$\lambda=1+\varepsilon(0)$	$\sigma$ (кг/см <sup>2</sup> )	$E$ (кг/см <sup>2</sup> )
0.01666	0.1	1.0069	0.697	77.81
0.05388	0.2	1.0239	2.118	68.98
0.08694	0.3	1.0408	3.270	62.93
0.12000	0.4	1.0596	4.360	58.14
0.14944	0.5	1.0777	5.310	54.65
0.23555	0.8	1.1139	8.090	47.50
0.29694	1.0	1.1910	10.17	43.95
0.43972	1.5	1.3430	16.68	40.70
0.51305	1.7	1.4460	20.54	38.73
0.65333	2.0	1.6780	30.30	35.64

$$W = C_1 \cdot J_1 + C_2 \cdot J_2 + C_3 \cdot J_1 \cdot J_2 \quad (3)$$

то постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  соответственно будут равны  $C_1 = 11.6$ ,  $C_2 = 1.4$ ,  $C_3 = 0.47$ . При этом напряжения по модифицированному потенциалу (3) отличаются от данных в табл.1 не более, чем на 2%. Напряжения были вычислены по формулам приведенным в [3].

2. Рассмотрена заземленная по контуру сферическая резиновая мембрана, находящаяся под давлением  $p$ , со следующими параметрами (рис.1): радиус опорного круга  $a = 36$  мм, толщина стенки  $h = 0.6$  мм, радиус сферы  $R = 70.5$  мм,  $a/R = 0.51$ ,  $H=9.9$ мм. В табл. 2 приведены экспериментальные данные, а на рис.2 даны кривые изменения  $\sigma$  и  $E$  в зависимости от  $\lambda$ .

Расчет по методике [4] дал следующие значения  $\mu = 0.881$ ,  $\beta = 14.1$ .

Кривая для напряжений, подсчитанных по (1) и экспериментальные данные (они указаны на рис.3 точками) хорошо согласуются между собой, максимальное расхождение составляет 10%. Далее был рассмотрен потенциал (3) с дополнительным членом и определены постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ :  $C_1 = 17.5$ ,  $C_2 = -1.2$ ,  $C_3 = 0.67$ . При этом напряжения расчета и эксперимента хорошо согласуются между собой и отличаются не более чем на 2%.

Таблица 2

$a^*$	$p$ (кг/см <sup>2</sup> )	$\lambda=1+\varepsilon(0)$	$\sigma$ (кг/см <sup>2</sup> )	$E$ (кг/см <sup>2</sup> )
0.12	0.10	1.0486	4.55	54.3
0.16	0.14	1.0669	6.08	52.7
0.21	0.20	1.0979	8.27	48.9
0.25	0.24	1.1180	9.75	47.6
0.30	0.30	1.1540	12.04	44.6
0.33	0.34	1.1760	13.67	43.9
0.39	0.40	1.2180	16.36	41.7
0.43	0.44	1.2520	18.44	40.0
0.50	0.50	1.3160	22.32	37.2
0.58	0.54	1.4000	26.90	33.2

3. В работе [3] даются результаты из [2], полученные при испытании плоской мембраны. В [3] указаны значения  $C_1 = 3.8$ ,  $C_2 = 0.2$  (на рис.4 обозначено через  $\sigma_2$ ). Для потенциала  $W = C_1 \cdot J_1 + C_2 \cdot J_2 - C_3 \cdot J_1^2 + C_4 \cdot J_1^3$  в [3] приведены значения  $C_1 = 3.8$ ,  $C_2 = 0.2$ ,  $C_3 = 0.076$ ,  $C_4 = 3.68 \cdot 10^{-3}$  (на рис. 4 соответствует кривой  $\sigma_1$ ). По этим данным был построен график (рис.4) для напряжений в центре мембраны.

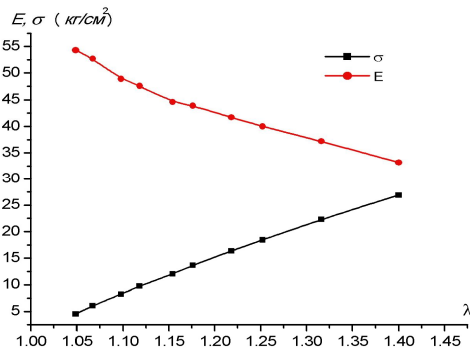


Рис. 2. Зависимости  $\sigma$  и  $E$  от  $\lambda$

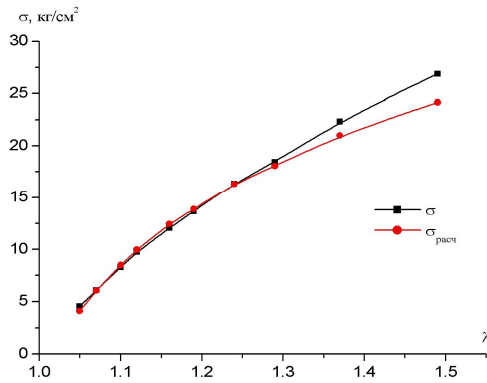


Рис. 3. Зависимость напряжений от  $\lambda$

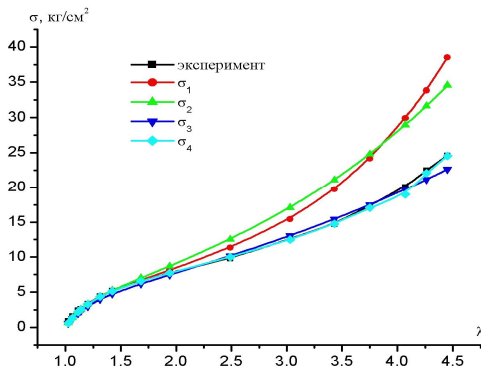


Рис. 4. Зависимости  $\sigma$  от  $\lambda$  для различных потенциалов

Анализ этих результатов показал, что эти расчетные напряжения не очень хорошо согласуются с экспериментальными данными. По данным [3] были пересчитаны эти коэффициенты. Оказалось, что для потенциала (2) постоянные соответственно равны  $C_1 = 3,63888$ ;  $C_2 = 0,0781709$  (на рис. 4 соответствует кривая  $\sigma_3$ ), а для потенциала [3] получено:  $C_1 = 3,83016$ ;  $C_2 = 0,228757$ ;  $C_3 = 0,146339$ ,  $C_4 = 0,00250274$ , на рис. 4 соответствует кривая  $\sigma_4$ . При этих значениях расчетные кривые хорошо согласуются с экспериментальными данными

(рис. 4.), особенно для потенциала [3]. Эта кривая практически проходит через экспериментальные точки.

**Заключение.** Рассмотренные выше потенциалы (3) и [3] хорошо описывают поведение резиновых образцов, находящихся под действием распределенного давления и могут быть использованы в расчетной практике.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. ОГИЗ ГИТТЛ, М., 1947, 464с.
2. Трелоар. Физика упругости каучука. – Изд-во «ИЛ», 1953г. 336с.
3. Расчёты на прочность в машиностроении. – Т.2. Изд-во «Машгиз», 1958, 944с.
4. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Изд-во «Машиностроение». 1986. 216с.
5. Грин А., Адкинс Дж. Большие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Изд-во «Мир», 1976. 464с.
6. Дж. Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Изд-во «Мир», 1976. – 464с.
7. Simo J.C., Laursen T.A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction// Comput. and Structures, 1992. V.42, N1. P.97-116.
8. Галимов Н.К., Якупов С.Н. Исследование механических характеристик сферических мембран из резиноподобных материалов// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2008. – №3. – С.73-76.

### ON THE DETERMINATION OF ELASTIC POTENTIAL OF SPHERICAL RUBBER MEMBRANES

N.K. Galimov, S. N. Yakupov

If one wants to make strength analysis of rubber membrane having large deformation, he must know the elastic potential. Having used potentials of Mooney and K.F. Chernyh, the authors defined the constants of these potentials with the help of the experiments.

KEY WORDS: rubber membrane, elastic potential, strength, large deformation.