

Численные методы расчета конструкций

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛОНН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ОБЪЕМНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

В.П. АГАПОВ¹, *докт. техн. наук, профессор*

А.В. ВАСИЛЬЕВ², *инженер-конструктор*

¹*Московский государственный строительный университет*

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26; E-mail: agapovpb@mail.ru

Предлагается новый подход к моделированию колонн прямоугольного поперечного сечения при расчете строительных конструкций методом конечных элементов. При этом каждая колонна представляется совокупностью объемных конечных элементов в виде шестигранников с произвольной разбивкой по сечению и высоте. Промежуточные узлы сетки конечных элементов колонны исключаются на стадии формирования ее матричных характеристик. В результате этого при незначительном увеличении числа степеней свободы конструкции удастся избавиться от недостатков, присущих традиционному способу моделирования колонн одномерными элементами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: строительные конструкции, колонны прямоугольного сечения, метод конечных элементов, суперэлементы.

Теория сопротивления материалов сыграла большую роль в становлении, развитии и практической реализации компьютерных методов расчета стержней и стержневых систем на прочность[1]. В подавляющем большинстве программ метода конечных элементов стержни моделируются одномерными элементами, матрица жесткости которых строится на основе гипотезы плоских сечений, а концевые усилия приводятся к центрам тяжести поперечных сечений[2,3]. Такой подход позволил создать эффективные алгоритмы, но он не лишен недостатков. Основные из них заключаются в следующем:

1) некорректная (в точке) передача усилий со стержней на плиты, оболочки и массивные элементы конструкций; 2) проблематичность учета деформации сечений для стержней некруглого сечения; 3) трудность учета деформаций поперечного сдвига при косом изгибе; 4) сложность учета физической и геометрической нелинейности.

Предлагается способ построения конечного элемента колонны прямоугольного сечения, позволяющий избежать указанных недостатков. Колонна моделируется объемными элементами, как показано на рис.1. Число разбиений

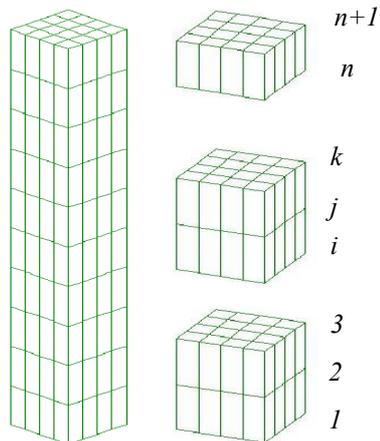


Рис.1

Рис.2

по высоте колонны и по сечению может быть произвольным. Разделим колонну по высоте на слои (рис.2). Границы между слоями пронумеруем от 1 до $n + 1$, где n - число разбиений по высоте.

Для каждого слоя стандартным образом можно сформировать матрицу жесткости и вектор нагрузки такие, что

$$\{f\} = [k]\{\delta\} + \{\bar{f}\}, \quad (1)$$

где $\{f\}$ - вектор узловых сил, $\{\delta\}$ - вектор узловых перемещений, $[k]$ - матрица жесткости слоя, $\{\bar{f}\}$ - вектор узловых сил от пролетной нагрузки (на рис. 1 и 2 пролетная нагрузка не показана).

Для двух соседних слоев $i - j$ и $j - k$ имеем

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_j^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} \\ \bar{f}_j^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} f_j^{(2)} \\ f_k^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,2}^{(2)} \\ k_{2,1}^{(2)} & k_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_j^{(1)} \\ \bar{f}_k^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) находим

$$\{f_i^{(1)}\} = [k_{1,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{1,2}^{(1)}]\{\delta_j\} + \{\bar{f}_i^{(1)}\}, \quad (4)$$

$$\{f_j^{(1)}\} = [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)}]\{\delta_j\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\}, \quad (5)$$

$$\{f_j^{(2)}\} = [k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\}, \quad (6)$$

$$\{f_k^{(2)}\} = [k_{2,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{2,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_k^{(2)}\}. \quad (7)$$

Суммируя (5) и (6), находим вектор узловых сил в сечении j

$$\begin{aligned} \{f_j\} = \{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} &= [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + \\ &+ [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\} \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия равновесия узла j

$$\{f_j\} = \{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} = 0. \quad (9)$$

Обозначая $[k_{j,j}] = [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}], \quad (10)$

и используя условие (9), из формулы (8) выражаем подвектор $\{\delta_j\}$:

$$\{\delta_j\} = [k_{j,j}]^{-1} \left([k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} \right) + [k_{j,j}]^{-1} \left(\{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\} \right). \quad (11)$$

Подставляя формулу (11) в формулы (2) и (3) и выражая из первой строки формулы (2) вектор $\{f_i^{(1)}\}$, а из второй строки формулы (3) вектор $\{f_k^{(2)}\}$, получаем

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_k^{(2)} \end{Bmatrix} = [k_{i,k}] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$[k_{i,k}] = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} - k_{1,2}^{(1)}k_{j,j}^{-1}k_{2,1}^{(1)} & -k_{1,2}^{(1)}k_{j,j}^{-1}k_{1,2}^{(2)} \\ -k_{2,1}^{(2)}k_{j,j}^{-1}k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} - k_{2,1}^{(2)}k_{j,j}^{-1}k_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

есть матрица жесткости слоя $i - k$,

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} - k_{1,2}^{(1)}k_{j,j}^{-1} \left\{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \right\} \\ \bar{f}_k^{(2)} - k_{2,1}^{(2)}k_{j,j}^{-1} \left\{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \right\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

есть вектор пролетной нагрузки на участке $i - k$, приведенный к узлам i и k .

Применяя описанные выше операции к каждой паре соседних слоев, начиная с нижних, и исключая последовательно узлы на границе слоев, на последнем этапе получим матрицу жесткости и вектор нагрузок, приведенные к началу и концу конечного элемента (к узлам нижнего и верхнего сечений колонны).

Описанный выше конечный элемент реализован в вычислительном комплексе ПРИНС[4]. Для проверки работоспособности разработанного элемента рассчитана конструкция, состоящая из двух квадратных плит и расположенных между ними четырех колонн. В первом варианте расчета использовалась традиционная расчетная схема, т.е. колонны моделировались одномерными балочными элементами (рис.3). Во втором варианте колонны моделировались описанными выше объемными элементами (рис.4).

Толщина плит принималась равной 150 мм, колонны имели сечение 300×300 мм; нижняя плита имела шарнирное опирание по контуру; обе плиты нагружались равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 1 $КПа$; в качестве материала конструкции использовался бетон с модулем упругости $E = 3 \times 10^7$ $КПа$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.2$; длина стороны плиты равнялась 9,6 м.

Результаты расчетов сравнивались по прогибам и напряжением. Максимальный прогиб в центре нижней плиты в первом варианте составил 5,86 мм, во втором – 5,47 мм. На рис.5 и 6 показано распределение интенсивности напряжений на верхней поверхности нижней плиты за исключением участков под подошвой четырех колонн для первого и второго вариантов расчета, соответственно. Как видно из рис.5 и 6, характер распределения напряжений и их числовые значения за пределами зоны опирания колонн практически совпадают.

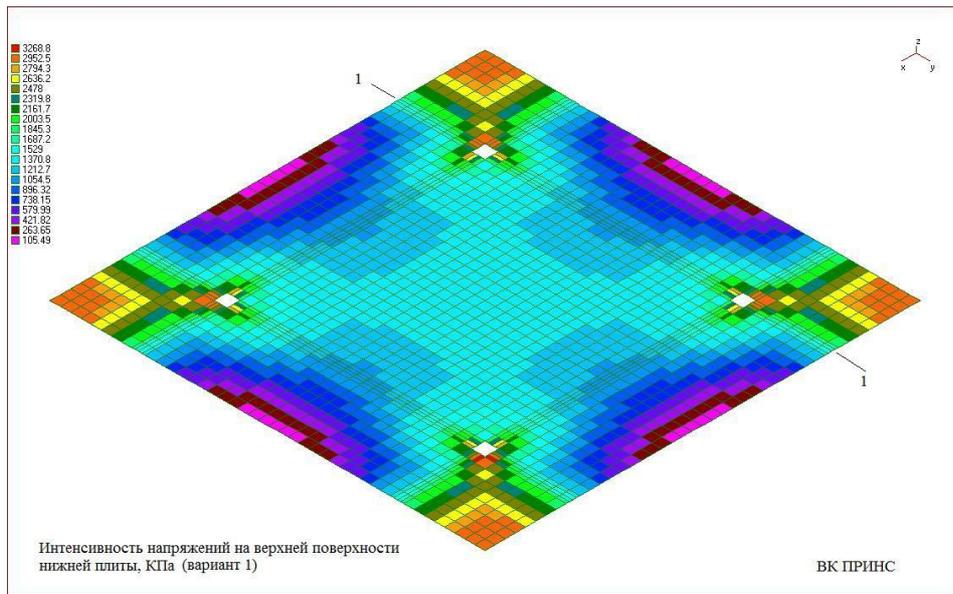


Рис.3

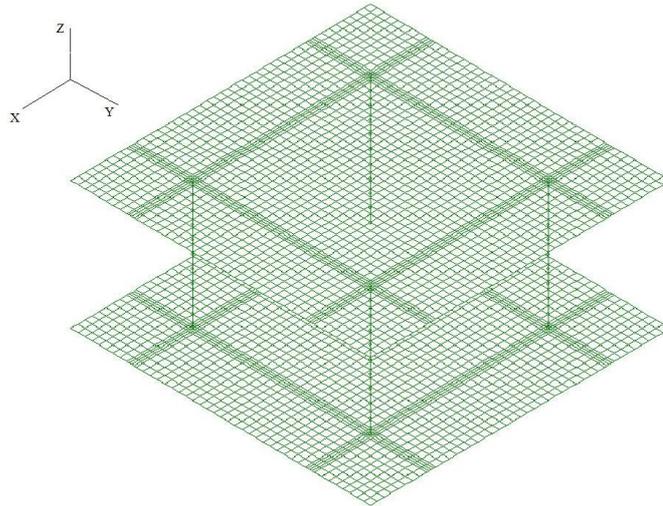


Рис. 4

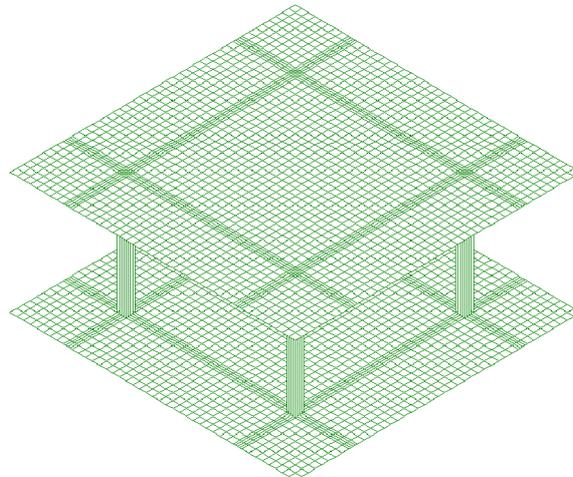


Рис. 5

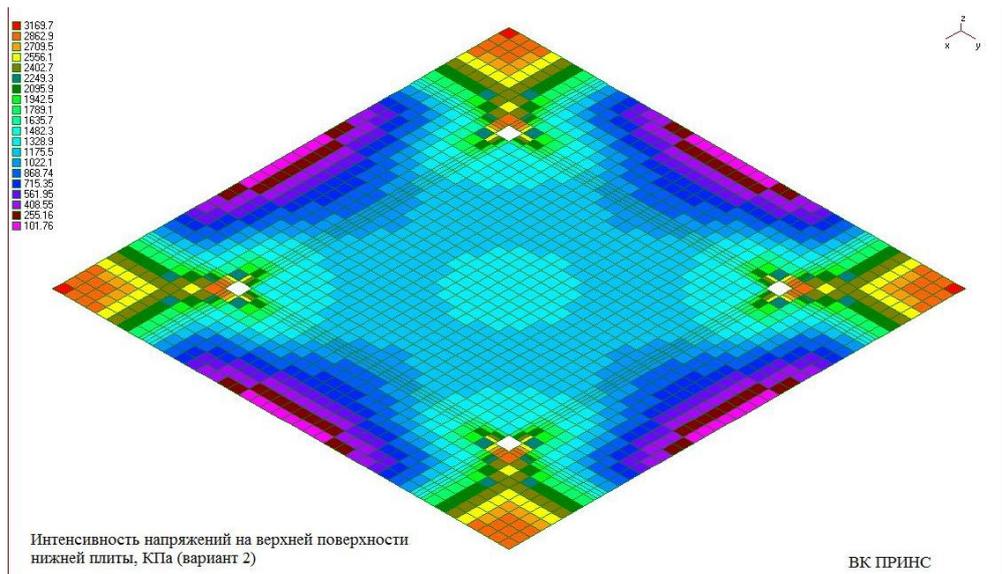


Рис.6

Однако на участках плиты, расположенных под подошвой колонн, напряжения в двух вариантах расчета отличаются существенно. Это различие иллюстрируется на рис.7 и 8.

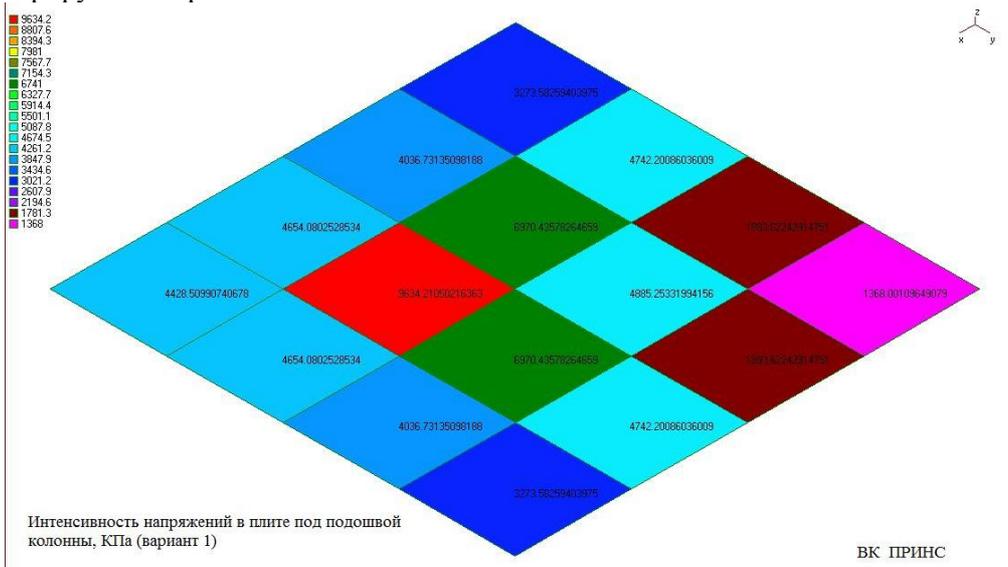


Рис.7

На рис.7 показаны интенсивности напряжений в окрестности точки присоединения оси колонны в первом варианте расчетной схемы. Максимальное значение интенсивности напряжения в этом варианте равно 9634 КПа. На рис.8 приведены значения напряжения под подошвой колонны во втором варианте. В этом случае максимальное значение напряжения равно 3555 КПа.

Для большей наглядности картины распределения напряжений в окрестности соединения колонн с плитами на рис.9 приведена эпюра нормальных напряжений σ_x на верхней поверхности нижней плиты для сечения 1-1 при $x = 1,95$ м (рис.10). Как и следовало ожидать, при использовании одномерной модели колонн имеет место значительная концентрация напряжений в окрестности точки присоединения колонны к плите. Результаты, получаемые для указанной области, являются недостоверными, и это создает проблемы при выборе

размеров сечений и арматуры, особенно при использовании автоматизированных систем расчета на прочность.

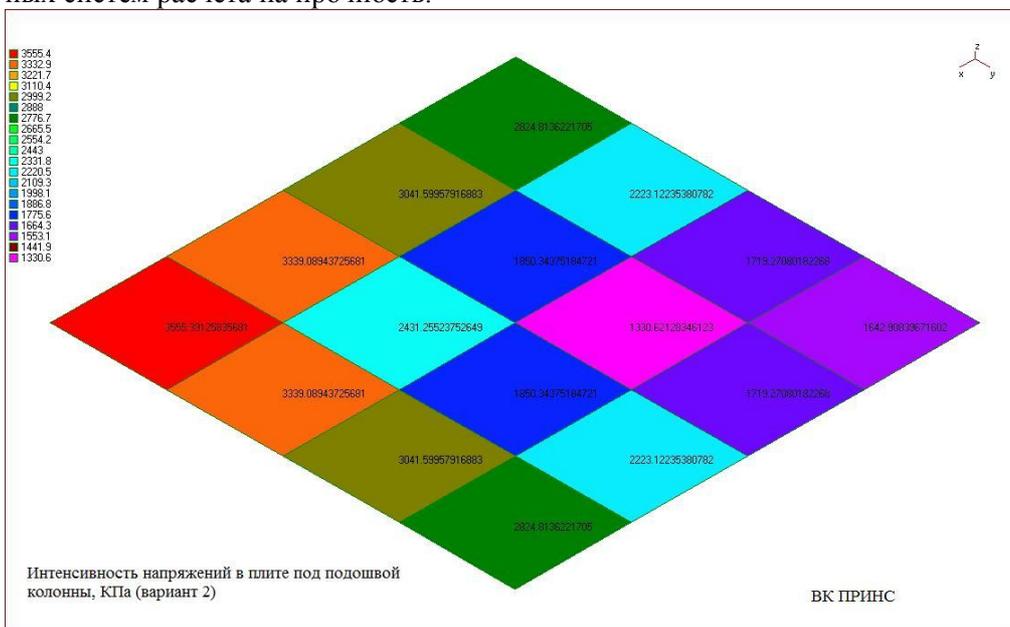


Рис.8

Эпюра напряжений S_{yy} , КПа
(сечение $x=1,95$ м)

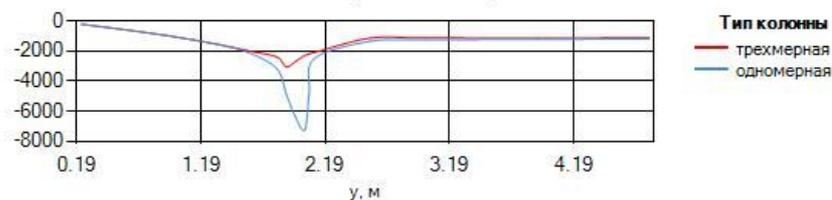


Рис.9

Предлагаемый способ моделирования колонн позволяет избежать подобных проблем.

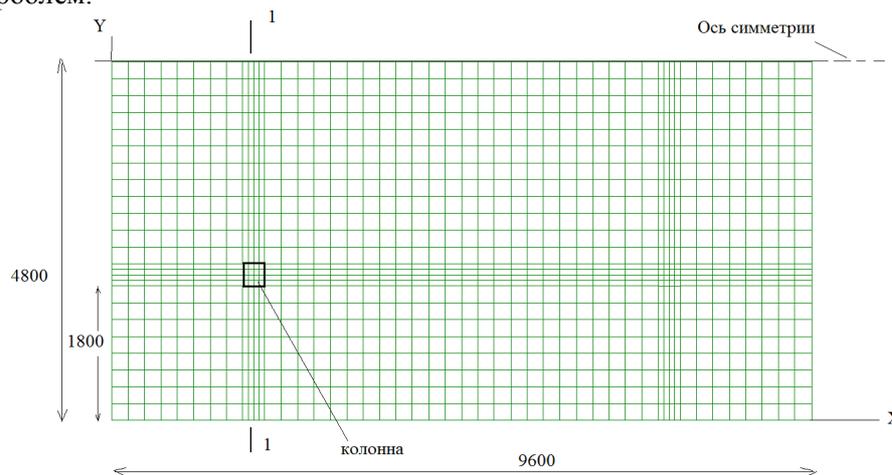


Рис.10

Л и т е р а т у р а

1. *Филин А. П.* Матрицы в статике стержневых систем.- Издательство литературы по строительству. – М.- Л., 1966. - 438 с.

2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. - McGraw-Hill, 2005. - 631 p.
3. K.J.Bathe. Finite Element Procedures. – Prentice Hall, Inc., 1996. – 1037p.
4. Агапов В.П. Исследование прочности пространственных конструкций в линейной и нелинейной постановках с использованием вычислительного комплекса «ПРИНС». Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение)// Сб. статей, вып. 11 / МОУ «Пространственные конструкции», - Под ред. В.В. Шугаева и др. – М., 2008. – С. 57-67.

MODELING OF THE RECTANGULAR COLUMNS BY THE THREE-DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS WITH THE USING OF THE SUPERELEMENT TECHNIQUE

Agapov V.P., Vasiliev A.V.

The new approach to rectangular column modeling in finite element analysis of building structures is suggested. Each column is presented by the set of the volume 8-node elements with arbitrary discretization on the cross section and on the height of the column. The inner nodes of the finite element mesh are excluded sequentially layer by layer, thus reducing the stiffness matrix and other characteristics of the column to its top and bottom cross sections.

KEY WORDS: building structures, columns of the rectangular cross section, finite element method, superelements.



Динамика конструкций и сооружений

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С КОНСТРУКТИВНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Г.В. ДЕНИСОВ, аспирант,
В.В. ЛАЛИН, д-р техн. наук, профессор
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
г. Санкт-Петербург, Богатырский пр., д. 25, к.1, кв. 209, oxoxox@mail.ru

В статье рассматривается динамическое поведение подземного участка трубопровода с конструктивным включением. Показано, что сейсмическое воздействие может привести к возникновению локальных колебаний конструктивного включения, при относительно покоящемся трубопроводе, что может быть определяющим фактором при обеспечении прочности сооружения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: трубопровод, конструктивное включение, колебания, прочность.

Развитие трубопроводной системы и связанное с этим совершенствование технологий возведения и проектирования, применение новых материалов, строительство в сейсмически опасных районах, приводит к необходимости совершенствования расчетного аппарата.

Результаты обследований реальных подземных трубопроводов, перенесших землетрясение, позволяют заключить, что наиболее опасными с точки зрения обеспечения прочности при динамических воздействиях являются зоны примыкания к другим сооружениям или конструктивным включениям [1]. Это подтверждается рядом современных математических исследований. К, примеру, работы [2, 3].