

## ДИНАМИКА УПРУГО-АКУСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.В. ШЛЫЧКОВ, канд. техн. наук, доцент  
Марийский государственный технический университет, г.Йошкар-Ола  
shlychkovsv@marstu.net

*В работе исследуются динамические свойства оболочки и заполняющей ее акустической среды, как связанной упруго-акустической системы. Расчетная модель создана на базе метода конечных элементов. В диапазоне до 50 Гц определен и сопоставлен спектр колебаний парциальных и связанной систем. Установлено, что только области низших частот поведение связанной системы подобно парциальным.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оболочка, акустическая среда, КЭ, собственные колебания.

### Введение

Работа посвящена исследованию динамического поведения связанных упруго-акустических систем. Под связанной будем понимать систему, состоящую из двух или более сопряженных областей. При этом для любого момента времени поведение одной системы оказывает влияние на поведение другой и наоборот [1]. Расчет подобных систем актуален в самых различных областях техники. Сюда можно отнести течение жидкости в меняющей геометрию трубе

(жидкостно-структурный анализ), проектирование пьезодатчиков – определение напряжений, возникающих вследствие заданных смещений и наоборот (пьезоэлектрический анализ), исследования индукционного нагрева (магнитно-тепловой анализ), колебания линий электропередач и опорных конструкций и т.п. Чаще всего для решения подобных задач используется последовательный метод, представляющий два (или более) последовательных анализа, принадлежащих к разным инженерным дисциплинам. При этом результаты решения первого анализа в одной системе используются в качестве нагрузок для другой системы. Например, при расчете деформаций плиты вследствие течения потока жидкости над ней, сначала производится расчет давлений, возникающих от потока жидкости, а затем полученное поле давлений используется для структурного анализа плиты. Однако при этом не учитываются начальные деформации плиты, возникающие вследствие потока жидкости. Эти деформации меняют геометрию потока и соответственно величины давлений, действующих на плиту, но поскольку эти деформации малы, то на практике ими пренебрегают. В таких случаях системы можно считать слабосвязанными (слабо-сопряженными). В ряде других случаев корректного решения задачи таким путем достичь не удастся. Это относится к примерам, когда результаты второго анализа меняют вводные данные для первого анализа. Считается, что такие системы обладают сильной степенью связанности. Целью настоящего исследования является проведение сравнительного анализа между парциальными [2] и связанными упруго-акустическими системами, на основании которого возможно установление их степени связанности. Она является логическим продолжением и развитием работы [3].

#### Расчетная модель

Рассматривается цилиндрическая изотропная оболочка с размерами: длина - 5,247 м, толщина - 0,002 м, радиус - 2,05 м. Для качественного анализа получаемых результатов геометрия оболочки, её граничные условия соответствуют рассмотренным в работе [4]. Торцы оболочки считаются шарнирно-опертыми, внутренняя полость оболочки полностью заполнена акустической средой. Численные исследования проведены с помощью метода конечных элементов посредством программного комплекса ANSYS. Дискретная модель, представленная на рис.1, состоит из 308 оболочечных конечных элементов (КЭ) Shell 93 и 4657 объемных акустических КЭ Fluid 30.

Уравнения динамики для акустической полости, ограниченной упругой ограждающей конструкцией, записанные в матричной форме [5], имеют вид

$$[M^f] \ddot{q} + [K^f] q - \rho [L]^T p = 0. \quad (1)$$

Здесь  $[M^f]$  – матрица масс акустических КЭ,  $[K^f]$  – матрица жесткости акустических КЭ,  $\{p\}$  – вектор узловых давлений,  $\{q\}$  – вектор узловых перемещений,  $\rho$  – плотность акустической среды,  $[L]^T$  – добавленная матрица масс, учитывающая взаимодействие между граничными КЭ конструкции и КЭ акустической полости. При этом

$$[L]^T = \int_A \Phi_n^T \Phi_n^T dA, \quad (2)$$

где  $\Phi_n^T$  – функции формы перемещений оболочечного КЭ,  $\Phi_n^T$  – функции формы давления акустического КЭ,  $\{n\}$  – это вектор направляющих косинусов нормали к поверхности оболочки, взаимодействующей с акустической средой,  $A$  – площадь пограничной поверхности между оболочкой и акустической средой.

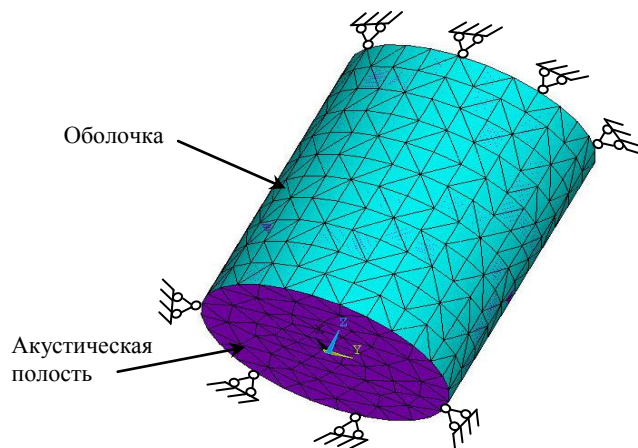


Рис. 1. Конечно-элементная модель оболочки и внутренней акустической полости

Уравнения движения для оболочечной конструкции, ограждающей акустическую среду, записываются в виде

$$\mathbf{M}^s \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^s \mathbf{q} = \mathbf{R}^{fs} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{M}^s$  – матрица масс оболочечных КЭ,  $\mathbf{K}^s$  – матрица жесткости оболочечных КЭ,  $\mathbf{R}^{fs}$  – вектор нагрузок, инициируемых давлением со стороны акустической полости на внутреннюю поверхность оболочки, определяется формулой:

$$\mathbf{R}^{fs} = \int_A \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P} \mathbf{n} dA, \quad (4)$$

где  $P$  – величина давления внутри оболочки. С учетом конечно-элементной формулировки  $P = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{A}$  формула (4) переписывается в виде

$$\mathbf{R}^{fs} = \int_A \mathbf{\Phi}^T \mathbf{A} \mathbf{n} dA \quad (5)$$

Сопоставляя выражения (2) и (5) можно сделать вывод, что выражение для вектора нагрузок (4) может быть представлено в форме

$$\mathbf{R}^{fs} = \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (6)$$

Учитывая формулировку (6), уравнения динамики упругой (3) и акустической систем (1) в связанной постановке запишутся в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^s & 0 \\ \rho \mathbf{L}^T & \mathbf{M}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{A}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & -\mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{K}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{A} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Матрицы жесткости и масс для связанного ансамбля КЭ (7) получаются несимметричными в отличие от парциальных систем (1) и (3). В этой связи для решения задачи (7) на собственные значения необходимо включение специальной опции, направленной на использование алгоритма Ланцоша [6].

### Результаты численных исследований

С помощью построенной расчетной динамической модели определены низшие собственные частоты и формы колебаний (моды) для связанной системы (СС) и парциальных систем: акустическая полость, оболочка. Полученные спектры колебаний сопоставлены друг с другом, результаты систематизированы. Исследованы несколько вариантов СС с акустическими средами различных физических свойств: воздух, хлор и гелий.

Считаем: плотность хлора  $\rho = 3,22 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука в хлоре  $c = 206 \text{ м/с}$ ; плотность воздуха  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука в воздухе  $c = 333 \text{ м/с}$ ; плотность гелия  $\rho = 0,18 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука в гелии  $c = 970 \text{ м/с}$ . Эти варианты позволяют проанализировать случаи сильно и слабо перекрывающихся частотных спектров оболочки и полости.

Таблица 1

Собственные частоты, Гц					
Оболочка		Воздушная полость		СС	
Мода	Частота ( )	Мода	Частота ( )	Мода	Частота (к)
1	14,7/14,7			2	18,2/18,2
2	15,3/15,3			1	17,8/17,8
3	15,5/15,5			4	20,1/20,1
4	17,0/17,0			3	18,8/18,8
5	17,9/18,0			6	23,8/23,8
6	19,7/19,7			5	20,9/20,9
7	22,3/22,3			10	29,9/29,9
8	23,2/23,2			7	24/24,1
9	27,3			8	27,5
10	28,1			9	29,2
11	28,3/28,3			12	30,8/30,9
12	28,7/28,7			-	-
13	28,9/29,2			-	-
14	29,2/29,2			11	30,7/31,1
15	30,1/30,1			-	-
16	30,6/30,6			14	31,9
		1	31,8	13	31,5
17	33,2/33,2			15	33,8/33,9
18	34,3/34,3			16	34,6
19	37,2			-	-
20	37,3			17	37,4
21	38,0			-	-
22	38,1/38,1			-	-
23	38,8			-	-
24	39,5/39,5			19	39,3
25	39,9/40,0			18	39,1
26	40,1/40,1			20	40,5
27	40,3/40,3			21	41,5
28	44,2/44,2			22	42,8
29	45,1/45,1			-	-
30	47,7/47,9			23	45,8
		2	48	24	47,2
		2	48,1	24	48
31	48,1			-	-
32	48,8/48,8			-	-
33	49,7			-	-
34	49,9/50,0			-	-

Важность и необходимость учета этого обстоятельства отмечается в работе [7]. Таким образом, в случае с оболочкой, заполненной хлором, в диапазон до 50 Гц входит 5 собственных частот акустической полости, в то же время для оболочки с гелием, в этот диапазон акустические частоты не попадают, они находятся в полосе более высоких частот. Воздушная полость занимает промежуточное положение. Для оболочки в расчетах принимаем модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Анализ проведенных численных исследований для оболочки, заполненной воздухом, позволил систематизировать полученные результаты в табл. 1. В ней

представлены собственные частоты, рассчитанные отдельно для оболочки, воздушной полости и СС. Символом дроби разделяются кратные частоты. Частоты СС, формы колебаний которой можно однозначно интерпретировать, как оболочечные или акустические представлены в соответствующих строках табл. 1. Курсивом обозначены частоты и моды СС, которые не удается идентифицировать как оболочечные или акустические. В дальнейшем будем считать их модами СС. Прочерки означают отсутствие колебаний СС по оболочечной моде данной строки. Графическая интерпретация результатов отражена на рис.2. Каждый маркер соответствует собственным колебаниям системы в диапазоне до 50 Гц. Закрашенные маркеры соответствуют частотам парциальных систем, бесцветные маркеры – частотам СС, при этом форма маркера показывает качественный характер соответствующей моды. Бесцветный кружок означает, что колебания связанной системы происходят по оболочечной моде, бесцветный треугольник – по акустической моде. Квадрат соответствует качественно иным нехарактерным для парциальных систем формам колебаний – модам СС.

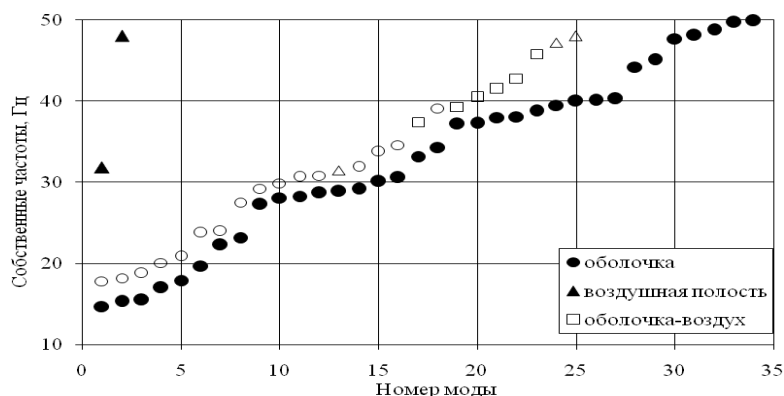


Рис.2. Собственные частоты парциальных и связанной упруго-акустической системы: оболочка - воздух

Анализ представленных в таблице данных и форм колебаний позволяет сделать следующие выводы. В области низших частот (до 30 Гц) моды СС достаточно точно повторяют оболочечные формы. При этом наблюдается сдвиг вверх по частотной шкале:  $\nu_1 = 14,7$  Гц, а  $\kappa_1 = 17,8$  Гц. Видимо, это объясняется влиянием воздушного столба, придающего СС дополнительную жесткость. Его две низшие формы колебаний представлены на рис.3. Кроме того происходит смещение частот: первая мода СС является второй оболочечной формой колебаний ( $\nu_2 = 15,3$  Гц), что и определяет ее позицию во второй графе таблицы.

Сопоставление 14 оболочечной моды ( $\nu_{14} = 29,2$  Гц, рис.4) и 11 моды СС ( $\kappa_{11} = 31,1$  Гц, рис.5) или 16 оболочечной моды ( $\nu_{16} = 30,6$  Гц, рис.4) и 14 моды СС ( $\kappa_{14} = 31,9$  Гц, рис.5) позволяет убедиться в их сходстве.

На первой резонансной частоте воздушной полости ( $\omega_1 = 31,8$  Гц, рис.3) СС реагирует по 13 форме ( $\kappa_{13} = 31,5$  Гц, рис.5). Соответствующая форма колебаний не имеет упорядоченных узлов и пучностей и, видимо, не является оболочечной формой колебаний (рис.4). Следует отметить хаотический характер этого поля виброперемещений, которое является симбиозом ближайших мод. Поле давлений, представленное на рис.5 снизу, в отличие от виброполя, повторяет первую акустическую моду ( $\omega_1 = 31,8$  Гц, рис.3) парциальной системы. Таким образом, 13 мода – это реакция СС на первую собственную частоту воздушной полости. Следовательно, реакция СС на частоте  $\kappa_{13} = 31,5$  Гц инициируется воздушной полостью, мода которой четко идентифицируется и является домини-

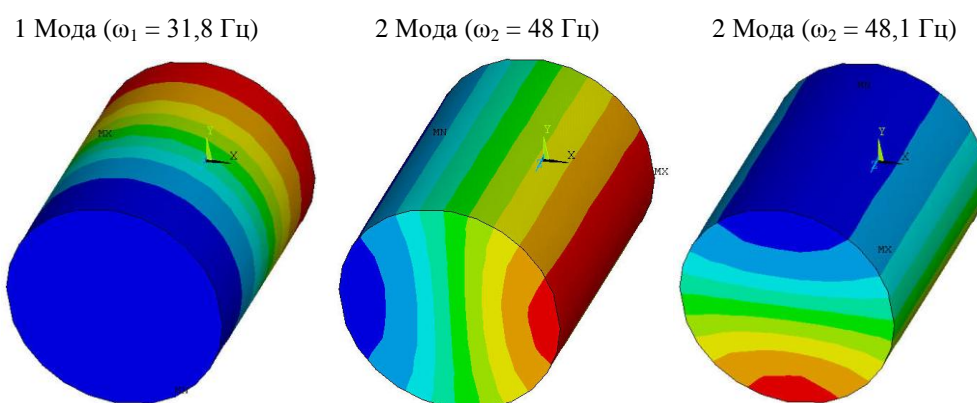


Рис.3. Формы колебаний воздушной полости

рующей по отношению к оболочечной. Поэтому на рис.2 соответствующий бесцветный маркер имеет треугольную форму. Но уже 14 мода СС ( $\kappa_{14} = 31,9$  Гц, рис.5) четко определяется как 16 оболочечная ( $\nu_{16} = 30,6$  Гц, рис.4). При этом поле давлений, показанное на рис.5, инициируется виброперемещениями 14 моды, поэтому на рис.2 соответствующий бесцветный маркер имеет круглую форму.

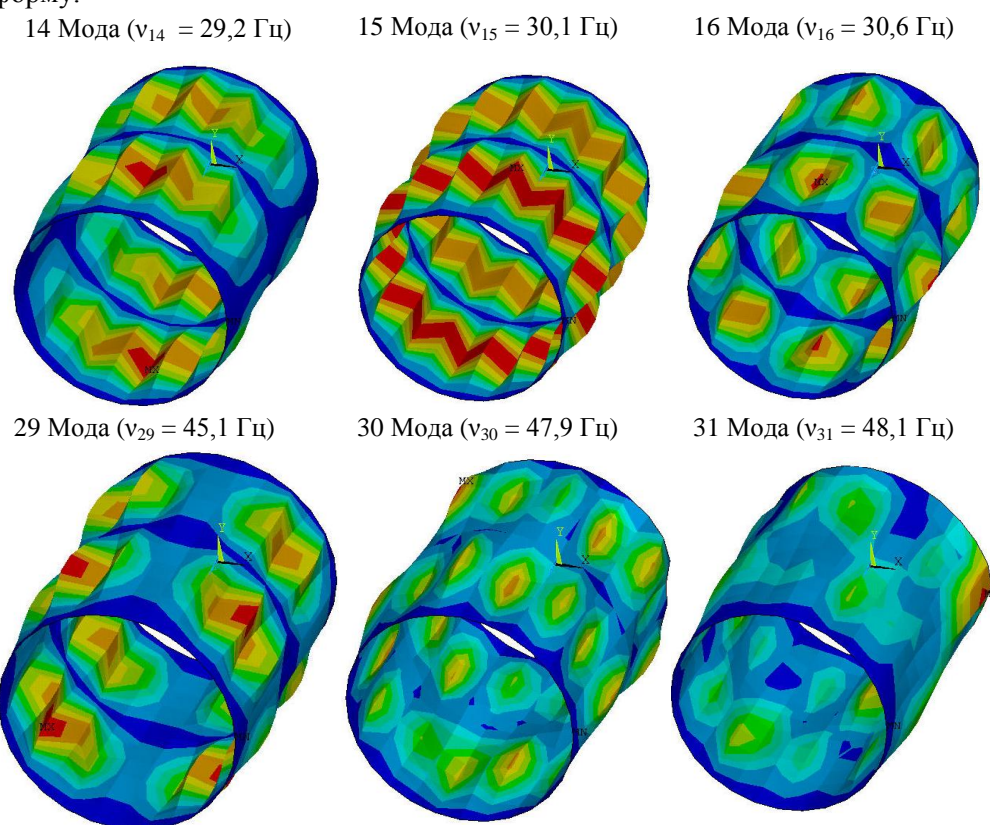


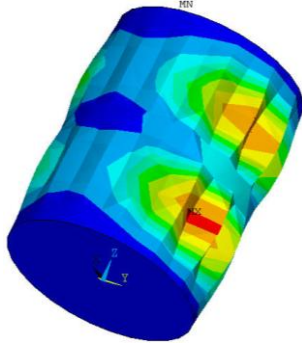
Рис.4. Формы колебаний оболочки

Анализ форм колебаний СС в окрестности второго акустического резонанса ( $\omega_2 = 48$  Гц) позволил выявить следующие особенности.

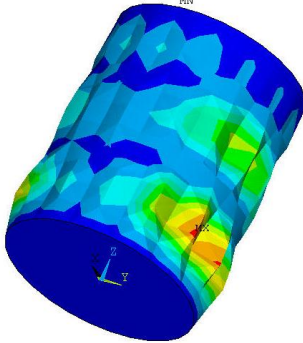
Поля виброперемещений имеют хаотический характер (рис.5 сверху, 23-24 моды), поля давлений (рис.4, снизу) повторяют вторую акустическую моду (рис.3). Следовательно, реакция СС на частоте ( $\kappa_{24} = 47,2 \div 48$  Гц) инициируется

Поля виброперемещений

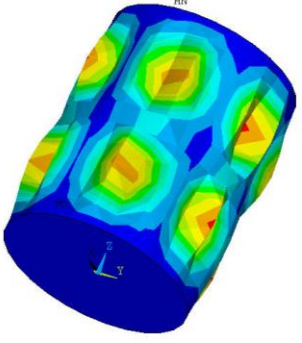
11 Мода ( $\kappa_{11} = 31,1$  Гц)



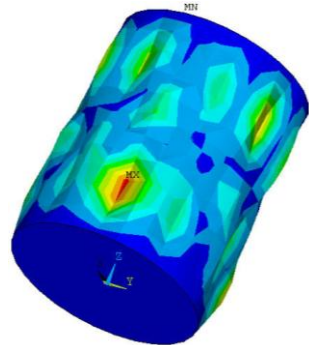
13 Мода ( $\kappa_{13} = 31,5$  Гц)



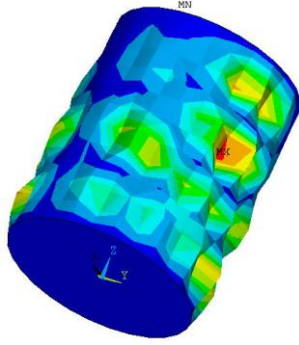
14 Мода ( $\kappa_{14} = 31,9$  Гц)



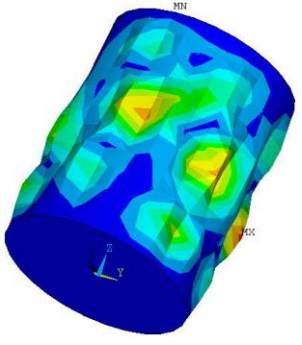
23 Мода ( $\kappa_{23} = 45,8$  Гц)



24 Мода ( $\kappa_{24} = 47,2$  Гц)

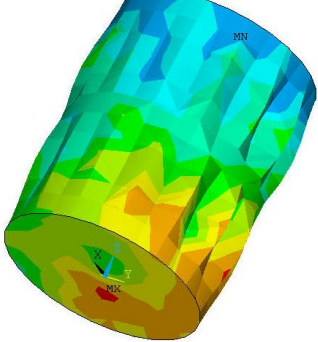


24 Мода ( $\kappa_{24} = 48$  Гц)

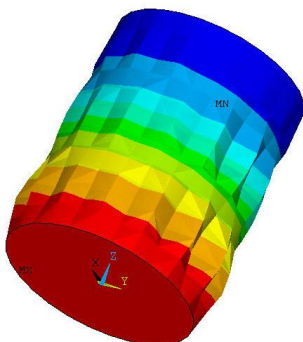


Поля давлений

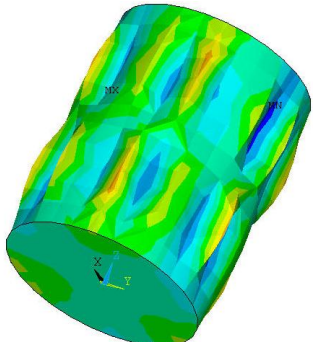
11 Мода ( $\kappa_{11} = 31,1$  Гц)



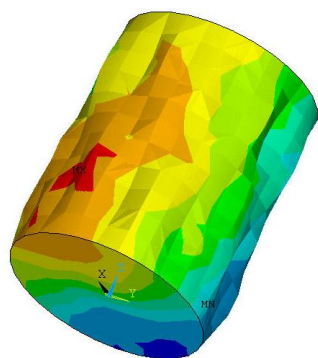
13 Мода ( $\kappa_{13} = 31,5$  Гц)



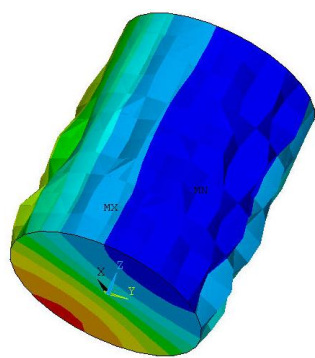
14 Мода ( $\kappa_{14} = 31,9$  Гц)



23 Мода ( $\kappa_{23} = 45,8$  Гц)



24 Мода ( $\kappa_{24} = 47,2$  Гц)



24 Мода ( $\kappa_{24} = 48$  Гц)

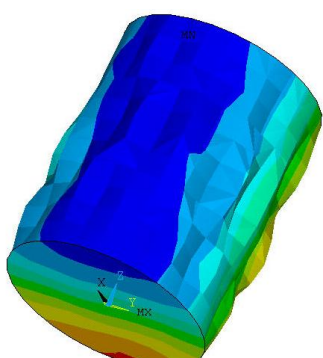


Рис.5 Связанная система: оболочка - воздушная полость

воздушной полостью, мода которой четко идентифицируется и является доминирующей по отношению к оболочечной. Следует отметить более сильное влияние второго акустического резонанса на динамику СС: область частотного диапазона, в которой поле давлений идентифицируется, как 2 мода воздушной полости становится шире ( $40,5 \div 48$  Гц), чем от влияния первого акустического резонанса (31,8 Гц).

Сопоставление 23 моды СС ( $\kappa_{23} = 45,8$  Гц, рис.5) позволяет сделать вывод о ее согласованности со 2 формой колебаний воздушной полости ( $\omega_2 = 48,1$  Гц, рис.3). Аналогичный вывод можно распространить и на 20-22 моды СС, поля давлений которых похожи на 23 моду, но являются еще более «размытыми». Находящиеся в этом же частотном диапазоне оболочечные моды в СС не реализуются, и ее частотный спектр становится более редким.

Результаты численных исследований, проведенных с оболочкой, заполненной хлором и гелием, представлены на рис. 6, 7.

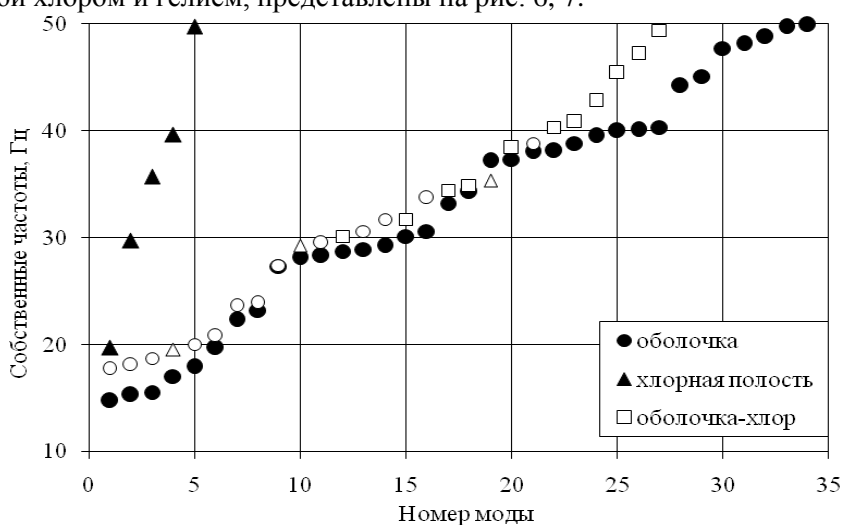


Рис. 6. Собственные частоты парциальных и связанной упруго-акустической системы: оболочка - хлор

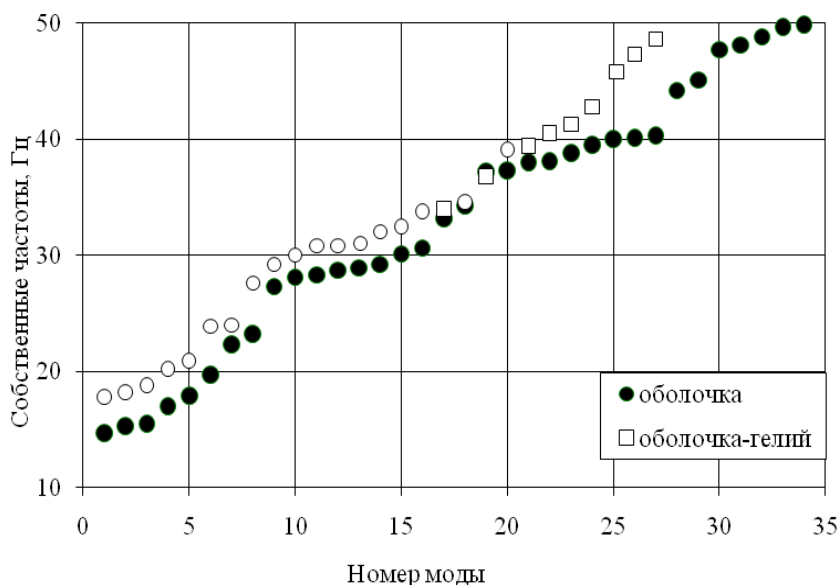


Рис. 7. Собственные частоты оболочки и связанной упруго-акустической системы: оболочка - гелий



Сопоставление графиков на рис. 2, 6, и 7 дает основание сделать следующие выводы. Низшие частоты колебаний СС (до  $\kappa_{11}$  включительно) остались практически постоянными для всех исследованных вариантов. На этих частотах колебания происходят по оболочечным формам, исключая дополнительные акустические частоты хлорной полости. При этом наблюдается небольшое увеличение частот СС. По мере увеличения частоты колебаний СС начинает реагировать по оболочечным модам избирательно, однако, на акустические частоты она откликается, при этом область отклика полости по данной форме расширяется. Реакция по 2 моде воздушной полости характерна для полосы частот 40,5÷48 Гц, реакция по 2 моде хлорной полости – 29,1-35,3 Гц. Оболочечные моды, находящиеся в этих диапазонах гасятся или видоизменяются, в полосе более высоких частот (свыше 40 Гц) они вообще перестают реализовываться. Следовательно, в диапазоне более высоких частот начинает доминировать акустическая составляющая системы, и энергия колебаний расходуется на совместные вибрации акустической полости и оболочки по модам СС. Однако не все акустические колебания проявляются в динамике СС, так вторая стержневая форма на частоте  $\omega_4 = 39,6$  Гц ( $\omega_1$  – первая стержневая форма) не выявлена при анализе полей давлений СС. Видимо влияние таких форм будет заметным при реализации стержневых, а не изгибных форм колебаний.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проект №07-01-96605-р\_поволжье\_a, проект № 10-01-97003-р\_поволжье\_a).*

#### Литература

1. Бреббия К., Теллес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
3. Шлычков С.В. Исследование динамических свойств механоакустических систем// Проблемы механики современных машин: Материалы четвертой международной конференции / ВСГТУ. – Улан-Удэ, 2009. – Т.3. – С. 266-270.
4. Золиков Р.И., Половнев А.Л., Рыбак С.П., Степанов В.Б. Расчет акустического поля внутри цилиндрической оболочки при заданном внешнем акустическом воздействии с использованием пакета «SYSNOISE»/ Прикладные исследования в механике. Тр. III науч. конф. «Инженерные системы - 2005». – М.: МФТИ – 2006. – С.119-133.
5. Zienkiewicz O.C., and Newton R.E. Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid/ Proceedings of the Symposium of Finite Element Techniques. University of Stuttgart, Germany (June 1969).
6. Rajakumar, C. and Rogers, C. R. The Lanczos Algorithm Applied to Unsymmetric Generalized Eigenvalue Problem/ International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 1009-1026 (1992).
7. Клизман Е.П., Клизман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочки с жидкостью// Прикладная механика и техническая физика.–2005.–Т.46, №6.–С.128-135.

## THE DYNAMIC OF ELASTIC-ACOUSTIC SYSTEMS

S.V. Shlychkov

In the work, the dynamic properties of shell and its filling acoustic medium as the connected elastic-acoustic system are investigated. Computation model is elaborated on the base of the finite element method. The oscillation spectrum of partial and connected of systems is determined and compared in the range to 50 Hz. It is established that only region of the lowest frequencies of the behavior of the connected system is similar to partial.

KEY WORDS: shell, acoustic system, finite element, natural frequencies.