

**ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ БАЛКИ
НА ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ**

М.А. ИЛЬГАМОВ, д-р. физ.-мат. наук, профессор, член-корр. РАН
А.Г. ХАКИМОВ, канд. физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник
Учреждение Российской академии наук «Институт механики Уфимского
научного центра РАН»,
450054, Республика Башкортостан, Уфа, пр. Октября, 71.

Надрез является моделью повреждения балки, в частности, поперечной раскрытой трещины. Показано, что по первой собственной частоте изгибных колебаний балки можно сделать вывод о наличии дефектов. По трем собственным частотам изгибных колебаний балки определяются координата надреза, его глубина и длина.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: собственные частоты, изгибные колебания балки, надрез.

Наиболее распространенным элементом строительных конструкций является балка на шарнирных опорах. Поэтому здесь приводится методика определения параметров повреждения балки по собственным частотам свободных изгибных колебаний. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот изгибных колебаний [1, 2] или изменение частоты собственных продольных колебаний [3]. В [4] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных установившихся волнах в стержнях конечной длины посвящена работа [5].

Предлагается математическая модель для описания и определения дефекта балки постоянного поперечного сечения. Поэтому рассматриваются изгибные колебания балки на шарнирных опорах (рис. 1.) Предполагается, что в балке имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L, J длину и момент инерции поперечного сечения балки, E, ρ – модуль упругости, плотность, через l, x_c – длину надреза и его координату, w – прогиб балки.

Уравнение, определяющее форму изгибных колебаний балки, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda^{*4} w, \quad \lambda^* = \sqrt[4]{\frac{m_l \omega^2}{EJ}}, \quad (1)$$

где m_l – масса единицы длины балки, ω – частота. Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия для шарнирного закрепления балки

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad x = 0, \quad w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad x = L. \quad (2)$$

Обозначая функции при x_c и $x_c + l$ индексами «-» и «+», записываются условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$

$$w_+ = w_- + l \sin \theta_-, \theta_+ = \theta_- + \tilde{k},$$

$$M_+ = M_-, Q_+ = Q_- + \frac{1}{2} \rho f l \left(\frac{\partial^2 w_-}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial t^2} \right), \quad (3)$$

где M, Q – изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам

$$M = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, Q = EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad (4)$$

\tilde{k} – средняя кривизна в пределах надреза, равная $\tilde{k} \approx \theta_+ - \theta_- / l$, f, \tilde{J} – площадь и момент инерции поперечного сечения балки в зоне надреза.

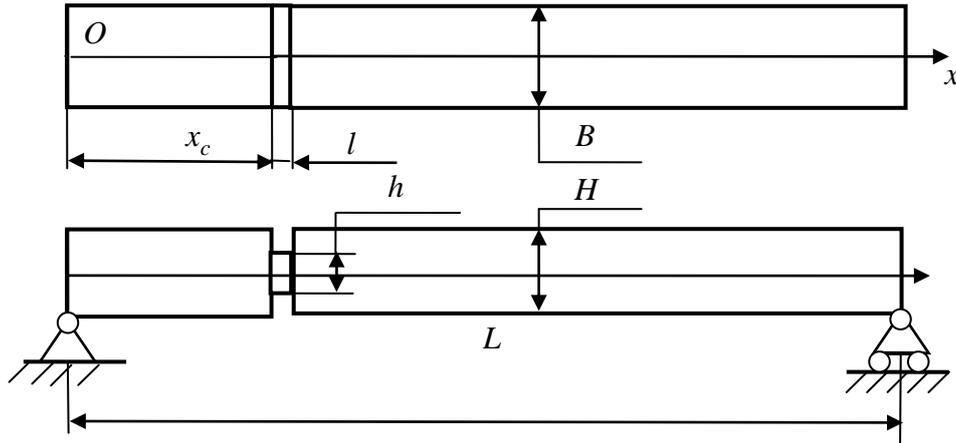


Рис. 1

В пределах надреза учтена усредненная инерционная сила. Изгибающий момент $\tilde{M} = E\tilde{J}\tilde{k}$ равен тому же моменту M_- (или M_+). Из равенства $\tilde{M} \approx M_-$ следует

$$\tilde{k} = \frac{J}{\tilde{J}} \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Условия (3) с учетом (4) и (5) записываются в виде

$$\begin{aligned} w_+ &= w_- + l \frac{\partial w_-}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_+}{\partial x} = \frac{\partial w_-}{\partial x} + l \frac{J}{\tilde{J}} \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 w_+}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w_-}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 w_+}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial x^3} - \frac{\rho f l \omega^2}{2EJ} w_- + w_+, \end{aligned} \quad (6)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad w = \frac{w}{L}, \quad \beta = \frac{fL^2}{J}, \quad \gamma = \frac{\tilde{J}}{J}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho L^2 \omega^2}{E},$$

представим (2), (6) в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = 0 \quad \xi = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = 0 \quad \xi = 1, \\ w_+ &= w_- + \varepsilon \frac{\partial w_-}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_+}{\partial \xi} = \frac{\partial w_-}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial^2 w_-}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 w_+}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w_-}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_+}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial \xi^3} - \frac{\varepsilon \beta \Omega^2}{2} w_- + w_+. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь индексы «1» и «2» относятся к решениям уравнения (1) при $0 \leq \xi \leq \xi_c$, $\xi_c < \xi \leq 1$, соответственно.

Для балки прямоугольного сечения условия (7) принимают вид

$$\beta = \gamma^{1/3} \frac{L^2}{H^2}, \quad \gamma = \frac{h^3}{H^3},$$

$$w_+ = w_- + \varepsilon \frac{\partial w_-}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_+}{\partial \xi} = \frac{\partial w_-}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\partial^2 w_-}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 w_+}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_-}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^3 w_+}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 w_-}{\partial \xi^3} - \frac{\varepsilon \gamma^{1/3} \Omega^2 L^2}{2H^2} w_- + w_+, \quad \xi = \xi_c, \quad (8)$$

где h – высота поперечного сечения балки.

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата ξ_c и параметры надреза γ и ε .

Прогиб балки на двух участках представляется в виде [6]

$$w_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4, \quad w_2 = C_5 y_1 + C_6 y_2 + C_7 y_3 + C_8 y_4,$$

где

$$y_1 = \frac{\cos \lambda \xi + c h \lambda \xi}{2}, \quad y_2 = \frac{\sin \lambda \xi + sh \lambda \xi}{2},$$

$$y_3 = \frac{-\cos \lambda \xi + c h \lambda \xi}{2}, \quad y_4 = \frac{-\sin \lambda \xi + sh \lambda \xi}{2},$$

$$\lambda^4 = \lambda^{*4} L^4 = \frac{12 \rho \omega^2 L^4}{E H^2} = \frac{12 L^2 \Omega^2}{H^2},$$

– линейно независимые решения уравнения (1) [6], удовлетворяющие условиям

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_1''(0) = 0, y_1'''(0) = 0,$$

$$y_2(0) = 0, y_2'(0) = \lambda, y_2''(0) = 0, y_2'''(0) = 0,$$

$$y_3(0) = 0, y_3'(0) = 0, y_3''(0) = \lambda^2, y_3'''(0) = 0,$$

$$y_4(0) = 0, y_4'(0) = 0, y_4''(0) = 0, y_4'''(0) = \lambda^3.$$

Функции y_1, y_2, y_3, y_4 связаны между собой соотношениями

$$y_1' = \lambda y_4, y_2' = \lambda y_1, y_3' = \lambda y_2, y_4' = \lambda y_3,$$

$$y_1'' = \lambda^2 y_3, y_2'' = \lambda^2 y_4, y_3'' = \lambda^2 y_1, y_4'' = \lambda^2 y_2,$$

$$y_1''' = \lambda^3 y_2, y_2''' = \lambda^3 y_3, y_3''' = \lambda^3 y_4, y_4''' = \lambda^3 y_1.$$

Граничные условия и условия (7) в развернутом виде записываются

$$C_1 = 0, C_3 = 0,$$

$$C_5 y_1(1) + C_6 y_2(1) + C_7 y_3(1) + C_8 y_4(1) = 0,$$

$$C_5 y_1''(1) + C_6 y_2''(1) + C_7 y_3''(1) + C_8 y_4''(1) = 0,$$

$$C_5 y_1(\xi_c + \varepsilon) + C_6 y_2(\xi_c + \varepsilon) + C_7 y_3(\xi_c + \varepsilon) + C_8 y_4(\xi_c + \varepsilon) =$$

$$= C_2 y_2(\xi_c) + C_4 y_4(\xi_c) + \varepsilon [C_2 y_2'(\xi_c) + C_4 y_4'(\xi_c)],$$

$$C_5 y_1'(\xi_c + \varepsilon) + C_6 y_2'(\xi_c + \varepsilon) + C_7 y_3'(\xi_c + \varepsilon) + C_8 y_4'(\xi_c + \varepsilon) =$$

$$= C_2 y_2'(\xi_c) + C_4 y_4'(\xi_c) + \frac{\varepsilon}{\gamma} [C_2 y_2''(\xi_c) + C_4 y_4''(\xi_c)], \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& C_5 y_1'' \xi_c + \varepsilon + C_6 y_2'' \xi_c + \varepsilon + C_7 y_3'' \xi_c + \varepsilon + C_8 y_4'' \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_2'' \xi_c + C_4 y_4'' \xi_c, \\
& C_5 y_1''' \xi_c + \varepsilon + C_6 y_2''' \xi_c + \varepsilon + C_7 y_3''' \xi_c + \varepsilon + C_8 y_4''' \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_2''' \xi_c + C_4 y_4''' \xi_c - \frac{\varepsilon \gamma^{1/3} \Omega^2 L^2}{2H^2} [C_2 y_2 \xi_c + C_4 y_4 \xi_c + \\
& + C_5 y_1 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_2 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_3 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_4 \xi_c + \varepsilon].
\end{aligned}$$

Уравнения (9) с учетом вышеприведенных соотношений принимают вид

$$\begin{aligned}
& C_5 y_1' + C_6 y_2' + C_7 y_3' + C_8 y_4' = 0, \\
& C_5 y_3' + C_6 y_4' + C_7 y_1' + C_8 y_2' = 0, \\
& C_5 y_1 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_2 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_3 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_4 \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_2 \xi_c + C_4 y_4 \xi_c + \varepsilon \lambda [C_2 y_1 \xi_c + C_4 y_3 \xi_c], \\
& C_5 y_4 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_1 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_2 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_3 \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_1 \xi_c + C_4 y_3 \xi_c + \frac{\varepsilon \lambda}{\gamma} [C_2 y_4 \xi_c + C_4 y_2 \xi_c], \\
& C_5 y_3 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_4 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_1 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_2 \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_4 \xi_c + C_4 y_2 \xi_c, \\
& C_5 y_2 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_3 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_4 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_1 \xi_c + \varepsilon = \\
& = C_2 y_3 \xi_c + C_4 y_1 \xi_c - \frac{\varepsilon \gamma^{1/3} \Omega^2 L^2}{2\lambda^3 H^2} [C_2 y_2 \xi_c + C_4 y_4 \xi_c + \\
& + C_5 y_1 \xi_c + \varepsilon + C_6 y_2 \xi_c + \varepsilon + C_7 y_3 \xi_c + \varepsilon + C_8 y_4 \xi_c + \varepsilon].
\end{aligned} \tag{10}$$

Разложим функции $y_1 \xi_c + \varepsilon$, $y_2 \xi_c + \varepsilon$, $y_3 \xi_c + \varepsilon$, $y_4 \xi_c + \varepsilon$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$ в ряды по степеням ε

$$\begin{aligned}
& y_1 \xi_c + \varepsilon = y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon, \\
& y_2 \xi_c + \varepsilon = y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon, \\
& y_3 \xi_c + \varepsilon = y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon, \\
& y_4 \xi_c + \varepsilon = y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon,
\end{aligned} \tag{11}$$

Система уравнений (10) с учетом соотношений (11) записывается

$$\begin{aligned}
& C_5 y_1' + C_6 y_2' + C_7 y_3' + C_8 y_4' = 0, \\
& C_5 y_3' + C_6 y_4' + C_7 y_1' + C_8 y_2' = 0, \\
& C_5 [y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon] + C_6 [y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon] + \\
& + C_7 [y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon] + C_8 [y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon] = \\
& = C_2 y_2 \xi_c + C_4 y_4 \xi_c + \varepsilon \lambda [C_2 y_1 \xi_c + C_4 y_3 \xi_c], \\
& C_5 [y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon] + C_6 [y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon] + \\
& + C_7 [y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon] + C_8 [y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon] = \\
& = C_2 y_1 \xi_c + C_4 y_3 \xi_c + \frac{\varepsilon \lambda}{\gamma} [C_2 y_4 \xi_c + C_4 y_2 \xi_c],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_5[y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon] + C_6[y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon] + \\
& + C_7[y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon] + C_8[y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon] = \quad (12) \\
& = C_2 y_4 \xi_c + C_4 y_2 \xi_c, \\
& C_5[y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon] + C_6[y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon] + \\
& + C_7[y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon] + C_8[y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon] = \\
& = C_2 y_3 \xi_c + C_4 y_1 \xi_c - \frac{\varepsilon \gamma^{1/3} \Omega^2 L^2}{2 \lambda^3 H^2} [C_2 y_2 \xi_c + C_4 y_4 \xi_c + \\
& + C_5[y_1 \xi_c + \lambda y_4 \xi_c \varepsilon] + C_6[y_2 \xi_c + \lambda y_1 \xi_c \varepsilon] + \\
& + C_7[y_3 \xi_c + \lambda y_2 \xi_c \varepsilon] + C_8[y_4 \xi_c + \lambda y_3 \xi_c \varepsilon]].
\end{aligned}$$

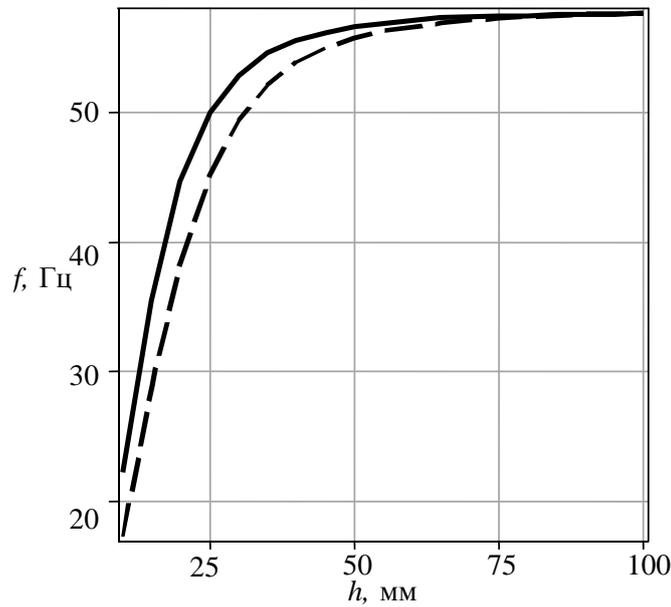


Рис. 2. Зависимость частоты изгибных колебаний балки от высоты поперечного сечения балки в зоне надреза для $x_c = 1000$ мм – пунктирная линия, $x_c = 500$ мм – сплошная линия.

Для того, чтобы $C_2, C_4 \div C_8$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится. Из полученного частотного уравнения по трем собственным частотам можно определить координату надреза ξ_c , его параметры γ и ε . Расчеты проведены для следующих параметров балки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 2000$ мм, $B = 50$ мм, $H = 100$ мм, $x_c = 1000$ мм, $l = 10$ мм (рис. 1). При этом вычисленные значения первой, второй и третьей собственных частот балки без надреза $f_1 = 57.403$ Гц, $f_2 = 229.613$ Гц, $f_3 = 516.63$ Гц. На рис. 2 даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от высоты поперечного сечения балки в зоне надреза для $l = 10$ мм, определенные расчетами по формулам (12). Видно, что уменьшение высоты поперечного сечения балки в зоне надреза приводит к уменьшению первой собственной частоты изгибных колебаний. А на рис. 3 даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от высоты

поперечного сечения балки в зоне надреза для $x_c = 1000$ мм и различных значений длины надреза l . При одной и той же глубине надреза первая частота меньше для надреза с большей длиной. На рис. 4 даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от координаты надреза. Видно, что увеличение координаты надреза до середины балки приводит к уменьшению первой собственной частоты изгибных колебаний.

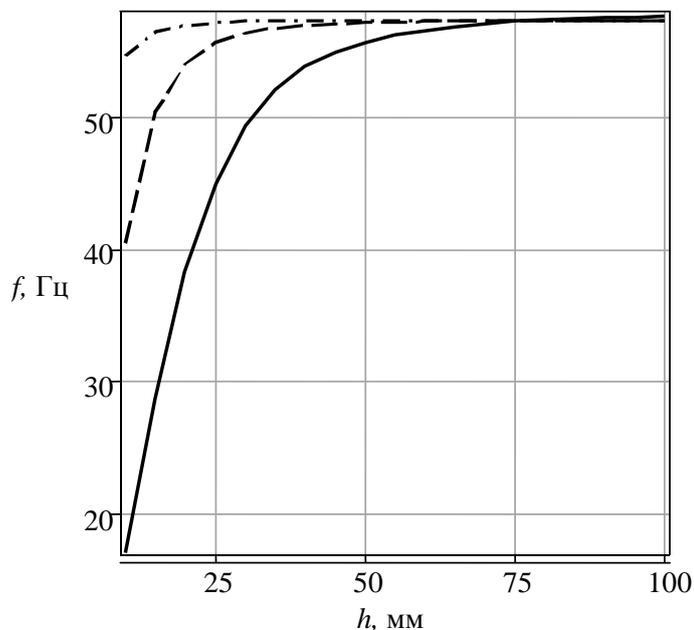


Рис. 3. Зависимость частоты изгибных колебаний от высоты поперечного сечения балки в зоне надреза для $l = 0.1$ мм – штрих - пунктирная линия, $l = 1$ мм – пунктирная линия, $l = 10$ мм – сплошная линия.

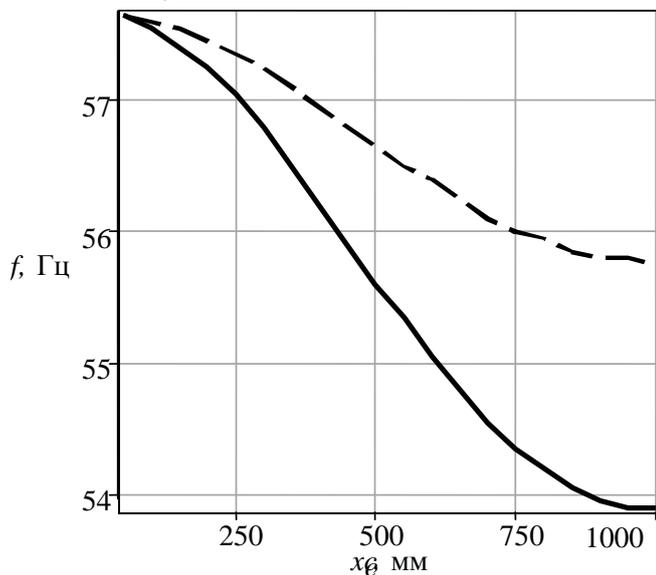


Рис. 4. Зависимость частоты изгибных колебаний балки от координаты надреза для $h = 50$ мм – пунктирная линия, $h = 40$ мм – сплошная линия

Таким образом, по первой частоте изгибных колебаний балки можно сделать вывод о наличии дефектов.

Также по трем частотам изгибных колебаний можно определить координату, длину и глубину эквивалентной трещины (надреза), например, для $f_1 = 57.2$ Гц, $f_2 = 228.6$ Гц, $f_3 = 515.0$ Гц, решая систему трех нелинейных частотных уравнений для балки с вышеприведенными данными: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 2000$ мм, $B = 50$ мм, $H = 100$ мм, получаем, что координата надреза $x_c = 927.5$ мм, длина надреза $l = 0.26$ мм, высота поперечного сечения балки $h = 32.3$ мм.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 08-01-97008-р_поволжье_a.

Л и т е р а т у р а

1. *Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р.* Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://ejta.org>, 2005, 5.

2. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом. Дефектоскопия. 2009. Том 45. № 6. С. 83-89.

3. *Ильгамов М.А.* Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем», 2007, с. 201-211.

4. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007, 224 с.

5. *Ватульян А.О., Солюянов Н.О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне. // Дефектоскопия, 2005, № 9, с. 44-56.

6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под общей редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968, 568 с.

DAMAGE DIAGNOSIS OF A HINGE SUPPORT BEAM

M.A. Ilgamov, A.G. Khakimov

The incision is a model for beam damage, specifically, for an open cross crack. It is shown that one can draw a conclusion about the presence of damage flaws judging by the first natural frequency of beam flexural vibrations. The incision coordinate, its depth and length are defined by three natural frequencies of beam flexural vibrations.

KEY WORDS: natural frequencies, beam flexural vibrations, beam damage.

