

Расчет тонких упругих оболочек

АНАЛИЗ НДС СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
ТРЕХМЕРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

С.Н. ЯКУПОВ, к.т.н., с.н.с.

И.Х. КИЯМОВ, инж.

ФГБУН РАН Институт механики и машиностроения КазНЦ

*Развит подход моделирования массивных и тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии, заданных в сферических координатах трехмерными конечными элементами. Трехмерный объект задается параметрами единичного куба, который разбивается на конечные элементы. Решение в элементе представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных. Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенной сферической оболочки с локальным углублением.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сферическая оболочка, метод конечного элемента.

**Введение.** Для обеспечения безопасной работы конструкций и сооружений необходимо совершенствовать каждый этап его создания: создание материала, технологии, проекта и т.д. Особую роль в этой цепочке играет возможности оценки прочности и надежности элементов конструкций и объектов исследования в целом.

Развитие современных методов расчета и рост возможностей вычислительной техники позволяет уточнять расчетные схемы – переходить от одномерных расчетных схем к двумерным схемам, а от двумерных расчетных схем к трехмерным схемам. Все это позволяет более точно оценивать напряженно - деформированное состояние конструкций и сооружений.

В ряде работ изложен эффективный метод расчета тонкостенных оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию – сплайновый вариант метода конечных элементов. Метод, благодаря синтезу идеи параметризации и метода конечных элементов (МКЭ) с бикубической аппроксимацией искомых переменных в пределах каждого элемента, позволяет получать пространственные искривленные согласованные двумерные конечные элементы. Однако этот метод не позволяет с достаточной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкций в области стыка оболочек, в зонах приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления тонкостенных конструкций, а также дефектных областях типа трещин и локальных углублений. В связи с этим разработка методов определения напряженно-деформированного состояния на базе объемных (трехмерных) элементов является актуальной задачей. Естественно, трехмерные элементы необходимы и для анализа НДС трехмерных элементов конструкций со сложной геометрией, а также для анализа НДС области пересечения оболочек, зон приложения сосредоточенных нагрузок и точечного крепления, локальных дефектных областей и т.д., в которых оболочечные элементы не эффективны, или применимы. В других работах изложен сплайновый вариант метода конечных элементов (СВ МКЭ-3) для расчета в трехмерной постановке элементов конструкций сложной геометрии, заданных в декартовой системе координат. В статье [1] описано развитие СВ МКЭ-3 для расчета в трехмерной постановке элементов конструкций сложной геометрии, заданных в цилиндрической системе координат. В статьях [1, 2] рассматриваются расчет тонкостенной сферической оболочки трехмерными элементами СВ МКЭ-3, заданной в сферической системе координат.

**Трехмерные элементы в сферической системе координат.** Рассматриваемый трехмерный объект сложной геометрии, занимаемый объем  $V$ , задается криволинейными координатами  $t^1, t^2, t^3$  единичного куба  $V_\Phi$  (рисунок 1) таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области  $V_\Phi$  соответствовала криволинейная пространственная сетка  $V$ :

$$\begin{aligned} \bar{r}(t^1, t^2, t^3) &= \rho(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{e}_m(t^1, t^2, t^3) \\ \bar{e}_m(t^1, t^2, t^3) &= \bar{e}_1 \cdot \cos \theta(t^1, t^2, t^3) + \bar{k} \cdot \sin \theta(t^1, t^2, t^3), \\ \bar{e}_1(t^1, t^2, t^3) &= \cos \varphi(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{i} + \sin \varphi(t^1, t^2, t^3) \cdot \bar{j}. \end{aligned} \quad (1)$$

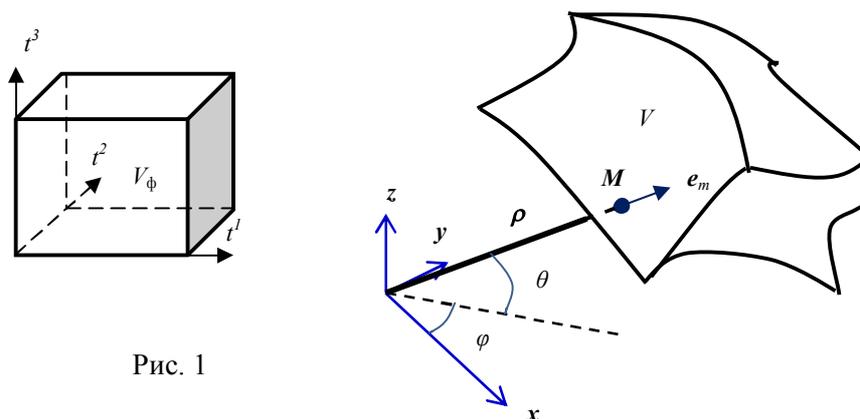


Рис. 1

Дифференцируя (1) по  $t^1, t^2, t^3$ , определяются координатные векторы

$$\bar{r}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^1}, \quad \bar{r}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^2}, \quad \bar{r}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t^3}, \quad (2)$$

компоненты метрического тензора  $g_{ij}$  и дискриминант первого метрического тензора  $g$ :

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j, \quad g = g_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - g_{32}(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) + g_{31}(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) \quad (3)$$

и символы Кристоффеля  $\Gamma_{jk}^i$ :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{it} \left( \frac{\partial g_{jt}}{\partial t^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial t^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial t^t} \right). \quad (4)$$

Геометрические соотношения представляются в виде:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial t^i} + \frac{\partial u_i}{\partial t^j} \right) - \Gamma_{ij}^k u_k \quad (i; j; k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{ik}$ ,  $u_i$  – ковариантные компоненты тензора деформации и вектора переменных. В качестве физических соотношений используются, в частности, соотношения для однородного изотропного тела:

$$\sigma^{ij} = f(\varepsilon^{ij}), \quad (6)$$

где  $\sigma^{ij}$ ,  $\varepsilon^{ij}$  – компоненты тензора напряжений и деформации.

Рассматриваемая область единичного куба  $V_\Phi$  разбивается на конечные элементы и решение  $u$ ,  $v$  и  $w$  в каждом из них представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных:

$$\begin{aligned} u &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_U, \\ v &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_V, \\ w &= [\psi_1(s^1) \times \psi_2(s^2) \times \psi_3(s^3)] \otimes F_W, \end{aligned} \quad (7)$$

$$s^1 = (t^1 - t_i^1)/h_i^1, s^2 = (t^2 - t_j^2)/h_j^2, s^3 = (t^3 - t_k^3)/h_k^3, h_i^1 = t^1 - t_i^1, h_j^2 = t^2 - t_j^2, h_k^3 = t^3 - t_k^3,$$

где  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и  $\psi_3$  – векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям,  $F_U$ ,  $F_V$ ,  $F_W$  – трехмерные матрицы компонент искомого неизвестных  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и его производных соответственно.

Разрешающие соотношения получаются из вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 W \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \rho f^i \delta u_i \sqrt{g} dt^1 dt^2 dt^3 + \iint_S p^i \delta u_i dS, \quad (8)$$

где  $W$  – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела;  $f^i$ ,  $p^i$  – контравариантные компоненты вектора массовых и поверхностных сил;  $\rho$  – массовая плотность;  $g$  – определитель матрицы метрического тензора;  $S$  – поверхность боковых граней тела.

Из уравнения (8) получается система  $24\Phi$  алгебраических уравнений вида

$$[A] \{U\} = \{R\}, \quad (9)$$

где  $[A]$  – симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры,  $\{U\}$  – вектор неизвестных,  $\{R\}$  – вектор нагрузки,  $\Phi$  – суммарное число узлов в рассматриваемом трехмерном объекте.

**Расчет НДС сферической оболочки.** Рассмотрена сферическая оболочка с внутренним диаметром  $D_{bn} = 200$  см, толщиной  $h = 1,5$  см. В области полюсов имеются отверстия  $d = 12,56$  см. Модуль упругости  $E = 210000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Оболочка разбита на 144 элемента: 2 элемента по толщине, 9 элементов по  $\varphi$  и 8 элементов по  $\theta$  (всего 243 узлов). В расчетной модели углубление образовано путем задания модуля упругости двух элементов в экваториальной области на внешнем слое на 2 порядка ниже модуля упругости оболочки. На поверхности центр углубления имеет координаты  $\varphi = 0$  и  $\theta = 0$ . Геометрические параметры углубления: 62,8 см  $\times$  78,5 см.

Таблица 1

Коэффициент концентрации $k^{\sigma_{22}}$ при $t_{\text{def}} = 0,5$ см			
$t^1 = 0,05$ см	$t^1 = 0,95$ см	$t^1 = 1,025$ см	$t^1 = 1,475$ см
1,00	0,97	0,97	0,96
1,02	0,99	0,99	0,98
1,08	1,07	1,06	1,05
1,16	1,15	1,15	1,14
1,19	1,18	1,18	1,18
1,25	1,26	-	-
1,32	1,34	-	-
1,38	1,41	-	-
1,48	1,52	-	-
1,51	1,55	-	-
1,54	1,58	-	-
1,53	1,57	-	-
1,52	1,56	-	-

Таблица 2

Коэффициент концентрации $k^{\sigma_{22}}$ при $t_{\text{def}} = 0,75$ см			
$t^1 = 0,0375$ см	$t^1 = 0,7125$ см	$t^1 = 0,7875$ см	$t^1 = 1,4625$ см
1,00	0,97	0,96	0,93
1,03	1,00	0,99	0,97
1,14	1,12	1,11	1,09
1,27	1,26	1,25	1,24
1,32	1,31	1,31	1,31
1,44	1,46	-	-
1,58	1,61	-	-
1,71	1,75	-	-
1,91	1,97	-	-
1,98	2,05	-	-
2,05	2,12	-	-
2,03	2,09	-	-
2,00	2,07	-	-

Рассмотрены следующие варианты разбиения толщины оболочки:  $t^1 = 0$ ; 0,5; 1,5 (глубина дефекта 1 см);  $t^1 = 0$ ; 0,75; 1,5 (глубина дефекта 0,75 см);  $t^1 = 0$ ; 1,0; 1,5 (глубина дефекта 0,5 см).

Разбиение по окружной координате:  $t^2 = -\pi$ ;  $-0,75\pi$ ;  $-0,5\pi$ ;  $-0,25\pi$ ;  $-0,1\pi$ ;  $0,1\pi$ ;  $0,25\pi$ ;  $0,5\pi$ ;  $0,75\pi$ ;  $\pi$ . Разбиение по меридиональной координате  $t^3 = -0,48\pi$ ;  $-0,375\pi$ ;  $-0,25\pi$ ;  $-0,125\pi$ ;  $0$ ;  $0,125\pi$ ;  $0,25\pi$ ;  $0,375\pi$ ;  $0,48\pi$ .

В таблицах 1 - 3 приведены значения концентрации окружных напряжений  $k^{\sigma_{22}} = \sigma_{\text{def}}^{\sigma_{22}} / \sigma^{\sigma_{22}}$  в области утонения ( $t^2 = 0$ ;  $t^3$  от  $-0,1875\pi$  до  $0$ ).

Таблица 3

Коэффициент концентрации $k^{\sigma_{22}}$ при $t_{\text{def}} = 1,00$ см			
$t^1 = 0,025$ см	$t^1 = 0,475$ см	$t^1 = 0,55$ см	$t^1 = 1,45$ см
1,00	0,97	0,96	0,90

1,04	1,01	1,01	0,95
1,22	1,19	1,19	1,14
1,42	1,41	1,41	1,38
1,51	1,501	1,50	1,48
1,73	1,74	-	-
1,99	2,02	-	-
2,24	2,29	-	-
2,65	2,72	-	-
2,80	2,88	-	-
2,95	3,04	-	-
2,91	3,00	-	-
2,86	2,95	-	-

Из приведенных данных в таблицах 1 - 3 видно, что:

1) максимальные окружные напряжения возникают не на экваторе, а смещены на  $0,0312 \pi$ ;

2) с увеличением глубины дефекта коэффициент концентрации растет быстрее, чем глубина дефекта;

3) максимальные по глубине дефекта возникают вблизи дефектной поверхности.

**Заключение.**

Сплайновый вариант МКЭ развит для расчета элементов конструкций, заданных в сферической системе координат, трехмерными элементами.

Метод позволяет анализировать НДС как массивные, так и тонкостенные элементы.

Л и т е р а т у р а

1. Кантюков Р.А., Якупов Н.М., Тамеев И.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Кантюков Р.Р. Концентрация напряжений в трубе с протяженным углублением // Газовая промышленность. 2013. – №7. – С. 28-30.

2. Zhou D., McGee O.G. On the three-dimensional vibrations of elastic prisms with skew cross-section. *Meccanica*. – 2013. – Vol. 48, No4. – P. 993-1016.

References

1. Kanyukov R.A., Yakupov N.M. et al (2013). Stress concentration in a pipe with extending hollow. *Gazovaya promyshlennost*, № 7, p. 28-30.

2. Zhou D., McGee O.G. (2013). On the three-dimensional vibrations of elastic prisms with skew cross-section. *Meccanica*, Vol. 48, No4, p. 993-1016.

**ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF SPHERICAL SHELLS WITH THE HELP OF THREE-DIMENSIONAL ELEMENTS**

S.N.YAKUPOV, I.H. KIYAMOV

*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center,  
Russian Academy of Sciences*

Approach of modeling of massive and thin-walled elements of designs of the difficult geometry which has been set in spherical coordinates by three-dimensional final elements is developed. The three-dimensional object is set by parameters of a single cube which breaks into final elements. The decision in an element is submitted in the form of an interpolation hermit cubic spline of three variables. The analysis intense the deformed condition of a thin-walled spherical cover with local deepening is made.

KEY WORDS: finite element method, spherical shell, cubic spline, local hollow.