

## ПРИМЕНЕНИЕ МГИУ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВЕТРОВЫМ ПОТОКОМ

А.С. ДОРОГАН, канд. техн. наук

Дальневосточный государственный университет путей сообщения,

Хабаровск

e-mail: newport@festu.khv.ru

Показан подход к решению уравнения Навье-Стокса механики газа, основанный на использовании ГИУ механики твердого тела. Предложенное ГИУ можно применять для уточнения ветрового воздействия на строительные конструкции.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: МГИУ, аэродинамика, теория упругости, обтекание.

Решение 2-х и 3-х мерных задач обтекания газом вокруг тела произвольной формы осложняется необходимостью моделировать бесконечные или частично ограниченные области [1, 2]. Поэтому выбор численных методов (МКЭ), основанных на дискретизации областей (площадей) здесь не приемлем. Специфике такой задачи удовлетворяет метод граничных элементов (МГЭ), не требующий внутренней дискретизации области  $S$ , размеры которой могут быть огромными.

Будем считать, что конструкция пролетных строений мостов является абсолютно жесткой.

**1. Основы гидродинамики и аэродинамики.** В гидродинамических расчетах учитывают кинематическую вязкость  $k$ . При  $\theta = 20^\circ\text{C}$  для воды  $k = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; для воздуха  $k = 15.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Плотность воздуха  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$ . Гидродинамика - изучает законы движения жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении [3]. Жидкость движется под действием сил тяжести, внешнего давления и инерционных сил. В движущейся жидкости появляется касательное напряжение от сил трения.

Гидродинамическими характеристиками потока жидкости являются скалярная величина  $p$  и векторная величина скорости  $u$  движения частиц жидкости:

$$\left. \begin{aligned} p &= f_1(x, y, z, t), & u_x &= f_2(x, y, z, t) \\ u_y &= f_3(x, y, z, t), & u_z &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned} \right\}$$

Гидродинамическое давление в точке  $p$  - это скалярная величина:

$$p = \frac{1}{3}(|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|) \text{ для 3D задач; } p = \frac{1}{2}(|\sigma_1| + |\sigma_2|) \text{ для 2D задач.}$$

Вектор ускорений будет ( $\text{м/с}^2$ ):  $a_x = \frac{du_x}{dt}$ ,  $a_y = \frac{du_y}{dt}$ ,  $a_z = \frac{du_z}{dt}$ .

Компоненты массовой силы, действующей на жидкость, равны:

$$F_i = M \cdot f_i = V \cdot \rho \cdot f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $M$  - масса объема  $V$ ;  $f_i$  - интенсивность внешней нагрузки (ускорение,  $\text{м/с}^2$ ).

*Аэродинамика* изучает взаимодействие газов с твердыми телами и поверхностями. Она позволяет правильно выбрать конструктивную форму и рациональные сечения элементов мостовых конструкций. Законы движения и равновесия жидкостей и газов считаются одинаковыми, если скорость движения газов не превышает 100 м/с. Тела, обтекаемые газом, называются *плохообтекаемые*, когда возникают мощные вихри. Например, пролетные строения мостов.

Сила лобового сопротивления определяется по формуле Ньютона [3]:

$$F_{\text{давл}} = C_d \cdot \Omega \cdot \rho \cdot u^2 / 2 = C_d \cdot W_m, \quad (1)$$

где  $C_d$  - аэродинамический коэффициент;  $\Omega$  - площадь миделевого сечения тела.

**2. Особенности ветрового потока.** Резкое кратковременное усиление ветра

до 25 м/с и более образует шквал. Порывы ветра характеризуются длиной волны и запасом кинетической энергии. Установлено, что максимальную энергию имеет порыв с длиной волны  $L = 600$  м [4].

Фронт порывов характеризуется высотой и шириной: высота порывов составляет  $H_w = L / 4$ , а ширина -  $B_w = L / 15$ . Эти отношения будут использоваться для моделирования воздействия шквалов на мостовые конструкции. По результатам численных расчетов установлено ограничение  $H_w = L / (20 - 30)$ .

Ветровые нестационарные нагрузки по длительности воздействия на строительные конструкции разделяются [5]:

- среднее по времени давление используется для статических расчетов;
- мгновенное локальное давление  $t = 30 - 90$  с - для расчета стальных элементов коробчатых балок жесткости, обтекателей и ветровых ограждений.

При возникновении шквалов возникают ускорения ветра в порыве, направленные горизонтально или под углом атаки  $\alpha$ , которые необходимо учитывать.

В СП "Нагрузки и воздействия" заложены величины давлений, рассчитанные по уравнению Бернулли [6] (Ньютона). Здесь не учитывается влияние массовых сил, за исключением гравитационных. Для расчетов потребуется значение ускорения ветра в порыве. В СП "Нагрузки и воздействия" такого нормируемого параметра нет. Вместо этого учитывается пульсация, которая выражается через коэффициент пульсации ветрового напора к нормативному значению  $W_m$ . Поэтому были использованы данные, полученные из Департамента ФС по гидрометеорологии (Дальневосточный ФО) наблюдения метеостанций:

- для материковой части Хабаровского края (III ветровой район) время взятия отсчетов  $t = 60$  с; измеряемые значения  $V_{нач} = 8$  м/с,  $V_{кон} = 25$  м/с; ускорение ветра в порыве  $a_{min} = (V_{кон} - V_{нач}) / t = 0.28$  м/с<sup>2</sup>;
- для береговой части (V ветровой район)  $V_{нач} = 12$  м/с,  $V_{кон} = 36$  м/с; ускорение ветра в порыве  $a_{min} = (V_{кон} - V_{нач}) / t = 0.4$  м/с<sup>2</sup>.

Тогда с учетом угла атаки  $\alpha$  интенсивность внешней нагрузки:

$$f_x = f_y = a_{min} \cdot \cos \alpha ; f_z = a_{min} \cdot \sin \alpha .$$

**3. Уравнения движения вязкого газа Навье-Стокса.** Оно учитывает силы трения и в тензорной форме имеет вид: [6]:

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + k \cdot \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sum_{k=1}^3 (\partial u_k / \partial x_k)}{\partial x_i} \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

В случае несжимаемой жидкости уравнение упрощается и преобразуется:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + k \cdot \left[ (\delta_{ij} \cdot \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot u_j \right], \quad (3)$$

где  $f_i$  - вектор ускорений (м<sup>2</sup>/с) макрочастиц среды, вызванных внешним воздействием (поле тяжести, силы инерции, пульсация ветра);  $p$  - давление среды.

Найдены решения ДУ только для некоторых частных случаев. Точное решение ДУ (3) в наиболее общей и сложной форме пока не найдено.

Существует интересная аналогия между НДС гидродинамики и теории упругости, которую полезно использовать в предлагаемых ниже выкладках. Тогда тензор напряжений гидромеханики в произвольной точке можно определить через тензор малых деформаций Коши теории упругости [7]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot e_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad i, j = 1, 2, 3 .$$

где первый член - это объемное сжатие, а второй учитывает действие силы тре-

ния от вязкости при сдвиге;  $e_{ij}$  - девиатор деформаций теории упругости.

**4. Быстро изменяющееся движение газа.** Для сверхбыстрого течения  $u > 60$  м/с есть другая форма ДУ (3), основанная на уравнении, где в качестве независимых переменных используются скорости и вихри, что позволяет моделировать вихревые явления. Такая форма более удобна для применения в МГЭ [8, 9].

В этом случае разрешающая система уравнений включает:

- *кинematicкую* часть, связывающую поле скоростей  $u$  в произвольный момент времени с полем вихрей  $\omega$ ;
- *kineticкую* часть, описывающую изменение во времени поля вихрей.

Численное решение такой системы ГИУ возможно только при помощи чрезвычайно сложной пошаговой схемы с шагом  $\Delta t$ .

**5. Неустановившееся медленно изменяющееся движение газа.** При обтекании ветровым потоком вокруг неподвижной поверхности (конструкции пролетных строений) развивается максимальное ускорение макрочастиц газа  $a_x, a_y < 0.5$  м<sup>2</sup>/с. Такому ускорению соответствует быстрое течение  $u \leq 40 - 50$  м/с, т.е. IV - VI ветровой район, поэтому в уравнении (3) можно пренебречь первой частью компоненты материальной производной.

Тогда уравнение (3) упростится и в векторной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + k \left( (\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u_x + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \\ u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + k \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + (\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u_y + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \\ u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + k \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + (\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) u_z \right) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

или в тензорной форме:

$$\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + k \cdot \left[ (\delta_{ij} \cdot \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot u_j \right]. \quad (5)$$

Здесь остается нестационарное движение среды, что позволяет моделировать периодически возникающие вихревые дорожки. Видно, что ДУ (5) содержит слева добавочные члены, включающие произведения компонент перемещений на углы поворота. Такое ДУ имеет слабую степень нелинейности.

Хотя считается, что МГЭ нельзя использовать для решения нелинейных задач, при небольшой её степени допускается применение специальных итерационных методов. В этом случае *нелинейная часть*  $N_i$  рассматривается как функция возбуждающих сил, которые условно принимаются известными:

$$\begin{aligned} N_x &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = u_x \cdot \delta_x + u_y \cdot \varphi_{xy} + u_z \cdot \varphi_{xz} \\ N_y &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = u_x \cdot \varphi_{yx} + u_y \cdot \delta_y + u_z \cdot \varphi_{yz}, \quad (6) \\ N_z &= u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_x \cdot \varphi_{zx} + u_y \cdot \varphi_{zy} + u_z \cdot \delta_z \end{aligned}$$

где частные производные от проекций  $u_i$  по координатам  $i$  включают:  $\delta_i$  - продольные деформации;  $\varphi_{ij}$  - углы поворота в плоскости  $ij$ . Решение ДУ (5) ведется в системе "скорость потока - давление". В общем виде необходимо также

вводить компоненты фиктивной объемной силы  $P_i$ , учитывающей влияние скаляра давления  $p(x, y, z, t)$ . Но можно исключить влияние  $P_i$ , упростив следующие модели:

3D задачи. При увеличении высоты на 100 м атмосферное давление воздуха уменьшается на 1.1 %, поэтому можно считать, что

$$p|_x = const, p|_y = const, p|_z \approx const; \quad P_x = P_y = 0, \quad P_z \approx 0.$$

2D задачи. Для плоской деформации  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 p = 0$ . Это означает,

что давление является гармонической функцией, поэтому  $P_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$ . Тогда:

$$N_i = f_i + k \cdot \left[ (\delta_{ij} \cdot \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot u_j \right], \quad (7)$$

где  $f_i$  - вектор ускорений ( $m^2/c$ ), вызванных внешним воздействием; они известны по условию задачи: поле тяжести или пульсация ветра;  $N_i$  - "нелинейный" вектор, который находится методом приближений.

Рассмотрим уравнение Навье теории упругости твердого тела [10]:

$$0 = G \cdot \left[ \delta_{ij} \nabla^2 + \left( \frac{1}{1-2\nu} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right] \cdot u_j + F_i \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где  $G = E/2 \cdot (1+\nu)$ . В этом уравнении множитель в круглых скобках равен единице при  $\nu = 0$ . Видно, что уравнение деформаций твердого тела Навье (8) становится идентичным уравнению скоростей движения жидкости Навье-Стокса (7) при выполнении следующих условий:

- коэфф. Пуассона  $\nu = 0$ , что соответствует модели упругого тела, которое не испытывает поперечных деформаций; при этом  $G = E/2$ ;
- модуль упругости  $E = 2 \cdot G = 2 \cdot k = 2 \cdot \mu / \rho$  для моделирования вязкой среды;
- решение граничных условий для уравнения Навье следует выполнять в скоростях, а не в перемещениях;
- известно комплексное значение всех компонент интенсивностей  $\Phi_i = f_i - N_i$ .

Такой "условный" материал будем называть *ветровым макетом*.

По аналогии с ГИУ теории упругости [11] получено ГИУ для движения вязкой среды, соответствующее уравнению (7):

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_S U_{ij}^*(\xi, z) f_j(z) dS(z) - \int_S U_{ij}^*(\xi, z) N_j(z) dS(z) \quad \xi \in \Gamma, z \in S \quad (9)$$

где  $U_{ij}^*, P_{ij}^*$  - функции влияния перемещения и усилия;  $c_{ij}$  - коэффициент формы.

Это ГИУ ведется в скоростях и без учета изменений давления. Для предлагаемых ГИУ не используется фундаментальное решение, зависящее от времени. Поэтому не требуется производить интегрирование по времени. Для получения усилий и перемещений достаточно умножить их найденные скорости на время воздействия ветра:  $U(x) = u(x) \Delta t$  (м),  $P(x) = p(x) \Delta t$  (Н).

В ветровом макете находятся значения скоростей усилий  $p(x)$  и перемещений  $u(x)$  в области  $S$  и на границе  $\Gamma$ . На участке границы обтекаемого вязкой средой твердого тела существует понятие непроницаемости его стенок, что требует отсутствие нормальных и тангенциальных скоростей перемещений:  $u_n = 0$ ,  $u_t = 0$ . Граница фронта порывов ничем не ограничена и является свободным

краем:  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ . При небольшой высоте фронта его нижний край также может считаться обтекаемым:  $u_n = 0, u_t = 0$ . По границе фронта порыв известно распределение скоростей ветра по высоте согласно профилю в горизонтальном потоке. Но установить такой профиль для ускорений сложнее, т.к. такие измерения не ведутся на метеостанциях.

Решение внутренней задачи для  $x \in S$  в скоростях также возможно.

В МГЭ для вычисления интегралов по области  $S$  их разбивают на внутренние ячейки, которые не создают дополнительных неизвестных, как в МКЭ.

Рассмотрим такой интеграл в ГИУ (9). Если  $f_i = const|_S$ , то его можно свести к граничному интегралу, который можно определить численно:

$$\int_S U_{ij}^*(\xi, z) \cdot f_j(z) \cdot dS(z) = f_j(z) \int_\Gamma \hat{B}_i^* \cdot d\Gamma, \quad (10)$$

где функция влияния  $\hat{B}_i^*$  для плоских и объемных тел [11].

Тогда окончательно ГИУ будет иметь вид:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_\Gamma P_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) d\Gamma(x) = \int_\Gamma U_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) d\Gamma(x) + f_i \cdot \int_\Gamma \hat{B}_i^*(\xi, x) d\Gamma - \int_S U_{ij}^*(\xi, z) \cdot N_j(z) dS(z) \quad \xi \in \Gamma, z \in S \quad (11)$$

Напряжения во внутренних точках. Применяют следующее ИУ для определения напряжений в точках области [12]:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_\Gamma U_{ijk}^*(\xi, x) \cdot p_k(x) \cdot d\Gamma(x) - \int_\Gamma P_{ijk}^*(\xi, x) \cdot u_k(x) \cdot d\Gamma(x) + \int_S U_{ijk}^*(\xi, z) \cdot f_k(z) \cdot dS - \int_S U_{ijk}^*(\xi, z) \cdot N_k(z) \cdot dS, \quad \xi, z \in S \quad (12)$$

где  $U_{ijk}^*, P_{ijk}^*$  - функции влияния перемещения и усилия.

**6. Вычисление нелинейной части.** Геометрические уравнения Коши теории упругости связывают деформации и смещения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{продольные,} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{угловые.} \quad (13)$$

Сравнение их со структурой нелинейной части (6), обусловленной полным дифференциалом функции скорости  $u_i = f_i(x, y, z)$ , позволяет выделить компоненты тензора деформаций теории упругости:

- 3 частные производные - осевые (продольные) деформации;
- 6 частных производных - относительные деформации сдвига;  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ .

Тогда нелинейную часть можно записать через компоненты деформаций:

$$\begin{aligned} N_x &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = u_x \cdot \varepsilon_x + u_y \cdot 0.5\gamma_{yx} + u_z \cdot 0.5\gamma_{yx} \\ N_y &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = u_x \cdot 0.5\gamma_{xy} + u_y \cdot \varepsilon_y + u_z \cdot 0.5\gamma_{zy} \\ N_z &= u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_x \cdot 0.5\gamma_{xz} + u_y \cdot 0.5\gamma_{yz} + u_z \cdot \varepsilon_z \end{aligned} \quad (14)$$

Сюда входят компоненты перемещений, которые находятся из решения

внутренней задачи ИУ (9). После этого определяются напряжения в тех же внутренних точках из решения внутренней задачи для ИУ (12).

Окончательно деформации находятся из прямого закона Гука для  $\nu = 0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x / E & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \varepsilon_y &= \sigma_y / E, & \gamma_{yz} &= \tau_{yz} / G, \\ \varepsilon_z &= \sigma_z / E & \gamma_{zx} &= \tau_{zx} / G \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные по формулам (14) определяются во всех точках внутренней коллокации. Таким образом, все компоненты нелинейной части находятся точно из решения двух ИУ. Конечные разности или функции влияния, аппроксимирующие на сеточных значениях, не требуются для нахождения деформаций.

Нелинейный член можно рассматривать как функцию возбуждающих сил, т.е. он переносится в правую часть и считается известной функцией.

**7. Решение нелинейных ГИУ.** ГИУ (9) содержит нелинейный член  $N_i$ , который включает сумму произведений компонент искомой неизвестной функции  $u(z)$  на относительные деформации. Непосредственное решение таких ГИУ в рамках МГЭ здесь невозможно. Поэтому предложен итерационный метод решения, который имеет медленную сходимость из-за несовершенного её критерия. Делается предположение о начальной форме поля перемещений  $u_0(z) = 0$ .

Решение систем ГИУ производится последовательными приближениями, когда на каждом шаге нелинейная часть корректируется по результатам предыдущих вычислений. Общая схема итеративного решения системы состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Задание начальных полей перемещений  $u_0(z) = 0$  и полей деформаций  $\varepsilon_0(z) = 0 \quad z \in S$ .

Шаг 2. Решение линейной граничной задачи ( $N_i = 0$ ) и определение скоростей перемещений и усилий на границе  $\Gamma$ .

Шаг 3. Решение линейной внутренней задачи в точках коллокаций области:

3.1. нахождение поля скоростей перемещений  $u(z)$  по ИУ (9);

3.2. нахождение поля скоростей деформаций  $\varepsilon(z)$  по ИУ (12) и закону (15);

3.3. нахождение всех компонент  $N_i$  по формуле (14) численным интегрированием с применением 2М и 3М функций влияния.

Шаг 4. Сохранение поля скоростей перемещений  $u^k(z)$  итерации  $k - 1$ .

Шаг 5. Решение нелинейной граничной задачи и определение скоростей перемещений и усилий на границе  $\Gamma$ .

Шаг 6. Решение нелинейной внутренней задачи итерации  $k$  в точках коллокаций области  $S$ .

Шаг 7. Контроль условия сходимости итерационного процесса:

$$\|E(u)\|_{\infty} \leq \Delta_u$$

где  $\|E(u)\|_{\infty} = \max |u_i^{k-1} - u_i^k|$  - норма отклонения значений  $u$  на  $S$  между итерациями. Если условие удовлетворяется - решение закончено, в противном случае идти к шагу 4.

**8. Установившееся, но неравномерное движение газа.** Для ветровых районов I - III развивается максимальное ускорение  $a_x, a_y < 0.1 \text{ м}^2/\text{с}$ . Такому ускорению соответствует медленному течению  $u \leq 20 \text{ м/с}$ . В этом случае можно пренебречь всеми составляющими материальной производной:

- первой частью как для стационарного течения;
- второй частью как для медленного движения газа.

Тогда уравнение (3) упрощается и в тензорной форме имеет вид:

$$0 = f_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + k \cdot \left[ (\delta_{ij} \cdot \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot u_j \right]. \quad (16)$$

Введем компоненты фиктивной объемной силы  $\Phi_i$ , учитывающей влияние скаляра давления  $p(x, y, z, t) = (|\sigma_x| + |\sigma_y| + |\sigma_z|) / 3$ :

$$0 = f_i - \Phi_i + k \cdot \left[ (\delta_{ij} \cdot \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}) \cdot u_j \right]. \quad (17)$$

где  $f_i$  - вектор ускорений ( $m^2/c$ ),  $\Phi_i$  - "нелинейный" вектор, который находится методом приближений.

Это приближенное ДУ, которое описывает только ламинарное движение среды. Оно не позволяет моделировать образование вихрей при обтекании.

Если ввести понятие *ветрового макета*, то по аналогии с (9) получается ГИУ для движения вязкой среды, соответствующее уравнению (17):

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) d\Gamma(x) + \int_S U_{ij}^*(\xi, z) \cdot f_j(z) dS(z) + \int_S U_{ij}^*(\xi, z) \cdot \Phi_j(z) dS(z) \quad \xi \in \Gamma, z \in S \quad (18)$$

Граничные условия и напряжения во внутренних точках аналогичны п. 5.

Если  $f_i = const|_S$ , то ГИУ можно свести к граничному интегралу:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) d\Gamma(x) + f_i \cdot \int_{\Gamma} \hat{B}_i^*(\xi, x) d\Gamma - \int_S U_{ij}^*(\xi, z) \cdot \Phi_j(z) dS(z) \quad \xi \in \Gamma, z \in S \quad (19)$$

Решение нелинейных ГИУ для нелинейного члена  $\Phi_i$  находят аналогично п. 5.

**9. Программа GEO** - для решения плоских задач теории упругости тел с произвольным очертанием границ. Основывается на численном моделировании МГИУ и реализует прямой МГЭ. Заложена линейный тип граничных элементов (ГЭ). Разработана автором для расчета тоннельных обделок. Позднее была им модернизирована для расчета задач обтекания. Для постоянных полей ускорений сводится только к ГЭ и не требует внутренних ячеек.

Ниже показано моделирование плоского напряженного состояния для двух характерных схем обтекания, выполненное программой GEO без учета фиктивных сил  $\Phi_i = 0$  при  $p(x, y, z) = const$ . Аэродинамический коэфф.  $C_d = 1.0$

**Схема 1.** Обтекание цилиндрического тела диаметром 4 м, расположенного на высоте 20 м. Фронт порывов имеет ширину  $B_w = 40$  м и высоту  $H_w = 40$  м.

Требуется оценить воздействие шквала для материковой части Хабаровского края (III ветровой район) длительностью  $t = 60$  с.

Два вида загрузки:

- 1) для угла атаки  $\alpha = 0^\circ, f_x = 0.28 \text{ м/с}^2, f_y = 0$ ;
- 2) для угла атаки  $\alpha = 30^\circ, f_x = 0.2425 \text{ м/с}^2, f_y = 0.14 \text{ м/с}^2$ .

*Ветровой макет* моделируется (рис. 1): модулем упругости  $E = 2 \cdot k, \nu = 0$ ;

- наружным контуром, состоящим из 36 ГЭ; образует свободный край;
- внутренним контуром из 24 ГЭ; нет скоростей перемещений  $u_n = 0, u_t = 0$ .

В табл. 1 приведены результаты решения граничной задачи, т.е. узловые усилия  $P$  и напряжения  $N$ , полученные для времени воздействия шквала  $t$ .

Таблица 1

alfa = 0	alfa = 30
----------	-----------

	$P_{x, \text{тс/м}}$	$P_{y, \text{тс/м}}$	$N_{x, \text{тс/м}^2}$	$N_{y, \text{тс/м}^2}$	$P_{x, \text{тс/м}}$	$P_{y, \text{тс/м}}$	$N_{x, \text{тс/м}^2}$	$N_{y, \text{тс/м}^2}$
1	-0.2073	-0.0001	-0.1836	0.0000	-0.1794	0.1163	-0.1588	-0.0200
2	-0.2082	-0.0100	-0.1769	0.0448	-0.1832	0.1007	-0.1380	-0.0274
3	-0.2187	0.0058	-0.1755	0.0737	-0.1844	0.1092	-0.1527	-0.0015
4	-0.2328	-0.0003	0.0000	0.0397	-0.2016	0.1034	-0.0916	0.0346
5	-0.2196	-0.0045	0.0319	0.1326	-0.1946	0.1007	-0.1163	0.1366
6	-0.2092	0.0088	0.0048	0.1291	-0.1789	0.1175	0.0337	0.0320
7	-0.2073	-0.0001	0.1391	0.0445	-0.1794	0.1163	0.1761	-0.0373

**Схема 2.** Обтекание пролетного строения шириной 20 м и высотой 4 м, расположенного на высоте 40 м над уровнем земли. Фронт порывов имеет ширину  $B_w = 40$  м и высоту  $H_w = 80$  м при тех же нагрузениях, что и в схеме 1.

Ветровой макет моделируется (рис. 2):

- наружным контуром - шаг ГЭ совпадает со схемой 1,
- внутренним контуром - состоит из 28 ГЭ.

Результаты решения граничной задачи приведенные в табл. 2.

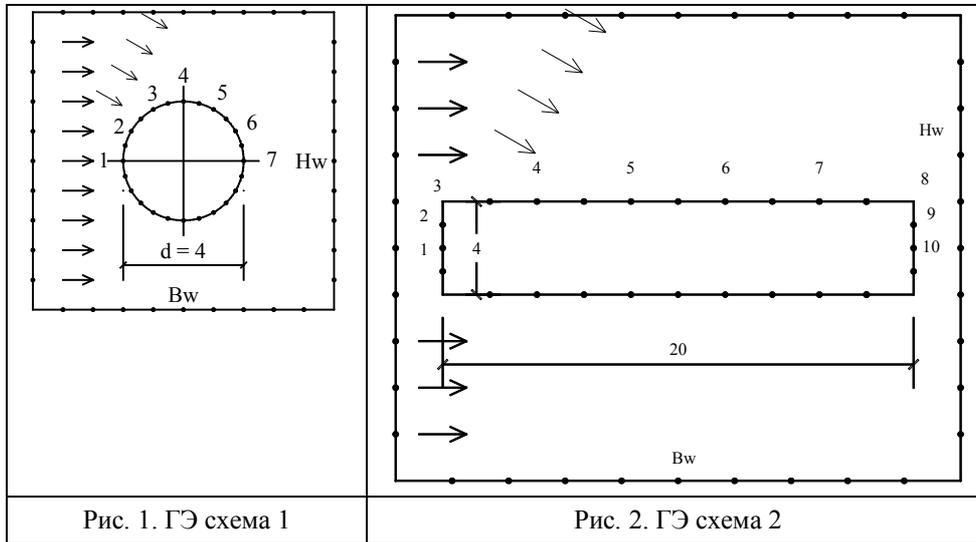


Рис. 1. ГЭ схема 1

Рис. 2. ГЭ схема 2

Таблица 2

	alfa = 0				alfa = 30			
	$P_{x, \text{тс/м}}$	$P_{y, \text{тс/м}}$	$N_{x, \text{тс/м}^2}$	$N_{y, \text{тс/м}^2}$	$P_{x, \text{тс/м}}$	$P_{y, \text{тс/м}}$	$N_{x, \text{тс/м}^2}$	$N_{y, \text{тс/м}^2}$
1	-0.0775	0.0000	-0.0889	0.0245	-0.0671	0.0518	-0.0742	0.0182
2	-0.0970	-0.0213	<b>-0.1366</b>	0.0420	-0.0797	0.0370	-0.1046	0.0233
3	-0.2471	-0.1560	-0.1152	0.1108	-0.1870	-0.0066	-0.0833	0.0329
4	-0.0962	-0.0441	-0.0029	0.0501	-0.0814	0.0075	-0.0017	-0.0034
5	-0.0923	-0.0135	-0.0004	0.0172	-0.0794	0.0295	0.0000	-0.0263
6	-0.0923	0.0135	0.0002	-0.0102	-0.0805	0.0530	0.0005	-0.0496
7	-0.0962	0.0441	0.0018	-0.0406	-0.0852	0.0839	0.0021	-0.0795
8	-0.2471	0.1560	0.1152	-0.1108	-0.2410	0.2636	0.1162	<b>-0.1590</b>
9	-0.0970	0.0213	0.1367	-0.0420	-0.0883	0.0739	0.1320	-0.0494
10	-0.0775	0.0000	0.0889	-0.0245	-0.0671	0.0518	0.0798	-0.0242

Для III ветрового района на высоте 40 м значение пульсационной составляющей ветровой нагрузки  $W_p = 0.038 \cdot 1.5 \cdot 0.62 = 0.03534 \text{ тс/м}^2$ . Из табл. 2 видно, что при учете влияния массовых сил, обусловленных шквалами, наибольшее давление больше в 4 раза ( $\alpha = 0^\circ$ ) и в 4.5 раза ( $\alpha = 30^\circ$ ), чем пульсация  $W_p$ .

**Заключение.** В предлагаемом ГИУ, основанном на ДУ Навье-Стокса, достигается большая точность и адекватность за счет: - учета угла атаки;

- учета влияния кинематической вязкости и массовых сил ветра;
- учета схем двух сближенных рядом пролетных строений.

Кроме того, не требуется учитывать коэфф. пульсации давления, коэфф. пространственной корреляции и аэродинамический коэффициент  $C_d$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. *Rodríguez-Castellanos A., Rodríguez-Sánchez J.E.* Numerical formulation to study fluid-solid interfaces excited by elastic waves // *Key Engineering Materials*, Vol. 449, 2010, pp. 54-61.
2. *Rodríguez-Castellanos A., Ortiz-Alemán C.* Indirect boundary element method applied to fluid-solid interfaces // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 31, No 3, 2011, pp. 470-477.
3. *Калицун В.Н.* Основы гидравлики и аэродинамики / В.Н. Калицун, Е.В. Дроздов. М.: Стройиздат, 1980. – 247 с.
4. *Davenport A.G.* The application of statistical concepts to the wind loading of structures // *Proc. Inst. Civil Engrs.*, Vol. 19, 1961, pp. 449-472
5. *Казакевич М.И.* Аэродинамика мостов. - М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
6. *Симиу Э.* Воздействие ветра на здания и сооружения / Э. Симиу, Р. Сканлан. М.: Стройиздат, 1984. – 360 с.
7. *Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.* Теоретическая физика т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
8. *Wu J.C., Wahbah M.M.* Numerical solutions of viscous flow equation using integral representations. - In: *Lecture Notes in Physics*, Vol. 59, 1976, pp. 448 - 453
9. *Nguyen N.C., Peraire J., Cockburn B.* A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes Flow // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No 9-12, 2010, pp. 582-597.
10. *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и её применение. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
11. *Бреббия К.* Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. - 524 с.
12. *Aleynikov S.M.* Computer implementation of boundary-element algorithms // *Foundations in Engineering Mechanics*, 2011, pp. 135-249.

#### R e f e r e n c e s

1. *Rodríguez-Castellanos, A., Rodríguez-Sánchez, J.E.* (2010). Numerical formulation to study fluid-solid interfaces excited by elastic waves, *Key Engineering Materials*, Vol. 449, pp. 54-61.
2. *Rodríguez-Castellanos, A., Ortiz-Alemán, C.* (2011). Indirect boundary element method applied to fluid-solid interfaces, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 31, No 3, pp.470-477.
3. *Kalitsun, V.N., Drozdov, E.V.* (1980). *Osnovi gidravliki i aerodinamiki*, M.: Stroyizdat, 247.
4. *Davenport, A.G.* (1961). The application of statistical concepts to the wind loading of structures, *Proc. Inst. Civil Engrs.*, Vol. 19, pp. 449-472
5. *Kazakevich, M.I.* ( 1987). *Aerodinamika Mostov*, M.: Transport, 240 p.
6. *Simiu, E., Scanlan, R.* (1984). *A Wind Action on Buildings and Structures*, M/: Stroyizdat, 360 p.
7. *Landau, L.D., Lifshiz, E.M.* (1986). *Theoretical physics*, Vol. 6, “Hydrodynamics”, M.: Nauka, 736 p.
8. *Wu, J.C., Wahbah, M.M.* (1976). Numerical solutions of viscous flow equation using integral representations, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 59, pp. 448 - 453
9. *Nguyen, N.C., Peraire, J., Cockburn, B.* (2010). A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No 9-12, 582-597.
10. *Han, H.* (1988). *Theory of Elasticity: Basis of Linear Theory and Applications*, M.: Mir, 344 p.
11. *Brebbiya, K., Telles J., Broubel, L.* (1987). *Methods of Boundary Elements*, M.: Mir, 524 p.
12. *Aleynikov, S.M.* (2011). Computer implementation of boundary-element algorithms, *Foundations in Engineering Mechanics*, pp. 135-249.

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2013, № 2

**THE APPLICATION OF BEM OF THEORY OF ELASTICITY FOR MODELING  
OF THE WIND FLOW OVER THE BRIDGE STRUCTURES**

A.S. Dorogan

*Far Eastern State Transport University (FESTU), Khabarovsk, Russia*

The approach for decision of the Nave-Stokes equation of fluid mechanics based on the BEM elasticity is shown. The offered BEM may be applied for design of the wind loading on civil constructions.

**KEYWORDS:** aerodynamics, a theory of elasticity, streaming, boundary element method, bridge structure, wind flow.