УДК 531.31:62-56

О построении универсального алгоритма управления процессом сближения механических систем с заданным многообразием в условиях неопределённости

И. А. Мухаметзянов

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
улица Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

Строится универсальный алгоритм управления процессом сближения с заданным многообразием фазового состояния механических систем любой конфигурации при произвольно действующих на них не управляющих активных сил и ограниченных случайных возмущений.

Ключевые слова: управление, связи, программное движение, универсальный алгоритм управления, процесс сближения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, движения которой описываются следующими уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + Q', \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия системы вида

$$T = \frac{1}{2}\dot q^T A(q,t)\dot q + \dot q^T b(q,t) + T_0(q,t), \tag{2}$$

q — n-мерный вектор обобщённых координат, $A(q,t)$ — $(n \times n)$ матрица, $b(q,t)$ — n-мерный вектор, $T_0(q,t)$ — скалярная функция, Q — n-мерный вектор управляющих сил, Q' — n-мерный вектор неуправляющих активных сил и случайных возмущающих сил, ограниченных по величине.

Элементы вектора $b(q,t)$ и матрицы $A(q,t)$, а также функцию $T_0(q,t)$ и их производные по q и t в области $G(q,t)$ функционирования системы (1) будем считать ограниченными и непрерывными. Заметим также, что $A(q,t)$, $b(q,t)$, $T_0(q,t)$, определяющие конфигурацию системы, кроме этих условий не стеснены другими ограничениями.

Пусть невозмущённое состояние системы (1) задано в виде $(n-k)$-мерного многообразия

$$\omega(q,t) = 0, \tag{3}$$

где ω — k-мерный вектор с непрерывными и линейно независимыми в области $G(q,t)$ элементами, непрерывно дифференцируемыми по q и t в этой области. Заметим, что $k \leqslant n$.

Задача заключается в построении управляющей обобщённой силы Q в виде комбинации непрерывных и ступенчатых функций от ω и $\dot\omega$, обеспечивающей асимптотическое сближение фазового состояния системы (1) с многообразием (3) при любых начальных условиях q_0, $\dot q_0$, t_0, независимо от конкретного вида $A(q,t)$, $b(q,t)$, $T_0(q,t)$, Q'.

Статья поступила в редакцию 3 февраля 2011 г.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00381-а.

Отыскание вектора Q в виде функции от ω и $\dot\omega$ объясняется тем, что их значения в невозмущённом состоянии (3) равны нулю, а при отклонениях от него становятся отличными от нуля. Следовательно, вектор ω может быть принят в качестве меры отклонения от многообразия (3).

Заметим, что при размерности вектора Q, равной количеству степеней свободы системы, решение поставленной задачи возможно по принципу декомпозиции [1]. Здесь важной особенностью цели данной работы является решение поставленной задачи при минимальной размерности вектора Q, равной размерности k вектора ω или при любой размерности s вектора Q, удовлетворяющей условию $k \leqslant s \leqslant n$.

2. Алгоритм управления укороченной системой

Для решения задачи переходим от обобщённых координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ к другим обобщённым координатам $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$, являющимся элементами вектора ω, и координатам $p_1, p_2, \ldots, p_{n-k}$, ортогональным к ним.

В силу ортогональности этих групп координат члены a_{qp} матрицы $A(q,p,t)$ кинетической энергии в новых координатах будут равны нулю. Следовательно, кинетическая энергия системы будет иметь следующую структуру:

$$T = T_\omega + T_p + T_0(\omega, p, t), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} T_\omega &= \frac{1}{2}\dot\omega^T A_\omega(\omega,p,t)\dot\omega + \dot\omega^T b_\omega(\omega,p,t),\\ T_p &= \frac{1}{2}\dot p^T A_p(\omega,p,t)\dot p + \dot p^T b_p(\omega,p,t). \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что матрица A_ω является определённо положительной. При этом уравнение (1) в новых координатах разбивается на две части:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\omega}\right) - \frac{\partial T}{\partial\omega} = Q_\omega + Q'_\omega, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot p}\right) - \frac{\partial T}{\partial p} = Q_p + Q'_p. \tag{7}$$

Систему (6) назовём *укороченной системой.*

Теперь переходим к преобразованиям, связанным лишь с укороченной системой, считая влияние системы (7) на систему (6) через элементы p и $\dot p$, входящими в неё через $A_\omega(\omega,p,t)$, $b(\omega,p,t)$ и их производные по t, p, ω, возмущающимися факторами системы (6). Эти преобразования связаны стремлением замены T на T_ω в (6). Из (4) и (5) следует

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\omega} = \frac{\partial T_\omega}{\partial\dot\omega} = A_\omega\dot\omega + b_\omega. \tag{8}$$

Следовательно, учитывая (4) и (8), уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_\omega}{\partial\dot\omega}\right) - \frac{\partial T_\omega}{\partial\omega} = Q_\omega + Q'_\omega + \frac{\partial T_p}{\partial\omega} + \frac{\partial T_0}{\partial\omega}. \tag{9}$$

После замены $\dfrac{\partial T_\omega}{\partial\dot\omega}$ правой частью (8) получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_\omega\dot\omega\right) + \frac{\partial b_\omega}{\partial\omega}\dot\omega + \frac{\partial b_\omega}{\partial p}\dot p + \frac{\partial b_\omega}{\partial t} - \frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial\omega} - \frac{\partial b^T}{\partial\omega}\dot\omega = Q_\omega + Q'_\omega + \frac{\partial T_p}{\partial\omega} + \frac{\partial T_0}{\partial\omega}. \tag{10}$$

Это уравнение можно представить более компактно в виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_\omega\dot{\omega}\right) = Q_\omega + B_\omega^T\dot{\omega} + \tilde{Q}_\omega + \frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial\omega}, \tag{11}$$

где

$$B_\omega = \frac{\partial b_\omega}{\partial\omega} - \left(\frac{\partial b_\omega}{\partial\omega}\right)^T$$

— кососимметричная матрица,

$$\tilde{Q}_\omega = \frac{\partial T_p}{\partial\omega} + \frac{\partial T_0}{\partial\omega} - \frac{\partial b_\omega}{\partial p}\dot{p} - \frac{\partial b_\omega}{\partial t} + Q'_\omega.$$

Определим скалярное произведение (11) на $(\dot{\omega}+2\omega)$, умножая сначала на $\dot{\omega}$, а затем на 2ω. При умножении (11) на $\dot{\omega}$ в его левой части получим

$$\dot{\omega}^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A_\omega\dot{\omega}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\omega}^T A_\omega\dot{\omega}\right) - \ddot{\omega}^T A_\omega\dot{\omega},$$

где $\dot{\omega}^T A_\omega\dot{\omega} = 2T_\omega^{(2)}$.

Теперь, добавляя в обе части уравнения (11) сумму

$$-\dot{\omega}^T\frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial\omega} - \dot{p}^T\frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial p} - \frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial t},$$

получим

$$\frac{\mathrm{d}T_\omega^{(2)}}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega}^T\left[Q_\omega + B_\omega^T\dot{\omega} + \tilde{Q}_\omega + \dot{\omega}^T\frac{\partial A_\omega}{2\partial\omega}\dot{\omega}\right] - \dot{\omega}^T\frac{\mathrm{d}A_\omega}{2\mathrm{d}t}\dot{\omega}. \tag{12}$$

Скалярное произведение (11) на 2ω имеет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega^T 2A_\omega\dot{\omega}\right) = \dot{\omega}^T 2A_\omega\dot{\omega} + 2\omega^T\left[Q_\omega + B_\omega^T\dot{\omega} + \tilde{Q}_\omega + \dot{\omega}^T\frac{\partial A_\omega}{2\partial\omega}\dot{\omega}\right], \tag{13}$$

так как

$$2\omega^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_\omega\dot{\omega}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega^T 2A_\omega\dot{\omega}\right) - \left(\dot{\omega}^T 2A_\omega\dot{\omega}\right), \quad \frac{\partial T_\omega^{(2)}}{\partial\omega} = \dot{\omega}^T\frac{\partial A_\omega}{2\partial\omega}\dot{\omega}.$$

Суммируя (12) и (13), получим

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\left(\dot{\omega}^T A_\omega\dot{\omega} + \omega^T 2A_\omega\dot{\omega}\right) = \\ &= (\dot{\omega}+2\omega)^T\left(Q_\omega + B_\omega^T\dot{\omega} + \dot{\omega}^T\frac{\partial A_\omega}{2\partial\omega}\dot{\omega} + \tilde{Q}_\omega\right) - \dot{\omega}^T\left(\frac{\mathrm{d}A_\omega}{2\mathrm{d}t} + 2A_\omega\right)\dot{\omega}.\end{aligned} \tag{14}$$

Вектор обобщённой силы управления зададим в виде:

$$Q_\omega = U_\omega - D\dot{\omega} - 2C\omega, \tag{15}$$

где D и C — знакоопределённые положительные постоянные $k\times k$-матрицы, U_ω — ступенчатая часть Q_ω, определяемая ниже.

При подстановке (15) в (14) в правой части появляются члены:

$$-\left(\dot{\omega}+2\omega\right)^T D\dot{\omega} = -\omega^T 2D\dot{\omega} - \dot{\omega}^T D\dot{\omega} = -\frac{\mathrm{d}\left(\omega^T D\omega\right)}{\mathrm{d}t} - \dot{\omega}^T D\dot{\omega},$$
$$-\left(\dot{\omega}+2\omega\right)^T 2C\omega = -\omega^T 2C\dot{\omega} - 4\omega^T C\omega = -\frac{\mathrm{d}\left(\omega^T C\omega\right)}{\mathrm{d}t} - 4\omega^T C\omega.$$

Первые слагаемые правых частей этих выражений перенесём в левую часть (14). Тогда уравнение (14) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega} + \omega^T 2A_\omega \dot{\omega} + \omega^T (D+C)\omega\right] = \\ = \left(\dot{\omega}+2\omega\right)^T \left(U_\omega + \dot{\omega}^T \frac{\partial A_\omega}{2\partial\omega}\dot{\omega} + B_\omega^T \dot{\omega} + \tilde{Q}_\omega\right) - \\ - \dot{\omega}^T \left(\frac{\mathrm{d}A_\omega}{2\mathrm{d}t} - 2A_\omega + D\right)\dot{\omega} - 4\omega^T C\omega. \quad (16)$$

При задании матриц D и C, удовлетворяющих условию $D+C > A_\omega$, функция

$$V = \dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega} + \omega^T 2A_\omega \dot{\omega} + \omega^T (D+C)\omega \quad (17)$$

в левой части (16) становится положительно определённой функцией вида

$$V = \left(\dot{\omega}+\omega\right)^T A_\omega \left(\dot{\omega}+\omega\right) + \omega^T \tilde{C}\omega, \quad (18)$$

где $\tilde{C} = C + D - A_\omega$.

Действительно, функцию (17) можно представить в виде:

$$V = \dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega} + \omega^T 2A_\omega \dot{\omega} + \omega^T A_\omega \omega + \omega^T \tilde{C}\omega.$$

Первые три слагаемые этой суммы можно представить в виде

$$\dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega} + \omega^T 2A_\omega \dot{\omega} + \omega^T A_\omega \omega = \left(\dot{\omega}+\omega\right)^T A_\omega \left(\dot{\omega}+\omega\right). \quad (19)$$

Следовательно, функция (17), являющаяся знакоопределённой положительной функцией, допускающей бесконечно малый высший предел по ω, $\dot{\omega}$, может быть принята в качестве функции Ляпунова для стабилизации невозмущённого состояния $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0$ системы, если можно добиться знакоопределённой отрицательности правой части (16) подходящим выбором функции U_ω и матриц C и D.

Для выбора U_ω предложим способ, аналогичный принципу декомпозиции [1]. Для этого вектор U_ω выберем в виде:

$$U_\omega = -\mathrm{sign}\,\left(\dot{\omega}+2\omega\right)^T \left(U_0 + \dot{\omega}^T D_0 \dot{\omega}\right), \quad (20)$$

где U_0 — постоянный вектор, удовлетворяющий условию

$$U_0 > \left|\tilde{Q}_\omega\right|, \quad (21)$$

так как $(\dot{\omega}+2\omega)^T B_\omega^T \dot{\omega} = 0$, $\dot{\omega}^T D_0 \dot{\omega}$ — вектор с элементами $\dot{\omega}^T D_{0i}\dot{\omega}$, где D_{0i} — определённо положительные $(k \times k)$-матрицы, удовлетворяющие условию

$$D_{0i} > \frac{1}{2}\max\left|\frac{\partial A_\omega}{\partial \omega_i}\right|. \quad (22)$$

При этом первый член в правой части (16) имеет следующее выражение:

$$(\dot\omega + 2\omega)^T U_\omega = \sum_{i=1}^{k} -(\dot\omega_i + 2\omega_i)\left[\left(U_{0i} + \dot\omega^T D_{0i}\dot\omega\right)\operatorname{sign}\,(\dot\omega_i + 2\omega_i)\right] < 0,$$

где U_{0i} — положительные элементы вектора U_0.

Таким образом, правая часть (16) принимает вид

$$W = \sum_{i=1}^{k} -(\dot\omega_i + 2\omega_i)\left[\left(U_{0i} + \dot\omega^T D_{0i}\dot\omega\right)\operatorname{sign}\,(\dot\omega_i + 2\omega_i)\right] - \\ - \dot\omega^T\left(\frac{\mathrm{d}A_\omega}{2\mathrm{d}t} - 2A_\omega + D\right)\dot\omega - 4\omega^T C\omega. \quad (23)$$

При условии

$$-2A_\omega + D > \frac{\mathrm{d}A_\omega}{2\mathrm{d}t}, \quad C > 0 \quad (24)$$

функция W становится знакоопределённой отрицательной функцией от ω, $\dot\omega$. Следовательно, при выборе U_ω в виде (20) невозмущённое состояние $\omega = 0$, $\dot\omega = 0$ системы (6) будет асимптотически стабилизировано.

Таким образом, искомый вектор обобщённых сил управления Q_ω построен в виде (15), где U_ω, представляющая собой ступенчатую часть управления, имеет вид (20).

3. Алгоритм управления исходной системой

Теперь необходимо определить вектор обобщённых сил управления Q исходной системой (1). С этой целью определим зависимость между Q и построенной в п. 2 функцией Q_ω. Для этого определим сумму элементарных работ всех активных сил управления

$$\delta A^\alpha = Q^T\delta q, \quad (25)$$

где δq — вектор изохронных вариаций элементов q.

Выделим из (25) элементарную работу $\delta A^\alpha_\omega = Q^T_\omega\delta\omega$, совершаемую лишь при вариациях

$$\delta\omega = \Omega\delta q, \quad (26)$$

вытекающих из (3), где $\Omega = \left\|\dfrac{\partial\omega}{\partial q}\right\|$ — прямоугольная $(k \times n)$ матрица-строка.

Из системы k уравнений (26) определим элементы вектора δq в количестве n через k элементов вектора $\delta\omega$. Для этого вектор δq разложим на две составляющие: $(\delta q)_N$ — вектор, нормальный к многообразию (3), и $(\delta q)_\tau$ — вектор, касательный к (3). Первый из них ищем в виде $(\delta q)_N = \Omega^T\lambda$, где λ — k-мерный искомый вектор.

Подставляя

$$\delta q = (\delta q)_N + (\delta q)_\tau \quad (27)$$

в (26), получим $\Omega\Omega^T\lambda + \Omega(\delta q)_\tau = \delta\omega$. Следовательно, имеем $(\delta q)_N = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega$.

Подставляя в (25) значение (27), получим

$$\delta A^\alpha = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega + Q^T(\delta q)_\tau.$$

Второй член в правой части этого выражения не зависит от $\delta\omega$. Следовательно, частью суммы элементарных работ управляющих сил, совершаемых на элементарных перемещениях δq, вносящих вклад в вариацию $\delta\omega$, является

$$\delta A^{\alpha}_{\omega} = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\delta\omega,$$

откуда

$$Q^T_{\omega} = Q^T\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}. \tag{28}$$

Если вектор обобщённых сил управления исходной системой (1) задавать в виде $Q = M_0 u$, где u — r-мерный вектор управления, $M_0(q, \dot{q}, t)$ — матрица $(n \times r)$, удовлетворяющая в области G условию $\det \left\| M_0^T M_0 \right\| \neq 0$ и $\Omega M_0 \neq 0$, то при подстановке $Q = M_0 u$ в (28) получим следующую систему k уравнений для определения r элементов вектора u:

$$(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0 u = Q_{\omega}. \tag{29}$$

Заметим, что правая часть этого уравнения была определена в виде (15), где U_{ω} имеет вид (20).

Решение уравнения (29) относительно u можно представить в виде [2]:

$$u = \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} Q_{\omega} + u_{\tau}, \tag{30}$$

где $\bar{\Omega}^T = (\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega M_0$, $\det \|\bar{\Omega}\,\bar{\Omega}^T\| \neq 0$, u_{τ} — r-мерный произвольно задаваемый вектор, удовлетворяющий условию $\bar{\Omega} u_{\tau} = 0$, который можно представить в виде [2]:

$$u_{\tau} = \left[E - \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} \bar{\Omega}\right] \tilde{u},$$

где E — единичная матрица, $\tilde{u}$ — произвольный вектор. Заметим, что при $r = k$ матрица $\bar{\Omega}$ является квадратной, причём $E - \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\bar{\Omega}^T\right)^{-1} \bar{\Omega} = 0$. Следовательно, имеет место $u_{\tau} \equiv 0$. Отсюда следует, что минимальная размерность вектора управления u может быть равна размерности k вектора ω при $k < n$. Как отмечалось в п.1, в этом заключается принципиальное преимущество предлагаемого здесь метода управления от принципа декомпозиции [1] при задании невозмущённого состояния системы в виде $(n-k)$-мерного многообразия (3).

Следует отметить также то, что в случае $r > k$, полагая $u_{\tau} = 0$, в силу произвольности вектора u_{τ}, получим вектор управления u, имеющий минимальную евклидову норму, в виде

$$u = \bar{\Omega}^T \left(\bar{\Omega}\Omega^T\right)^{-1} \left(U_{\omega} - D\dot{\omega} - C\omega\right), \tag{31}$$

где U_{ω} — ступенчатая функция (20).

В частном случае $k = r = 1$ матрицы M_0 и Ω^T становятся n-мерными векторами-столбцами, а C, D, U_{ω}, U_0, ω — скалярными величинами. При этом из (31) получим скалярное управление

$$u = \frac{\Omega^2}{\lambda} \left(U_{\omega} - D\dot{\omega} - C\omega\right), \tag{32}$$

где λ — скалярное произведение векторов M_0 и Ω^T, U_{ω} — выражается в виде (20).

4. Примеры

4.1. Управление движением точки по намотанной на круглый цилиндр винтовой линии

В качестве обобщённых координат примем цилиндрические координаты: $r = R = \text{const}$ — радиус поперечного сечения цилиндра, z — координата, определяющая положение центра поперечного сечения цилиндра, на котором находится движущаяся по нему точка, φ — полярный угол поворота прямой, проходящей через точку и центр сечения.

Для простоты примем массу точки, равной единице. При этом проекциями скорости точки на оси цилиндрической системы координат являются $v_r = \dot{r}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, $v_z = \dot{z}$. Следовательно, имеет место

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \tag{33}$$

При $r = R = \text{const}$ обобщёнными координатами являются $q_1 = \varphi$, $q_2 = z$.

Параметрическое уравнение винтовой линии имеет вид $z = t$, $\varphi = kt$, где k — параметр, определяющий шаг винта $h = 2\pi/k$. При этом уравнением невозмущённой траектории точки является $\omega = \varphi - kz = 0$.

В возмущённом движении происходят отклонения от этой траектории и имеет место $\omega \neq 0$, $\dot{\omega} \neq 0$.

Теперь от обобщённых координат φ и z переходим к новым ω и p. Производную по времени от p ищем в виде $\dot{p} = a\dot{\varphi} + b\dot{z}$, где a и b — постоянные, определяемые из условия отсутствия в v^2 в новых координатах ω и p члена, содержащего произведение $\dot{\omega}\dot{p}$.

Теперь $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ в (33) путём решения системы $\dot{\omega} = \dot{\varphi} - k\dot{z}$, $\dot{p} = a\dot{\varphi} + b\dot{z}$ заменим на $\dot{z} = (\dot{p} - a\dot{\omega})/\Delta$, $\dot{\varphi} = (b\dot{\omega} + k\dot{p})/\Delta$, где $\Delta = ak + b \neq 0$.

Подставляя эти выражения в (33) с учётом $\dot{r} = 0$, получим

$$v^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left[R^2\left(b\dot{\omega} + k\dot{p}\right)^2 + \left(\dot{p} - a\dot{\omega}\right)^2\right].$$

Отсюда $v^2 = A_\omega\dot{\omega}^2 + A_p\dot{p}^2 + A_{\omega p}\dot{\omega}\dot{p}$, где

$$A_\omega = \frac{R^2b^2 + a^2}{\Delta^2}, \quad A_p = \frac{R^2k^2 + 1}{\Delta^2}, \quad A_{\omega p} = \frac{R^2bk - a}{\Delta^2}. \tag{34}$$

Определим a и b из условия $A_{\omega p} = 0$ в виде $a = kR^2b$. При этом имеем $\Delta = \left(k^2R^2 + 1\right)b$, а из условия $\Delta \neq 0$ следует $b \neq 0$.

Подставляя значения a, Δ в (34), получим

$$A_\omega = \frac{R^2}{1 + R^2k^2}, \quad A_p = \frac{1}{b^2(1 + R^2k^2)},$$

где b можно задавать произвольно при условии $b \neq 0$.

При одномерном, т.е. скалярном управлении u, задавая M_0 в виде $M_0^T = \|\mu_1, \mu_2\|$ и учитывая $\Omega = \|1, -k\|$, A_ω, A_p — постоянные величины, из (32) получим выражение управления u в виде

$$u = \frac{\Omega^2}{\lambda}\left[-U_0\operatorname{sign}\left(\dot{\omega} + 2\omega\right) - D\dot{\omega} - 2C\omega\right], \tag{35}$$

где $\Omega^2 = 1 + k^2$, $\lambda = \mu_1 - k\mu_2 \neq 0$.

Из условия $\lambda \neq 0$ следует, что при выборе μ_1 и μ_2 необходимо исходить из $\mu_1 \neq k\mu_2$. Значение U_0 в (35) необходимо выбрать из условия $U_0 > \max|Q'_\omega|$, где значение $\max|Q'_\omega|$ можно оценить, выражая Q'_ω через Q' с помощью (28).

Например, при отсутствии возмущений значение Q' определяется моментом силы тяжести точки, равной $mgR\sin\varphi$. Следовательно, значение U_0 в (35) можно взять равным $U_0 = mgR/(1+k^2)$, так как $\max|Q'_\omega| \leqslant mgR/(1+k^2)$. При этом управление (35) примет вид:

$$u = \frac{1+k^2}{\mu_1 - k\mu_2}\left[-\frac{mgR}{1+k^2}\mathrm{sign}\,(\dot\omega + 2\omega) - D\dot\omega - 2C\omega\right],$$

где $D > 2R^2/(1+R^2k^2)$, $C > 0$, $\mu_1 \neq k\mu_2$.

Заметим, что $(\mu_1 - k\mu_2)$ является скалярным произведением вектора Q на вектор M_0. Следовательно, при равенстве этого произведения нулю управляющий вектор Q будет лежать в касательной плоскости к многообразию $\omega = \varphi - kz = 0$. Поэтому изменениями ω, происходящими в подпространстве, нормальном к этому многообразию, точкой управлять невозможно. Следовательно, при таком управлении процесс стабилизации многообразия становится не управляемым.

4.2. Управление движением точки по намотанной на тор винтовой линии

При движении точки по поверхности тора с постоянным радиусом $r = R = \mathrm{const}$ поперечного сечения в качестве обобщённых координат примем тороидальные координаты: $r = R = \mathrm{const}$ — радиус поперечного сечения тора, φ — угол поворота прямой, проходящей через точку и центр сечения, при относительном движении точки по внешней окружности движущегося сечения, ψ — угол поворота поперечного сечения тора вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тора.

Параметрическое уравнение винтовой линии имеет вид $a\psi = t$, $\varphi = \tilde{k}t$, где a — расстояние от центра поперечного сечения до оси вращения вокруг вертикальной оси ($a > R$). При этом уравнением невозмущённой траектории точки является $\omega = \varphi - k\psi = 0$. В возмущённом движении происходят отклонения от этой траектории и имеет место $\omega \neq 0$, $\dot\omega \neq 0$. Для простоты массу точки примем равной единице.

При этом проекциями скорости точки на оси тороидальной системы координат являются $v_r = \dot r = 0$, $v_\varphi = R\dot\varphi + (a + R\cos\varphi)\dot\psi$. Следовательно, имеем

$$v^2 = R^2\dot\varphi^2 + (a + R\cos\varphi)^2\dot\psi^2. \tag{36}$$

Теперь от обобщённых координат φ и ψ переходим к новым ω и p. Производную по времени от p ищем в виде $\dot p = \tilde a\dot\varphi + \tilde b\dot\psi$, где $\tilde a$ и $\tilde b$ — определяются из условия отсутствия в выражении v^2 в новых координатах ω и p члена, содержащего произведение $\dot\omega\dot p$.

Теперь $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ в (36) путём решения системы $\dot\omega = \dot\varphi - k\dot\psi$, $\dot p = \tilde a\dot\varphi + \tilde b\dot\psi$ заменим на

$$\dot\varphi = \frac{\dot p - \tilde a\dot\omega}{\Delta}, \quad \dot\psi = \frac{\tilde b\dot\omega + k\dot p}{\Delta},$$

где $\Delta = \tilde b + k\tilde a \neq 0$.

Подставляя эти выражения в (36), получим

$$v^2 = A_\omega\dot\omega^2 + A_p\dot p + A_{\omega p}\dot\omega\dot p,$$

где

$$\begin{gathered} A_\omega = \frac{\tilde a^2(a + R\cos\varphi)^2 + \tilde b^2R^2}{\Delta^2}, \quad A_p = \frac{(a + R\cos\varphi)^2 + R^2k^2}{\Delta^2}, \\ A_{\omega p} = \frac{2}{\Delta^2}\left[R^2\tilde b k - \tilde a(a + R\cos\varphi)^2\right]. \end{gathered} \tag{37}$$

Из условия $A_{\omega p} = 0$ следует $R^2 k\tilde{b} - \tilde{a}(a + R\cos\varphi)^2 = 0$, откуда $\tilde{b} = \dfrac{\tilde{a}}{R^2 r}(a + R\cos\varphi)^2$.

При условии $\tilde{a} \neq 0$ можно выбрать $\tilde{a}$ произвольно. Например, при $\tilde{a} = 1$ имеют место

$$\tilde{b} = \frac{(a + R\cos\varphi)^2}{R^2 k}, \quad \Delta = \frac{R^2 k^2 + (a + R\cos\varphi)^2}{R^2 k}.$$

Подставляя эти выражения в (37), получим

$$A_\omega = \frac{R^2 (a + R\cos\varphi)^2}{R^2 k^2 (a + R\cos\varphi)^2}, \quad A_p = \frac{R^4 k^2}{R^2 k^2 + (a + R\cos\varphi)^2}. \tag{38}$$

При одномерном, т.е. скалярном управлении u при задании вектора M_0 в виде $M_0^T = \|\mu_1, \mu_2\|$, учитывая $\Omega = \|1, -k\|$, получим из (20) управление u в виде

$$u = \frac{\Omega^2}{\lambda}\left[-\left(U_0 + \dot{\omega}^T D_0 \dot{\omega}\right)\operatorname{sign}(\dot{\omega} + 2\omega) - D\dot{\omega} - 2C\omega\right], \tag{39}$$

где $\Omega^2 = 1 + k^2$, $\lambda = \mu_1 - k\mu_2 \neq 0$, $U_0 > \max\left|\tilde{Q}_\omega\right|$. Из условия $\lambda \neq 0$ следует, что при выборе μ_1 и μ_2 необходимо исходить из $\mu_1 \neq k\mu_2$.

Значение U_0 в (39) необходимо выбрать из условия $U_0 > \max|Q'_\omega|$, где значение $\max|Q'_\omega|$ можно оценить, выражая Q'_ω через Q' с помощью (28). Например, при отсутствии возмущений значение Q', определяемое моментом силы тяжести точки, равной $mgR\sin\varphi$, можно оценить так:

$$\max|Q'_\omega(mg)| \leqslant \frac{mgR}{1 + k^2}. \tag{40}$$

Следовательно, значение U_0 в (35) можно взять равным $U_0 = mgR/(1 + k^2)$.

Теперь оценим член $\dfrac{\partial T_p}{\partial \omega}$, входящий в выражение $\tilde{Q}_\omega$ в (11).

Имеем $T_p = \dfrac{1}{2}\dot{p}^T A_p \dot{p}$, где A_p имеет вид (38), а её производную по ω представим в виде:

$$\frac{\partial A_p}{\partial \omega} = \frac{\partial A_p}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}.$$

Так как $\dfrac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 1$, то

$$\frac{\partial A_p}{\partial \omega} = \frac{\partial A_p}{\partial \varphi} = \frac{2R^5 k^2 (a + R\cos\varphi)\sin\varphi}{[R^2 k^2 + (a + R\cos\varphi)^2]^2}. \tag{41}$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\max\left|\frac{\partial A_p}{\partial \omega}\right| \leqslant \frac{2R^5 k^2 (a + R)}{[R^2 k^2 + (a - R)^2]^2}. \tag{42}$$

Теперь оценим $\max\left|\dfrac{\partial A_\omega}{\partial \omega}\right|$ для выбора значения D_0, удовлетворяющего условию (22) вида $D_0 > \max\left|\dfrac{\partial A_\omega}{\partial \omega}\right|$. Для этого, обращаясь к (38), определим

$$\frac{\partial A_\omega}{\partial \omega} = \frac{\partial A_\omega}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{-2R^2(a+R\cos\varphi)\sin\varphi\left[R^2k^2(a+R\cos\varphi)^2\right]+2R^3\sin\varphi(a+R\cos\varphi)^3}{\left[R^2k^2+(a+R\cos\varphi)^2\right]^2}. \quad (43)$$

Отсюда

$$\max\left|\frac{\partial A_\omega}{\partial\omega}\right| \leqslant \frac{2R^3(a+R)^3(Rk^2+1)}{\left[R^2k^2+(a-R)^2\right]^2}. \quad (44)$$

Следовательно, условие (22) выполняется при

$$D_0 > \frac{2R^3(a+R)^3(Rk^2+1)}{\left[R^2k^2+(a-R)^2\right]^2}. \quad (45)$$

Теперь оценим значение $\max\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right|$, необходимое при выборе D, из условия (24):

$$D > \max\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right| + 2\max A_\omega. \quad (46)$$

Имеем $\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_\omega}{\partial\varphi}\dot\varphi$. Отсюда в силу (43) имеем

$$\max\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \frac{2R^3(a+R)^3(Rk^2+1)}{\left[R^2k^2+(a-R)^2\right]^2}\max|\dot\varphi|. \quad (47)$$

Из (38) следует

$$\max A_\omega \leqslant \frac{R^2(a+R)^2}{R^2k^2+(a-R)^2}. \quad (48)$$

Таким образом, значение U_0 в (20), удовлетворяющее условию $U_0 > |\tilde{Q}_\omega|$, оценивается неравенством

$$U_0 > \max|Q'_\omega(mg)| + \max\left|\frac{\partial A_p}{\partial\omega}\right|\max\left|\dot{p}^2\right|, \quad (49)$$

где первое слагаемое правой части (49) оценивается неравенством (40), а значение $\max\left|\frac{\partial A_p}{\partial\omega}\right|$ — выражением (42). Значение D_0 в (20) оценивается неравенством (45), а $\max\left|\dot{p}^2\right|$ — неравенством $\max\left|\dot{p}^2\right| \leqslant \max\left(|\tilde{a}\dot\varphi| + \left|\tilde{b}\dot\psi\right|\right)^2$.

Итак, построено управление (39) с параметрами D_0, U_0, C, выбираемыми из условий (45), (49), $C > 0$, а D — из условия (46) путём замены в нём значений $\max\left|\frac{\mathrm{d}A_\omega}{\mathrm{d}t}\right|$ и $\max A_\omega$, правыми частями (47) и (48).

4.3. Управление процессом нарезания резьбы на круглую цилиндрическую трубу

Процесс нарезания резьбы на внешнюю или внутреннюю поверхность трубы можно осуществить двумя способами: двигая и вращая трубу относительно неподвижного резца или двигая и вращая резец относительно неподвижной трубы. Такими способами можно осуществить этот процесс одним и тем же законом поступательного движения оси трубы с одновременным вращением вокруг этой оси или теми же движениями резца с держателем. Зададим закон этого движения в следующем параметрическом виде:

$$z = t, \quad \varphi = kt,$$

где z — координата центра масс движущегося тела на прямой, параллельной оси цилиндра, φ — угол поворота тела вокруг этой оси. При этом на внешней или внутренней поверхности трубы описывается винтовая линия $\omega = \varphi - kz$ с шагом $k = \dfrac{2\pi R}{k}$, где R — радиус наружной окружности трубы за вычетом глубины резания в случае нарезания резьбы на внешнюю поверхность трубы, в случае нарезания резьбы на внутреннюю поверхность трубы R есть радиус внутренней окружности трубы плюс глубина резания, k — заданная постоянная, определяющая шаг винта.

Как известно, при этом кинетическая энергия движущей части определяется по формуле Кёнига:

$$T = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{50}$$

где m — масса движущегося тела, J — момент инерции этого тела относительно оси трубы. В случае движущегося резца с держателем положение их центра масс будем считать лежащим на оси трубы.

Теперь вместо обобщённых координат z и φ введём новые ω и p, причём производную по времени от p будем искать в виде $\dot{p} = a\dot{\varphi} + b\dot{z}$, где a и b определим из условия отсутствия в выражении T в новых координатах члена, содержащего произведение $\dot{\omega}\dot{p}$.

Теперь представим T через $\dot{\omega}$ и $\dot{p}$, подставляя в (50) значения

$$\dot{z} = \frac{\dot{p} - a\dot{\omega}}{\Delta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{b\dot{\omega} + k\dot{p}}{\Delta},$$

где $\Delta = ak + b \neq 0$, найденные из уравнений

$$\dot{\omega} = \dot{\varphi} - k\dot{z}, \quad \dot{p} = a\dot{\varphi} + b\dot{z}.$$

Получим

$$T = \frac{m}{2\Delta^2}\left(\dot{p} + a\dot{\omega}\right)^2 + \frac{J}{2\Delta^2}\left(\dot{\omega}b + k\dot{p}\right)^2.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{2}\dot{\omega}^T A_\omega \dot{\omega} + \frac{1}{2}\dot{p}^T A_p \dot{p} + A_{\omega p}\dot{\omega}\dot{p},$$

где

$$A_\omega = \frac{ma^2 + Jb^2}{\Delta^2}, \quad A_p = \frac{m + Jk^2}{\Delta^2}, \quad A_{\omega p} = \frac{Jkb - ma}{\Delta^2}.$$

Из условия $A_{\omega p} = 0$ следует, что $a = \dfrac{Jk}{m}b$. Подставляя значение a, выраженное через b, получим

$$\Delta = \frac{\left(Jk^2 + m\right)b}{m}, \quad A_\omega - \frac{Jm}{Jk^2 + m}, \quad A_p = \frac{m^2}{b^2\left(Jk^2 + m\right)}. \tag{51}$$

Заметим, что параметр b, входящий в (51), можно задавать произвольно при условии $b \neq 0$.

При одномерном, т.е. скалярном управлении u, задавая вектор M_0 в виде $M_0^T = \|\mu_1, \mu_2\|$ и учитывая $\Omega = \|1, -k\|$, из (32) получим

$$u = -\frac{\Omega^2}{\lambda}\left[U_0 \operatorname{sign}\left(\dot{\omega} + 2\omega\right) + D\dot{\omega} + 2C\omega\right], \tag{52}$$

где $U_0 > \max|Q'_\omega|$, так как A_ω и A_p являются постоянными, $\Omega^2 = 1 + k^2$, $\lambda = \mu_1 - k\mu_2 \neq 0$. Отсюда вытекает необходимость соблюдения условия $\mu_1 \neq k\mu_2$ при выборе μ_1 и μ_2.

Значение Q'_ω можно определить из (28) через Q'. Например, при отсутствии случайных возмущающих сил $\max|Q'_\omega|$ оценивается неравенством

$$\max|Q'_\omega| \leqslant \frac{\max|M_c| + k\max|P_c|}{1 + k^2}, \tag{53}$$

где M_c — момент сопротивления резанию относительно оси вращения, P_c — сила сопротивлению резанию вдоль оси трубы. Следовательно, значение U_0 в (52) может быть принято равным правой части (53). Заметим, что данный процесс можно осуществить путём управления лишь вращением вокруг оси цилиндра, оставляя движение вдоль оси произвольным. При этом $\mu_2 = 0$, $\mu_1 \neq 0$, а значение U_0 оценивается неравенством $U_0 \geqslant \max|M_c|/(1 + k^2)$.

Литература

1. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 2. — С. 300–303. [*Pyatnickiyj E. S.* Princip dekompozicii v upravlenii mekhanicheskimi sistemami // Dokladih AN SSSR. — 1988. — T. 300, No 2. — S. 300–303.]
2. *Мухаметзянов И. А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 10. — С. 16–23. [*Mukhametzyanov I. A.* Postroenie uravneniyj programmnihkh dvizheniyj // Avtomatika i telemekhanika. — 1972. — No 10. — S. 16–23.]

UDC 531.31:62-56

On Construction of the Universal Controls Algorithm of the Approachs Pocess Mechanics Systems with Given Manifold Provided that Indeterminancy

I. A. Mukhametzyanov

Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The procedure of construction of the universal controls algorithm of the approachs process mechanics systems with given manifold provided that indeterminancy is proposed.

Key words and phrases: control, constraints, programmed motion, universal controls algorithm, approachs process.