УДК 530.1

# Обобщение абелевой калибровочной симметрии

**Н. П. Третьяков***, **А. Я. Терлецкий**†

* *Кафедра прикладной математики*
*Российский государственный социальный университет*
*ул. Вильгельма Пика, д.4, Москва, 129226, Россия*

† *Кафедра экспериментальной физики*
*Российский университет дружбы народов*
*ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия*

Предложено обобщение абелевой $U(1)$ группы калибровочной симметрии, при котором единица и генератор алгебры Ли исходной группы меняются местами между собой. В результате получается коммутативное расширение группы симметрии, двумерное матричное представление которой содержит матрицы с определителями, равными не только 1, как в случае $SO(2)$, но и $-1$. Целью настоящей работы является обоснование необходимости существования так называемых мнимых зарядов и электромагнитных полей с отрицательной плотностью энергии. Проанализированы некоторые космологические следствия существования таких полей.

**Ключевые слова:** калибровочная симметрия, абелева группа, мнимые заряды, отрицательная плотность энергии, ускоренное расширение вселенной.

Выдвинутая Я.П. Терлецким гипотеза о существовании мнимых зарядов и электромагнитных полей с отрицательной плотностью энергии [1] связана с формальной подстановкой в закон Кулона вместо действительных величин зарядов $\pm q$ мнимых величин $\pm i\,q$. В этом случае одноимённые заряды будут притягиваться, а разноимённые — отталкиваться. Именно это свойство представляет собой фундаментальное физическое отличие их от обычных зарядов; представление в виде мнимых величин — всего лишь математический приём описания. Полагая формально заряды и поля комплексными, в работе [1] были получены уравнения Максвелла и выражение для силы Лоренца (без взаимодействия между обычными и мнимыми зарядами). Одним из вариантов таких уравнений является следующий:

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_e;\ \operatorname{div}\ \vec{e} = -4\pi\rho_m;\ \operatorname{div}\vec{B} = 0;\ \operatorname{div}\ \vec{b} = 0;\\
\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};\ \operatorname{rot}\vec{b} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial\,\vec{e}}{\partial t};\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \operatorname{rot}\vec{e} = \frac{1}{c}\frac{\partial\,\vec{b}}{\partial t};\\
\vec{F}_{\text{Лор}} = \rho_e\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{j}_e\vec{B}\right] + \rho_m\vec{e} - \frac{1}{c}\left[\vec{j}_m\vec{b}\right].
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{e}$, $\vec{b}$ — соответственно «обычные» и «минус» поля, $\rho_e$, $\vec{j}_e$, $\rho_m$, $\vec{j}_m$ — их источники.

Стандартный вывод теоремы Пойнтинга из уравнений (1) приводит к таким выражениям для мощности силы Лоренца, плотности энергии и плотности потока энергии:

$$\begin{gathered}
Q = -\frac{\partial\,w}{\partial\,t} - \operatorname{div}\,\vec{S};\quad w = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) - \frac{1}{8\pi}\left(\vec{e}^{\,2} + \vec{b}^2\right);\\
\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\,\vec{B}\right] - \frac{c}{4\pi}\left[\vec{e}\,\vec{b}\right],
\end{gathered}$$

из которых очевидно, что плотность энергии минус-полей отрицательна. В работе [2] сделана попытка феноменологического вывода уравнений со взаимодействием между обычными и мнимыми зарядами; в его отсутствии они взаимодействуют между собой посредством лишь гравитации (т.е. мнимые заряды принадлежат так называемому «скрытому сектору»).

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2009 г.

Следует отметить, что в работах [1, 2] уравнения получены чисто формально, что не придаёт убедительности такому их выводу. Как известно, существование электромагнитного поля может быть выведено исключительно из требования инвариантности лагранжиана относительно группы преобразований $U\,(1)$; векторный потенциал $A_\mu$ возникает как компенсирующее калибровочное поле, а элементарный заряд — как константа взаимодействия этого поля с полями материи [3]. Целью данной работы и является такое обобщение $U\,(1)$ — симметрии, которое приводит к необходимости существования минус — электромагнитного поля как калибровочного. Тем самым гипотеза Я.П. Терлецкого поднимается на более высокий уровень обоснованности.

Идея обобщения состоит в следующем. Группа $U\,(1)$ изоморфна $SO\,(2)$, т.е. группе ортогональных матриц с определителем, равным единице:

$$t_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Расширение группы до матриц с детерминантом минус единица может быть проведено добавлением к вращениям (2) отражений осей. Но тогда получается $O\,(2)$ — полная ортогональная группа, которая является некоммутативной даже в случае двух измерений. Это противоречит нашей попытке вывести существование минус-поля по аналогии с обычным электромагнитным полем, т.е. из некоторой коммутативной группы преобразований симметрии лагранжиана. На матрицы (2) можно посмотреть с другой стороны: как на анти циркулянтные, т.е. матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ q\,b & a \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $q = -1$. Вообще, при любом фиксированном $q$ невырожденные матрицы вида (3) образуют коммутативную группу. Её можно обозначить $C_q\,(2, C) - q$ — циркулянтные матрицы размера 2 на 2 с комплексными элементами. Если $q = 1$, то матрицы называют просто циркулянтными.

Можно построить коммутативную группу циркулянтных матриц, зависящих от одного непрерывного параметра $\alpha$, с детерминантами $\pm 1$, т.е. $SC_1\,(2, C)$. Группа состоит из элементов двух типов, имеющих общее и инфинитезимальное представление:

$$t_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \; s_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \\ \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4}$$
$$\det t_\alpha = 1; \quad \det s_\alpha = -1;$$

Как видно из (4), элементы группы $t_\alpha$ и $s_\alpha$ отличаются тем, что единица и генератор меняются местами. Легко видеть, что выполняются все групповые аксиомы, т.е. наличие единицы и обратных элементов, а таблица группового умножения имеет вид

$$t_\alpha t_\beta = t_{\alpha+\beta}; \quad t_\alpha s_\beta = s_{\alpha+\beta}; \quad s_\alpha s_\beta = t_{\alpha+\beta}. \tag{5}$$

Построенная группа является двусвязной однопараметрической группой Ли. Инфинитезимальные операторы в (4) представляют её алгебру Ли.

Рассмотрим пространство представления группы в виде двумерных векторов — дублетов действительных скалярных полей, а их скалярное произведение определим с помощью индефинитной метрики:

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{\varphi} * \vec{\psi} = \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2.$$

Тогда квадратичная форма $\vec{\varphi}*\vec{\varphi}$ оказывается инвариантной относительно преобразований $t_\alpha$ и меняет знак при преобразованиях $s_\alpha$:

$$t_\alpha\vec\varphi = \left(\hat 1 + \alpha\hat G\right)\vec\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1+\alpha\varphi_2\\ \varphi_2+\alpha\varphi_1\end{bmatrix};\ s_\alpha\vec\varphi = \left(\hat G + \alpha\hat 1\right)\vec\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_2+\alpha\varphi_1\\ \varphi_1+\alpha\varphi_2\end{bmatrix};\ \hat G \equiv \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}(t_\alpha\vec\varphi)*(t_\alpha\vec\varphi) &= (\varphi_1+\alpha\varphi_2)^2-(\varphi_2+\alpha\varphi_1)^2 = \varphi_1^2-\varphi_2^2 = \vec\varphi*\vec\varphi;\\ (s_\alpha\vec\varphi)*(s_\alpha\vec\varphi) &= (\varphi_2+\alpha\varphi_1)^2-(\varphi_1+\alpha\varphi_2)^2 = \varphi_2^2-\varphi_1^2 = -\vec\varphi*\vec\varphi.\end{aligned} \tag{6}$$

По аналогии с обычным случаем определим ковариантную производную как

$$D_\mu\vec\varphi = \partial_\mu\vec\varphi - eA_\mu\hat G\vec\varphi,$$

тогда при совместном преобразовании полевых переменных и градиентном преобразовании потенциалов ковариантные производные преобразуются так же, как поля:

$$\begin{aligned}t_\alpha:&\quad \vec\varphi\to\vec\varphi+\alpha\,\hat G\,\vec\varphi;\quad A_\mu\to A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha;\quad D_\mu\vec\varphi\to D_\mu\vec\varphi+\alpha\,\hat G\,\left(D_\mu\vec\varphi\right),\\ s_\alpha:&\quad \vec\varphi\to\hat G\vec\varphi+\alpha\,\vec\varphi;\quad A_\mu\to A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha;\quad D_\mu\vec\varphi\to\hat G\left(D_\mu\vec\varphi\right)+\alpha\,\left(D_\mu\vec\varphi\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}D_\mu\vec\varphi * D^\mu\vec\varphi - m^2\vec\varphi*\vec\varphi \tag{8}$$

инвариантен относительно преобразований $t_\alpha$ и меняет знак при преобразованиях $s_\alpha$. Поскольку уравнения движения получаются путём приравнивания к нулю первой вариации лагранжиана, смена знака у последнего не изменяет динамических уравнений. Необходимо помнить в этой связи, что правильное название вариационного принципа — принцип стационарного (а не наименьшего) действия, а на реальных траекториях действие принимает экстремальное (а не обязательно наименьшее) значение. Итак, инвариантность динамических уравнений относительно расширенной абелевой группы достигается в данном случае за счёт инвариантности лагранжиана с точностью до знака.

Однако построенная симметрия разрушается при добавлении к лагранжиану необходимого кинетического члена, описывающего свободное электромагнитное поле:

$$L = \frac{1}{2}D_\mu\vec\varphi * D^\mu\vec\varphi - m^2\vec\varphi*\vec\varphi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu};\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{9}$$

При градиентных преобразованиях потенциалов (7) тензор напряжённостей $F_{\mu\nu}$ очевидно не изменяется, следовательно, при преобразованиях $s_\alpha$ первые два члена лагранжиана (9) меняют знак, а последний член не изменяется. Весь лагранжиан (9) оказывается не инвариантным, хотя бы с точностью до знака!

Восстановить симметрию без введения новых сущностей невозможно. Помимо поля $\vec\varphi$, должно существовать другое поле $\vec\psi$, взаимодействующее со своим собственным калибровочным полем $a_\mu$, но с теми же значениями констант $e$ и $m$. Однако кинетический член поля $a_\mu$ противоположен по знаку:

$$\begin{aligned}L = &\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec\varphi - eA_\mu\hat G\vec\varphi\right)*\left(\partial^\mu\vec\varphi - eA^\mu\hat G\vec\varphi\right) - m^2\vec\varphi*\vec\varphi+\\ &\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\vec\psi - e\,a_\mu\,\hat G\vec\psi\right)*\left(\partial^\mu\vec\psi - e\,a^\mu\,\hat G\vec\psi\right) - m^2\vec\psi*\vec\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu};\end{aligned} \tag{10}$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu.$$

Для обеспечения инвариантности лагранжиана (10), хотя бы с точностью до знака, преобразования $s_\alpha$ должны сопровождаться перемешиванием полей $\vec\varphi$ и $\vec\psi$.

Такие преобразования обозначим заглавными буквами:

$$\hat{T}_\alpha:\ \vec{\varphi}\to\vec{\varphi}+\alpha\,\hat{G}\,\vec{\varphi};\ A_\mu\to A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha;\quad \vec{\psi}\to\vec{\psi}+\alpha\,\hat{G}\,\vec{\psi};\ a_\mu\to a_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha;$$
$$\hat{S}_\alpha:\ \vec{\varphi}\to\hat{G}\vec{\psi}+\alpha\,\vec{\psi};\ A_\mu\to a_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha;\quad \vec{\psi}\to\hat{G}\vec{\varphi}+\alpha\,\vec{\varphi};\ a_\mu\to A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha.$$

В матричной форме:

$$\begin{aligned}\hat{T}_\alpha:\ &\begin{bmatrix}\vec{\varphi}\\ \vec{\psi}\end{bmatrix}\to\left(\begin{bmatrix}\hat{1}&0\\0&\hat{1}\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}\hat{G}&0\\0&\hat{G}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vec{\varphi}\\ \vec{\psi}\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}A_\mu\\ a_\mu\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\mu\\ a_\mu\end{bmatrix}+\frac{1}{e}\left(\partial_\mu\alpha\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ \hat{S}_\alpha:\ &\begin{bmatrix}\vec{\varphi}\\ \vec{\psi}\end{bmatrix}\to\left(\begin{bmatrix}0&\hat{G}\\ \hat{G}&0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}0&\hat{1}\\ \hat{1}&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vec{\varphi}\\ \vec{\psi}\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}A_\mu\\ a_\mu\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_\mu\\ a_\mu\end{bmatrix}+\frac{1}{e}\left(\partial_\mu\alpha\right)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{11}$$

Можно убедиться, что таблица группового умножения имеет такой же вид, что и (5):

$$T_\alpha T_\beta=T_{\alpha+\beta},\quad T_\alpha S_\beta=S_{\alpha+\beta},\quad S_\alpha S_\beta=T_{\alpha+\beta},$$

т.е. это — представление той же самой группы, на этот раз четырёхмерное.

При преобразовании $T_\alpha$ каждый член лагранжиана (10) инвариантен. При преобразовании $S_\alpha$ члены с ковариантными производными и массовые члены переходят друг в друга и меняют знак; кинетические члены переходят друг в друга без смены знака ($F_{\mu\nu}\leftrightarrow f_{\mu\nu}$), однако их разность, входящая в (10), меняет знак, таким образом, меняет знак и лагранжиан в целом.

Можно построить более привычное представление. При замене, когда $e\to i\,q$; $\varphi_1\to\tilde{\varphi}_1$; $\varphi_2\to i\tilde{\varphi}_2$ (мнимый заряд!) а $*$ заменяется на простое умножение, тогда лагранжиан (8) переходит в

$$L=\left(\partial_\mu\Phi-iqA_\mu\Phi\right)\,\left(\partial^\mu\bar{\Phi}+iqA^\mu\bar{\Phi}\right)-m^2\Phi\bar{\Phi};\quad \Phi=\tilde{\varphi}_1+i\tilde{\varphi}_2;\quad \Phi=\tilde{\varphi}_1+i\tilde{\varphi}_2,\tag{12}$$

т.е. в обычный лагранжиан для комплексного скалярного поля $\Phi$. Тогда преобразования (6) приобретают вид (при одновременной замене $\alpha\to i\beta$):

$$\begin{aligned}t_\alpha:\Phi=\tilde{\varphi}_1+i\tilde{\varphi}_2\to\Phi+i\beta\Phi=e^{i\beta}\Phi;\ \bar{\Phi}=\tilde{\varphi}_1-i\tilde{\varphi}_2\to\bar{\Phi}-i\beta\bar{\Phi}=e^{-i\beta}\bar{\Phi},\\ s_\alpha:\Phi=\tilde{\varphi}_1+i\tilde{\varphi}_2\to\Phi+i\beta\Phi=e^{i\beta}\Phi;\ \bar{\Phi}=\tilde{\varphi}_1-i\tilde{\varphi}_2\to-\bar{\Phi}+i\beta\bar{\Phi}=-e^{-i\beta}\bar{\Phi}\end{aligned}\tag{13}$$

и в обоих случаях $A_\mu\to A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha=A_\mu+\frac{1}{iq}\partial_\mu\left(i\beta\right)=A_\mu+\frac{1}{q}\partial_\mu\beta$. Можно показать, что и в этом представлении ковариантные производные

$$D_\mu\Phi=\left(\partial_\mu\Phi-iqA_\mu\Phi\right);\quad D^\mu\bar{\Phi}=\left(\partial^\mu\bar{\Phi}+iqA^\mu\bar{\Phi}\right)$$

преобразуются по (13), т.е. так же, как поля $\Phi$, $\bar{\Phi}$, следовательно, лагранжиан (12) инвариантен при преобразованиях $t_\alpha$ и меняет знак при $s_\alpha$.

Преобразования (13) выглядят несколько необычно, учитывая, что $\bar{\Phi}$ — это комплексно сопряжённое $\Phi$. Как эти преобразования полей выглядят в терминах их действительных и мнимых частей $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$? Легко показать, что

$$t_\alpha:\ \begin{bmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{bmatrix};\quad s_\alpha:\ \begin{bmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}i\sin\alpha&i\cos\alpha\\ -i\cos\alpha&i\sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{bmatrix}.\tag{14}$$

Запишем инфинитезимальную форму (14), выделяя мнимую единицу, поскольку в стандартной форме калибровочные преобразования обычно записывают в виде [3, с. 98]

$$\varphi_A\to\varphi'_A=\varphi_A+i\alpha_j\left(T_j\right)_{AB}\varphi_B;\quad j=1,\ldots,K;\quad A,B=1,\ldots,R$$

где $K$ — размерность калибровочной группы (в данном случае 1), $R$ — размерность представления (в данном случае 2), $(T_j)_{AB}$ — генераторы группы. Получим:

$$\begin{gathered} t_\alpha: \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} \to \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + i\alpha\left(-i\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\right\}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}, \\ s_\alpha: \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} \to \left\{-i\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + i\alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{15}$$

Из (15) снова видно, что элементы $t_\alpha$ и $s_\alpha$ отличаются тем, что единица и генератор двумерного вращения $i\varepsilon_{AB}$ меняются местами. Таблица группового умножения также имеет вид (5). Проводя рассуждения, аналогичные выше приведённым, получаем, что аналог лагранжиана (10) имеет вид

$$\begin{aligned} L = {} & (\partial_\mu\Phi - i\,q\,A_\mu\,\Phi)\left(\partial^\mu\bar\Phi + i\,q\,A^\mu\,\bar\Phi\right) - m^2\Phi\,\bar\Phi + \\ & + (\partial_\mu\Psi - i\,q\,a_\mu\,\Psi)\left(\partial^\mu\bar\Psi + i\,q\,a^\mu\,\bar\Psi\right) - m^2\Psi\,\bar\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{16}$$

Лагранжиан (16) инвариантен относительно преобразований

$$T_\alpha: \Phi \to \Phi + i\alpha\Phi; \quad \bar\Phi \to \bar\Phi - i\alpha\bar\Phi; \quad \Psi \to \Psi + i\alpha\Psi; \quad \bar\Psi \to \bar\Psi - i\alpha\bar\Psi; \tag{17}$$

и меняет знак при преобразованиях

$$S_\alpha: \Phi \to \Psi + i\alpha\Psi; \quad \bar\Phi \to -\bar\Psi + i\alpha\bar\Psi; \quad \Psi \to \Phi + i\alpha\Phi; \quad \bar\Psi \to -\bar\Phi + i\alpha\bar\Phi; \tag{18}$$

а потенциалы преобразуются в точности как в (11), с заменой $e \to q$. Преобразования (17), (18) можно записать в матричной форме, аналогичной (11).

Лагранжиан (16) может быть представлен в стандартной форме, с явным выделением токов:

$$\begin{aligned} L = {} & \partial_\mu\Phi\partial^\mu\bar\Phi - m^2\Phi\bar\Phi - A_\mu J^\mu_{(\Phi)} + q^2 A_\mu A^\mu\Phi\bar\Phi + \\ & + \partial_\mu\Psi\partial^\mu\bar\Psi - m^2\Psi\bar\Psi - a_\mu J^\mu_{(\Psi)} + q^2 a_\mu a^\mu\Psi\bar\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}; \end{aligned}$$

$$J^\mu_{(\Phi)} = iq\left(\Phi\partial_\mu\bar\Phi - \bar\Phi\partial_\mu\Phi\right); \quad J^\mu_{(\Psi)} = iq\left(\Psi\partial_\mu\bar\Psi - \bar\Psi\partial_\mu\Psi\right).$$

Таким образом, отличие двух типов полей состоит в том, что для одного токовый и кинетический члены в лагранжиане имеют одинаковые знаки, а для другого — противоположные. Варьирование по полевым переменным и токам в первом случае приводит к обычным уравнениям Максвелла и силе Лоренца, а во втором — к уравнениям с мнимыми зарядами и отрицательной плотностью энергии электромагнитного поля.

Ясно, что существование мнимых зарядов и минус-полей приводит к существенным космологическим следствиям. Наличие полей с отрицательной плотностью энергии, имеющих космическую протяжённость, даёт основание выдвинуть гипотезу, что современное состояние Вселенной является радиационно-доминированным фотонами с отрицательной энергией и, как следствие — объяснить малое значение космологической постоянной как перенормированной энергии вакуума. Последнее является серьёзной проблемой стандартной космологической модели LCDM [4]. Если минус-фотоны дают существенный вклад в баланс энергии во Вселенной, то его следует записать так:

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda - \Omega_{\text{rad}} = 1; \quad \Omega_{\text{rad}} = \left|\frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_c}\right|, \tag{19}$$

где плотность энергии минус-фотонов и их давление отрицательны:

$$\rho_{\mathrm{rad},0} < 0; \quad p_{\mathrm{rad}} = \frac{\rho_{\mathrm{rad},0}}{3} < 0.$$

Тогда уравнение ковариантного сохранения для радиационной компоненты и уравнения Фридмана запишутся в виде [4]:

$$\dot{\rho}_{\mathrm{rad}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_{\mathrm{rad}} + p_{\mathrm{rad}}\right) = 0 \Rightarrow \rho_{\mathrm{rad}} = \frac{c}{a^4}, \quad (\dot{a})^2 = \frac{8\pi}{3} G\,\rho_{\mathrm{c}} \left(\frac{\Omega_M a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 - \Omega_{\mathrm{rad}}\frac{a_0^4}{a^2}\right).$$

Дифференцируя уравнение Фридмана по времени, получаем

$$\ddot{a} = a\frac{4\pi}{3} G\,\rho_{\mathrm{c}} \left(2\Omega_\Lambda - \Omega_M\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + 2\Omega_{\mathrm{rad}}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right). \tag{20}$$

Из (20) следует, что при выполнении условия $2\left(\Omega_\Lambda + \Omega_{\mathrm{rad}}\right) > \Omega_M$ современное состояние Вселенной характеризуется ускоренным расширением: $\ddot{a}_0 > 0$, как и в модели LCDM [4]. Отличие состоит в том, что, как видно из (19), вместо $\Omega_\Lambda$ имеем $\Omega_\Lambda - \Omega_{\mathrm{rad}}$, т.е. объясняется малое значение космологической постоянной как перенормированной энергии вакуума $\Omega_\Lambda$.

## Литература

1. *Terletsky J. P.* // Annales de la Fondation Louis de Broglie. — 1990. — Vol. 15, No 1.
2. *Третьяков Н. П., Терлецкий А. Я., Терлецкий С. А.* // Вестник РУДН, Серия Физика. — 1999. — № 12. — С. 143–149.
3. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. — Физматлит, 1993. — 334 с.
4. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 552 с.

UDC 530.1

## Extension of Abelian Gauge Symmetry

**N. P. Tretyakov*, A. Ya. Terletsky†**

* *Department of Applied Mathematics*
*Social State University of Russia*
*Wilhelm Pieck str. 4, Moscow, Russia*

† *Department of Experimental Physics*
*Peoples' Friendship University of Russia*
*Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, Russia 117198*

A generalization of the $U(1)$ gauge symmetry group by permutation of the generator and the unity is proposed. Thus a commutative extension of the symmetry group is obtained. The two-dimensional matrix representation of this group contains matrices with determinants both 1 and $-1$. The aim of the present work consists in establishing the necessity of existence of so-called imaginary charges and electromagnetic fields with negative energy density. Some cosmological issues of the existence of such fields are discussed.

**Key words and phrases:** gauge symmetry, abelian group, imaginary charges, negative energy density, accelerating cosmological expansion.