УДК 517.9

О приближенном решении дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от константы алгебраически

М. Д. Малых

Факультет наук о материалах
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Методы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) основаны на анализе особенностей, но самый популярный метод для численного решения, а именно метод конечных разностей, не работает вблизи особенностей. Однако Пенлеве дал алгебраический метод для решения в конечном виде дифференциальных уравнений, общие решения которых зависят от константы интегрирования алгебраически. Этот подход, который был представлен как своеобразная теория Галуа, напротив, может быть хорошо увязан с методом конечных разностей.

Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$, обладающее этом свойством, может быть преобразовано алгебраически заменой к уравнению Риккати. Схема Эйлера $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$ всегда задаёт $(1, k)$-соответствие между соседними слоями. В то же время точное решение уравнения Риккати задаёт $(1, 1)$-соответствие между любыми слоями и поэтому мы можем написать схему, задающую $(1, 1)$-соответствие между соседними слоями. В этом случае ангармоническое отношение четырёх точек не меняется от слоя до слоя не только для точного, но также и для приблизительного решения. Таким образом, если у точного решения имеется полюс, то приближенное решение проходит через бесконечность без накопления ошибки. В представленной статье это свойство (1,1)-схем будет проиллюстрировано двумя примерами: с и без решения в элементарных функциях. Таким образом, причина разрушения приближенного решения около полюса спрятана в саму схему Эйлера. В более общем случае, когда точное решение обыкновенного дифференциального уравнения зависит от постоянной интегрирования алгебраически, мы можем написать схему, которая задаёт (l, l)-корреспонденция между соседними слоями. Приближенное решение, найденное на этом пути, проходит через подвижные алгебраические особенности без накопления ошибки.

Ключевые слова: уравнение Риккати, метод конечных разностей, алгебраические соответствия, sage, sagemath.

1. Введение

Открытию трансцендентных уравнений Пенлеве предшествовали работы Пенлеве, в которых развивался алгебраический подход к интегрированию дифференциальных уравнений. Отправной точкой для Пенлеве стало следующее наблюдение: если обыкновенное дифференциальное уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ с рациональной по y правой частью допускает общее решение, зависящее алгебраически от константы интегрирования, то это уравнение сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати, см. [1, С. 46–47.]. В XX веке эти работы Пенлеве воспринимали лишь как способ обосновать неэлементарность трансцендентных уравнений Пенлеве, к тому же не вполне строгий. На самом же деле это — версия теории Галуа для нелинейных дифференциальных уравнений, своеобразие которой состоит

Статья поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

в том, что в ней изначально не фиксируется список допустимых трансцендентных операций [2, 3].

Для вычисления этих трансцендентных функций во времена Пенлеве использовали метод разложения в степенной ряд, однако алгебраические конструкции Пенлеве не связаны с анализом особенностей и поэтому прекрасно сочетаются с методом конечных разностей. На рубеже XIX–XX веков, когда разностные методы решения дифференциальных уравнений только начали теснить применение разложений в степенной ряд, методы Эйлера рассматривали исключительно как способ отыскания частных решений (см., например, [4, §89]), на самом же деле ничто не мешает рассматривать разностную схему вида $F(y_n, y_{n+1}, x_n) = 0$ как уравнение, задающее алгебраическое соответствие между n-м и $(n+1)$-м слоями.

Замечание 1. Мы рассматриваем y_n как координаты точки на проективный прямой, которые называем слоем. Уравнение, описывающее шаг разностной схемы, в таком случае задаёт алгебраическое соответствие между двумя слоями. Употребление термина «слой» в данном случае оправдано не только обычной практикой теории разностных схем для уравнений в 2-мерных областях. Кадзуо Окамото [5] рассматривал расслоения, на которых дифференциальные уравнения задают однозначные слоения. Для уравнения Риккати слоем такого расслоения будет как раз проективная прямая, именуемая там пространством начальных данных.

Если дифференциальное уравнение допускает общее решение, которое зависит алгебраически от константы интегрирования, то оно допускает рациональный интеграл $r(x, y) = \mathrm{const}$, коэффициенты которого являются какими-то, вообще говоря, трансцендентными функциями x. Если обозначить степень r относительно y как l, то уравнение $r(x_n, y_n) = r(x_m, y_m)$ позволяет найти l значений y_m по заданному y_n и l значений y_n по заданному y_m, то есть точное решение начальной задачи задаёт (l, l)-значное алгебраическое соответствие между слоями. Чем примечательны разностные схемы, сохраняющие этой свойство?

2. Схемы типа (1,1)

Уравнение Риккати $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ задаёт бирациональное соответствие между слоями. Схема Эйлера $y_{n+1} = y_n + (p_n y_n^2 + q_n y_n + r_n)\mathrm{d}x$ задаёт $(1, 2)$-соответствие между соседними слоями, и следовательно, не сохраняет это свойство. Однако минимальные поправки в схеме позволят сохранить тип зависимости от y_0:

$$y_{n+1} - y_n = (p_n + q_n y_n + r_n y_n y_{n+1})\Delta x. \tag{1}$$

задаёт $(1, 1)$-соответствие между соседними, а следовательно, и любыми слоями. С точки же зрения аппроксимации уравнения Риккати эта схема не лучше и не хуже схемы Эйлера [6].

Поскольку все известные свойства решения уравнения Риккати выведены из того, что его общее решение задаёт бирациональное отображение между начальными и конечными данными, все они переносятся и на решения указанной разностной схемы. Напр., ангармоническое отношение четырёх частных решений уравнения (1) не меняется от слоя к слою:

$$(y_n, y_n', y_n'', y_n''') = (y_m, y_m', y_m'', y_m'''), \tag{2}$$

коль скоро оно вообще сохраняется при дробно-линейных подстановках. Особо подчеркнём, что ангармоническое отношение четырёх частных приближенных решений сохраняется точно, в то время как в схеме Эйлера эта величина сохраняется приближённо, с точностью до неизвестных членов порядка Δx, причём коэффициенты при Δx зависят от y_n, и с ростом y_n ошибка становится все заметнее.

В частности, если точное решение имеет полюс, то приближенное решение, найденное по схеме (1), уходит на бесконечность и возвращается без заметного накопления ошибки. В самом деле, пусть частное решение уравнения Риккати, равное y_0 при x_0, имеет подвижный полюс при $x = a$. Любые три другие частные решения y', y'', y''' не имеют полюса при $x = a$, и любая схема 1-го порядка позволяет вычислить их значения до и после $x = a$ без заметного накопления ошибки. Тогда искомое точное решение можно вычислить с хорошей точностью из условия $(y, y', y'', y''') = (y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$; если при $x = x_n$ заменить здесь точные частные решения $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и $y'''(x)$ на их приближения, найденные по схеме (1), получится верное равенство. Значит, близость y', y'', y''' с их приближениями влечёт близость $y(x)$ и его приближения.

Для сравнения на рис. 1 изображены точное решение задачи

$$y' = 1 + y^2, \quad y|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan x \tag{3}$$

и два приближенных её решения, найденные по схеме Эйлера и по схеме (1).

Точное решение имеет подвижный полюс при $x = \frac{\pi}{2}$, вычисления по схеме Эйлера мы вынуждены остановить на подходе к этой точке, а вычисления по второй схеме можно благополучно продолжить и после особой точки.

На рис. 2 представлены приближенные решения задачи

$$y' = 1 + x^2 + xy + x^2y^2, \quad y|_{x=0} = 0, \tag{4}$$

найденные по схеме Рунге-Кутты и по схеме (1).

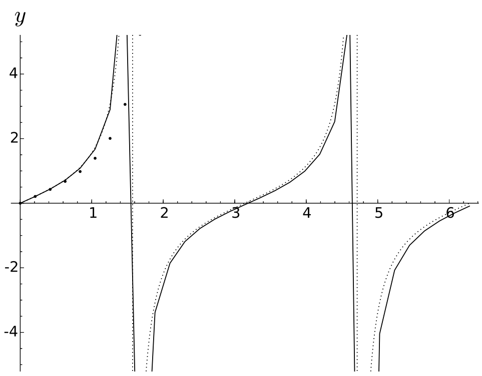

Рис. 1. Решения задачи (3)**: точное (пунктир), схема Эйлера (отдельные точки) и (1,1)-схема (сплошная)**

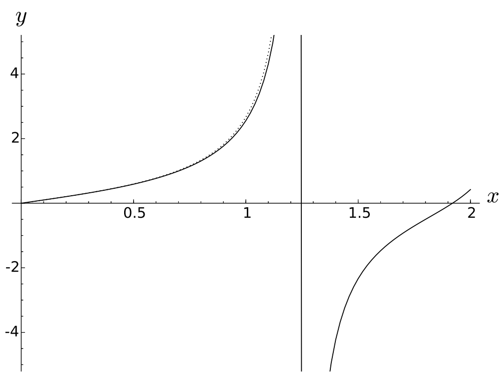

Рис. 2. Решения задачи (3)**: схема Рунге-Кутты (пунктир) и (1,1)-схема (сплошная)**

Как видно, решение имеет подвижный полюс где-то у $x = 1.2$, вычисления по явной схеме мы вынуждены остановить, а вычисления по второй схеме дают на удивление правдоподобный результат и после прохождения через особую точку.

Любопытно, что А.Н. Крылов в [4, С. 394] проиллюстрировал недостатки метода Эйлера вслед за Эйлером примером уравнения Риккати, отмечая «невыгодное обстоятельство», которое имеет место там, где $f(x, y)$ или уничтожается, или становится бесконечно большой. Однако в случае уравнения Риккати все эти обстоятельства происходят от того, что схема Эйлера не сохраняет ангармоническое отношение четырёх частных решений и без труда устраняются без каких-либо выделений особенностей.

3. Схемы типа (2,2)

Обратимся теперь к уравнениям, когда точное решение начальной задачи задаёт $(2,2)$-значное алгебраическое соответствие между слоями. Для примера общее решение уравнения Гамбургера $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ даётся формулой $x^2 + y^2 = C$; соотношение $x_n^2 + y_n^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2$ задаёт $(2,2)$-соответствие между слоями. Схема Эйлера задаёт $(1,2)$-соответствие между слоями, как видно на рис. 3, решение, найденное по этой схеме, разваливается возле особой точки и начинает случайным образом «прыгать» с одной интегральной кривой на другую.

Однако нетрудно составить схему, задающую $(2,2)$-соответствие между слоями: $y_{n+1}^2 = y_n^2 - 2x_n \Delta x$; решение найденное по этой схеме, см. рис. 4, легко проходит через алгебраическую особую точку.

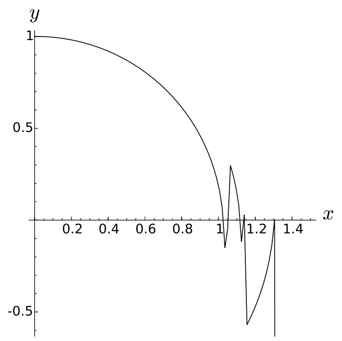

Рис. 3. Решение уравнения Гамбургера, найденное по методу Эйлера

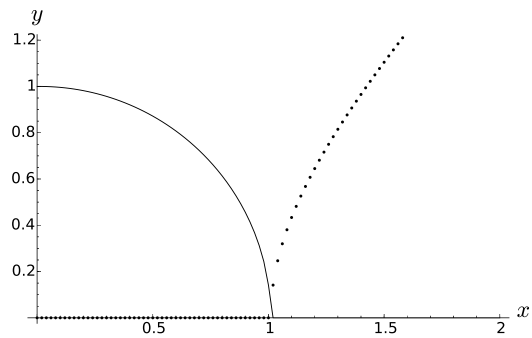

Рис. 4. Вещественная (сплошная) и мнимая части (точки) решения уравнения Гамбургера, найденного по (2,2)-схеме

4. Заключение

Все сказанное можно подытожить следующим образом: если общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка с рациональной правой частью зависит от константы алгебраически, то это уравнение не только алгебраической заменой сводится к такому, которое обладает свойством Пенлеве, но и можно составить такую разностную схему, аппроксимирующую это уравнение, которая задаёт (l,l)-значное алгебраическое соответствие между любыми двумя слоями; эта схема замечательна тем, что она легко перешагивает через подвижные особые точки.

Приведённые в статье рисунки и вычисление были выполнены при помощи `Sage Mathematics Software` [7].

Литература

1. *Painlevé P.* Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. — Paris, 1897. — Перепечатаны в первом томе Трудов Пенлеве, 1971.
2. *Umemura H.* Birational Automorphism Groups and Differential Equations // Nagoya Math. J. — 1990. — Vol. 119. — Pp. 1–80.
3. *Малых М. Д.* Об интегралах систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в конечном виде // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 3. — С. 11–16.
4. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. — Л.: АН СССР, 1933.
5. *Okamoto K.* Sur les feuilletages associés aux équation du second odre ápoints critiques fixes de P. Painlevé // Japan. J. Math. — 1979. — T. 5, n° 1. — Pp. 1–79.

6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
7. *Stein W. A. et al.*, 2015. — Sage Mathematics Software (Version 6.7). — The Sage Development Team. — `http://www.sagemath.org`.

UDC 517.9

On the Approximate Solving of the Differential Equations which General Solutions Depend on a Constant of Integration Algebraically

M. D. Malykh

Faculty of Materials Sciences
Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, Russia, 119991
Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

Methods of analytically theory of ordinary differential equations are based on the analysis of singularities, but the most popular method for the numerical solving, that is the method of finite differences does not work in neighborhood of singularities. However Painlevé gave an algebraic method for the solution of the differential equations in finite terms and general solutions of this equations depend algebraically on a constant of integration. This approach which was presented as Galois theory on the contrary can be well combined with method of finite differences.

It is well known, the ordinary differential equation of form $y' = f(x, y)$ with this property can be algebraically transformed by substitution to Riccati equation. Euler scheme $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x$ always determines $(1, k)$-correspondence between neighboring layers. But exact solution of Riccati equation determines $(1, 1)$-correspondence between any layers and thus we can write a scheme which determines $(1, 1)$-correspondence between neighboring layers. In this case anharmonic ratio of 4 points does not change from layer to layer not only for exact solution but also for approximate solution. Thus if an exact solution has a pole then the approximate solution passes through infinity without accumulation of an error. In the presented article this property of (1,1)-scheme will be illustrated by two examples: with and without solution in elementary functions. So the cause of destruction of the approximate solution near a pole is put in Euler scheme itself. In more general case when exact solution of ordinary differential equation depends algebraically on an integration constant we can write a scheme which determines (l, l)-correspondence between neighboring layers. Approximate solution which is found on this way passes through movable algebraic singularities without accumulation of an error.

Key words and phrases: Riccati equation, finite differences method, algebraic correspondence, sage, sagemath.

References

1. P. Painlevé, Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles, Paris, 1897, reprinted in the first volume of Penleve's work, 1971.
2. H. Umemura, Birational Automorphism Groups and Differential Equations, Nagoya Math. J. 119 (1990) 1–80.
3. M. D. Malykh, On Integrals of Ordinary Differential Equations Systems which are Representable in Finite Terms, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (3) (2014) 11–16, in Russian.
4. A. N. Krylov, Lectures on Numerical Calculations, AN USSR, Leningrad, 1933, in Russian.
5. K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équation du second odre á points critiques fixes de P. Painlevé, Japan. J. Math. 5 (1) (1979) 1–79.
6. N. N. Kalitkin, Numerical Methods, BHV-SPb, SPb., 2011, in Russian.
7. W. A. Stein, et al., Sage Mathematics Software (Version 6.7), The Sage Development Team (2015).
URL `http://www.sagemath.org`