УДК 531.31:62-56

Управление процессом безударной стыковки множества подвижных объектов в заданные упорядоченные моменты времени

И. А. Мухаметзянов, О. И. Чекмарёва

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Строится алгоритм управления множеством подвижных объектов, преследующих непредсказуемо движущееся в пространстве тело, с целью безударной стыковки с ним в заданные упорядоченные моменты времени. Преследующие тела движутся по принципу пропорциональной навигации. Для решения задачи используется уравнение относительного движения, в котором присутствуют случайные силы, как активные, так и инерции. Эти неизвестные возмущения считаем непрерывными и ограниченными.

Вводится управляющая сила, представляющая собой сумму непрерывной и кусочно-постоянной функций. Ступенчатая составляющая является величиной переменного знака, достаточно большой для того, чтобы нивелировать наличие возмущений. В результате процесс становится «квазиподобен» процессу безударной стыковки преследующих тел с целью в идеальных условиях.

Для автоматического выбора оптимального значения управления предлагается самонастраиваемый способ, осуществляемый по «принципу обратной связи по квазиускорениям» в дискретные моменты времени. Этот принцип был предложен И. А. Мухаметзяновым в статье, опубликованной в Вестнике РУДН серии «Математика. Информатика. Физика» № 3 за 2013 год. Система управления преследующего тела автоматически выбирает величину кусочно-постоянной управляющей силы, обеспечивающей безударность стыковки, в зависимости от параметров сближения объектов. Для этого используется информация о расстоянии между центрами масс преследуемого и преследующего объектов. Система управления рассчитывает вторую производную по времени этого расстояния. Стыковка преследующих тел с целью осуществляется поочередно через заданные промежутки времени.

Решение задачи получено как в случае преследующих тел постоянных, так и переменных масс, когда движение управляемых тел осуществляется реактивными силами. Во втором случае оценивается величина расходуемых в процессе управления масс. В отличие от предыдущих работ авторов такая оценка расхода топлива выполнена не только для непрерывного, но и для ступенчатого управления.

Ключевые слова: самонастраиваемое управление, безударный, стыковка, конечное время, механическая система.

1. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных тел с центрами масс $C_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Задача заключается в построении аналитических выражений главных векторов управляющих сил, обеспечивающих их преследующее движение за непредсказуемо движущимся объектом с целью встречи с ним без удара в заданные упорядоченные моменты времени $\tau_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Определение главных векторов управляющих сил

В работе [1] была построена сила $\bar{F}_\nu$, обеспечивающая преследующее движение одной точки C_ν за другой точкой O по принципу пропорциональной навигации [2] в виде

$$\bar{F}_\nu = m_\nu b(\bar{\omega}_\nu \times \bar{V}_\nu), \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 13-08-00535-а.

где $m_\nu, \bar{V}_\nu$ — масса и абсолютная скорость точки C_ν, $\bar{\omega}_\nu$ — абсолютная угловая скорость линии визирования $\bar{C_\nu O}$, b — положительный коэффициент пропорциональности.

При решении поставленной здесь задачи за точку O примем центр масс преследуемого точками C_ν объекта. В [1] предполагалась возможность измерения $\bar{\omega}_\nu$. Если такой возможности не имеется, то можно выражать этот вектор через абсолютные скорости $\bar{V}_o$ и $\bar{V}_\nu$ точек O и C_ν в виде

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{1}{|\bar{OC_\nu}|}[\bar{OC_\nu} \times (\bar{V}_\nu - \bar{V}_o)]. \tag{2}$$

При этом предполагается выполнение условий

$$(\bar{s}_\nu \cdot \dot{\bar{s}}_\nu) < 0, \quad |\bar{V}_\nu| > |\bar{V}_o|, \tag{3}$$

где $\bar{s}_\nu = \bar{OC_\nu}$.

Заметим, что $\bar{s}_\nu$ является законом относительного движения точки C_ν в подвижной системе координат с началом в точке O, одна ось которой направлена по вектору $\bar{C_\nu O}$.

3. Приведение преследующих точек в исходное положение

Теперь определим другие составляющие R_ν сил управления, обеспечивающие безударное приведение точек C_ν в точку O в заданные упорядоченные моменты времени τ_ν. Заметим, что для решения этой задачи прежде всего необходимо обеспечить выполнение условий (3). Это связано с тем, что в начальный момент времени $t_\nu = 0$ первое из условий (3) может оказаться невыполненным. В этом случае точку C_ν необходимо привести за конечное время в исходное положение, где это условие имеет место. Покажем, что в качестве множества исходных точек можно использовать любую точку прямой

$$\dot{s}_\nu + \mu_\nu s_\nu = 0 \tag{4}$$

в фазовой плоскости $(s_\nu, \dot{s}_\nu)$, где s_ν и $\dot{s}_\nu$ являются проекциями векторов $\bar{s}_\nu$ и $\dot{\bar{s}}_\nu$ на ось $\bar{C_\nu O}$, $\mu_\nu = \mathrm{const}$.

Заметим, что из (4) следует, что при выборе μ_ν в виде $\mu_\nu = -\dot{s}_\nu(0)/s_\nu(0)$ обеспечивается выполнение условия (3).

Для гарантированного обеспечения выполнения (4) при $t = 0$ потребуем, чтобы при $\dot{s}_\nu(0) + \mu_\nu s_\nu(0) \neq 0$ значение

$$\tilde{V}_\nu = \dot{s}_\nu(t) + \mu_\nu s_\nu(t) \tag{5}$$

обращалось в нуль за конечный промежуток времени.

Эту задачу можно решить следующим образом [3]. Используем основной закон динамики для описания относительного движения точки C_ν в проекции на ось $\bar{C_\nu O}$:

$$m_\nu \ddot{s}_\nu = R_\nu + R'_\nu, \tag{6}$$

где R_ν — проекция силы управления, R'_ν — проекция неуправляющих сил, в том числе переносной и кориолисовой сил инерции.

Выберем R_ν в виде

$$R_\nu = -R^0_\nu sign\tilde{V}_\nu, \tag{7}$$

где R^0_ν — положительная кусочно-постоянная ступенчатая функция, выбор которой осуществляется по принципу обратной связи по квазиускорению, изложенному в п. 2 работы [3], следующим образом. После замены в (6) $\ddot{s}_\nu$ через $\dot{\tilde{V}}_\nu$, определяемой в виде (5), уравнение (6) принимает вид

$$m_\nu \dot{\tilde{V}}_\nu = R_\nu + \tilde{R}'_\nu, \tag{8}$$

где $\tilde{R}'_\nu = R'_\nu + \mu_\nu \dot{s}_\nu$.

Уравнения (8) для всех точек C_ν, представим в векторной форме

$$M\dot{\tilde{V}} = R + \tilde{R}', \tag{9}$$

где M — диагональная матрица с элементами μ_ν, R и $\tilde{R}'$ — векторы с элементами $\tilde{R}_\nu,\ \tilde{R}'_\nu(\nu = 1, 2, \dots, n)$.

Вектор управляющих сил R ищем в виде

$$R = -(\operatorname{sign}\tilde{V})(R_0 + \Delta R), \tag{10}$$

где $sign\tilde{V}$ — диагональная матрица с элементами $sign\tilde{V}_\nu$.

Если при $t = 0$ имеет место $\tilde{V}^T\dot{\tilde{V}} \geq 0$, то для определения постоянной составляющей R_0 в (10), без использования информации об элементах матрицы M, сообщим системе (9) при $t = 0$ управление

$$R = -(\operatorname{sign}\dot{\tilde{V}})\lambda t, \tag{11}$$

где λ — n-мерный вектор с достаточно большими положительными элементами.

Момент времени обращения $\dot{\tilde{V}}$ в нуль обозначим через t_0. Заметим, что при $t = t_0$ имеет место

$$\tilde{R}' = [\operatorname{sign}\dot{\tilde{V}}(0)]\lambda t_0.$$

Теперь потребуем, чтобы при $t = t_0 + \Delta t,\ \Delta t > 0$ имело место

$$\tilde{V}^T\dot{\tilde{V}} = -\delta, \quad \delta = \mathrm{const} > 0. \tag{12}$$

Для этого при $t = t_0$ сообщим системе управление

$$R = -(\operatorname{sign}\tilde{V})(\lambda t_0 + \tilde{\Delta}), \tag{13}$$

где $\tilde{\Delta}$ — вектор с элементами $\Delta_\nu > 0$, при которых соблюдается неравенство в (12). Измерение или вычисление $\tilde{V}$ и $\dot{\tilde{V}}$ продолжим до тех пор, пока не наступит равенство

$$\tilde{V}^T\dot{\tilde{V}} = -\delta_0, \tag{14}$$

где $\delta = \gamma\delta,\ 1 > \gamma > 0$. Заметим, что в том случае, когда при $t = 0$ имеет место (14), принимается $t_0 = 0$. В момент времени $t_1 > t_0$ наступления равенства (14) к правой части (13) дополнительно добавим $\tilde{\Delta}$. Тогда (13) принимает вид

$$R = -(\operatorname{sign}\tilde{V})\left[\lambda t_0 + \tilde{\Delta}(i+1)\right], \tag{15}$$

где $i = 1$ есть первый момент наступления равенства (14). При продолжении измерения или вычисления $\tilde{V}$ и $\dot{\tilde{V}}$ возможен второй момент времени t_2 наступления равенства (14). В этом случае значение i в (15)удваивается. Таким образом, процедура определения очередных значений i продолжается до тех пор, пока не наступит время обращения $\tilde{V}$ в нуль. Следовательно, искомые векторы R_0 и ΔR

в (10) имеют следующий вид:

$$R_0 = (\lambda t_0 + \tilde{\Delta})\operatorname{sign}\left[(\tilde{V}^T(0)\dot{\tilde{V}}(0) + \delta_0) + |\tilde{V}^T(0)\dot{\tilde{V}}(0) + \delta_0|\right],$$
$$\Delta R = \tilde{\Delta} i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

С момента времени $\tilde{t}$ обращения в нуль значения $\tilde{V}$ процесс управления точками C_ν производится в «режиме торможения» для обеспечения безударной встречи точек C_ν с преследуемой точкой O по следующей схеме [2]. Начиная с момента $\tilde{t}$ организуем процесс скользящего движения точек C_ν по другим, отличным от (4), линиям разрыва

$$\dot{s}_\nu^2(\tau) - \dot{s}_\nu^2(\tilde{t})\left(1 - \frac{s_\nu(\tau)}{s_\nu(\tilde{t})}\right) = 0, \quad \tau = t - \tilde{t}, \tag{17}$$

вытекающим из теоремы об изменении кинетической энергии в конечной форме для точки C_ν, дифференциальное уравнение относительного движения которой имеет вид

$$m_\nu \ddot{s}_\nu = -m_\nu \frac{\dot{s}_\nu^2(\tilde{t})}{2|\, s_\nu(\tilde{t})|}. \tag{18}$$

Интегрируя это уравнение по t, получим

$$\dot{s}_\nu(\tau) - \dot{s}_\nu(\tilde{t}) + \frac{\dot{s}_\nu^2(\tilde{t})}{2s_\nu(\tilde{t})}\tau = 0, \quad \tau = t - \tilde{t}. \tag{19}$$

Учитывая, что $\mu_\nu = -\dot{s}_\nu(\tilde{t})/s_\nu(\tilde{t})$, в момент времени $\tau_{0\nu}$ одновременного обращения $\dot{s}_\nu$ и s_ν в нуль из (19), получим

$$\mu_\nu \tau_{0\nu} = 2. \tag{20}$$

Теперь, используя соотношение (20) между μ_ν и $\tau_{0\nu}$, можно упорядочить моменты времени прихода точек C_ν в положение O с заданным интервалом времени $\Delta\tau$ временного отставания друг относительно друга путём выбора коэффициентов $\mu_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ в виде

$$\mu_\nu = \frac{2}{\tau_{01} + (\nu - 1)\Delta\tau} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, до наступления времени $\tilde{t}$ управление осуществляется по закону (10). А с момента $\tilde{t}$ начинается управление в «режиме торможения», для чего с этого момента квазискорости $\tilde{V}$ в (10) необходимо заменить на $\tilde{V}'$ с элементами

$$\tilde{V}'_\nu = \dot{s}_\nu(\tau) - \dot{s}_\nu(\tilde{t}) + \frac{\dot{s}_\nu^2(\tilde{t})}{2s_\nu(\tilde{t})}\tau, \quad \tau = t - \tilde{t}. \tag{21}$$

Исходя из этого, представим управления R_ν, отражающие требования к управлению R до и после моментов $\tilde{t}$ в следующем виде:

$$R_\nu = -(\operatorname{sign}\dot{\tilde{V}}_{0\nu})\left[\lambda t_0 + \tilde{\Delta}_\nu(i+1)\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

где $\tilde{V}_{0\nu} = \tilde{V}_\nu \operatorname{sign}\tilde{V}_\nu^2 + \tilde{V}'_\nu \operatorname{sign}(1 - \operatorname{sign}\tilde{V}_\nu^2)$.

4. Управление объектами с переменными массами

Рассмотрим случай, когда движение центров масс преследующих объектов управляется реактивными силами. В этом случае уравнение относительного движения точки C_ν выражается в виде

$$m_\nu(t)\,\ddot{s}_\nu = R_\nu + R'_\nu, \tag{23}$$

где $R_\nu = -V_{r\nu}\dot{m}_\nu$ — реактивные силы управления, $V_{r\nu}$ — скорость истечения массы относительно точки C_ν, R'_ν — главный вектор неуправляющих сил, в том числе сил инерции.

Управляющую силу R_ν зададим в виде $R_\nu = -m_\nu(t)\dfrac{\dot{s}^2_\nu(t_0)}{2|\,s_\nu(t_0)|}$. В идеальном случае при $R'_\nu = 0$ уравнение (23) имеет вид $\ddot{s}_\nu = -\dfrac{\dot{s}^2_\nu(t_0)}{2|\,s_\nu(t_0)|}$, аналогичный (18). Следовательно, имеют место выражения (19), (20), (21).

Теперь, вводя квазискорости $\tilde{V}_\nu$ и $\tilde{V}'_\nu$ в виде (5) и (21), можно построить управление R_ν в виде (22).

5. Оценка расхода массы

Определим расходуемую массу, затрачиваемую на управление R_ν в процессе преследующего движения точки C_ν с момента исходного положения до момента стыковки с точкой O.

Из (10) видно, что R_ν складывается из постоянной составляющей $R_{0\nu}$ и кусочно-постоянной составляющей ΔR_ν. Расход массы на управление реактивной силой $R_\nu = \dot{m}_\nu V_{r\nu}$ можно определить путём её интегрирования по t при $V_{r\nu} = \mathrm{const}$ в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t} \dot{m}_\nu\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{|V_{r\nu}|}\int\limits_{t_0}^{t} R_\nu\,\mathrm{d}t, \quad R_\nu = R_{0\nu} + \Delta R_\nu. \tag{24}$$

Постоянная составляющая $R_{0\nu}$ остаётся неизменной от t_0 до момента времени $\tilde{t}_0 = \tilde{t} + 2/\mu_1 + (n-1)\Delta\tau$ завершения процесса приведения всех точек C_ν в положение O.

Следовательно, подставляя вместо R_ν значение $R_{0\nu} = \mathrm{const}$, после интегрирования от t_0 до $\tilde{t}_0$ получим долю расхода массы на управление $R_{0\nu}$ в виде

$$\Delta m_\nu = \frac{\lambda_\nu t_0 + \tilde{\Delta}_\nu}{|V_{r\nu}|}(\tilde{t}_0 - t_0).$$

Теперь определим долю расходуемой массы на кусочно-постоянную составляющую ΔR_ν управления. Для этого в правую часть (24) вместо R_ν подставим значение

$$\Delta R_\nu = -\frac{1}{|V_{r\nu}|}\sum_{i=1}^{2,\dots} \tilde{\Delta}_\nu i(t_i - t_{i-1}).$$

Теперь, суммируя все расходы, затрачиваемые на создание реактивной тяги $R_{0\nu}$ и ΔR_ν всех n объектов, получим общую величину расходуемой массы:

$$\Delta m = \frac{1}{|V_{r\nu}|}\sum_{\nu=1}^{n}\left[(\lambda_\nu t_0 + \tilde{\Delta}_\nu)(\tilde{t}_0 - t_0) + \sum_{i=1}^{2,\dots}\tilde{\Delta}_\nu i(t_i - t_{i-1})\right].$$

Литература

1. *Мухаметзянов И. А.* Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 3. — С. 105–112.
2. *Кан В. Л., Кельзон А. С.* Теория пропорциональной навигации. — Л.: Судостроение, 1965. — 423 с.
3. *Мухаметзянов И. А.* Принцип обратной связи по квазиускорению при безударной стабилизации за конечное время заданных многообразий механических и обобщённых систем // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 3. — С. 51–57.

UDC 531.31:62-56

Process Control of Unstressed Docking of Plurality of Moving Objects in an Ordered Time Points

I. A. Mukhametzyanov, O. I. Chekmaryova

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

An algorithm is constructed for controlling a plurality of moving objects, pursuing unpredictably moving body in space, with the aim of unstressed docking with it in an ordered time points. The pursuing objects move on the principle of proportional navigation. To solve the problem, we use the equation of the relative motion, in which there are random forces, both active and inertia. These unknown disturbances we consider continuous and bounded.

We introduce a control force, which is the sum of continuous and piecewise-constant functions. The piecewise-constant function is of a variable sign, large enough to offset the presence of perturbations. As a result, the process becomes a "quasi-similar" with the process of the unstressed docking of pursuing objects and the goal in ideal conditions.

The self-adjusting method is proposed to automatically select the optimal values of the control. It is carried out by the "principle of feedback on the quasi-acceleration" at discrete points in time. This principle was first proposed by I.A.Mukhametzyanov in an article published in the Bulletin of Peoples' Friendship University, Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" No 3 for 2013. The control system of the pursuing objects automatically selects the piecewise-constant control force for unstressed docking, depending on the parameters of their convergence. It uses information about the distance between the centers of mass of the persecuted and persecuting objects. The control system calculates the second time derivative of this distance. Docking of pursuing objects and the goal shall be held alternately at predetermined intervals of time.

Solution of the problem is obtained in the cases of pursuing objects of permanent and variable masses. In the second case, when the motion of controlled objects is carried out by reactive forces, the value of masses spent in the process of the control is estimated. In contrast to previous studies by the authors, such an assessment is made of fuel consumption not only for continuous, but also for the piecewise-constant control.

Key words and phrases: self-adjusting control, non-impact, docking, finite time, mechanical system.

References

1. I. A. Mukhametzyanov, Process Self-Adjusting Control of Non-Impact Bringing of the Condition of Mechanics Systems to Given Set, PFUR Bulletin. "Mathematics. Information Sciences. Physics" (3) (2013) 105–112, in Russian.
2. V. L. Kan, A. S. Keljzon, Theory of Proportional Navigation, Sudostroenie, Leningrad, 1965, in Russian.
3. I. A. Mukhametzyanov, The Principle of Feedback on the Quasi-Accelerations for Unstressed Stabilization in Finite Time of Given Manifolds of Mechanical and Generalized Systems, PFUR Bulletin. "Mathematics. Information Sciences. Physics" (3) (2014) 51–57, in Russian.