Математика

УДК 517.983, MSC 46 + 47

Об одном виде дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами

С. Н. Мишин

Кафедра геометрии и методики преподавания математики
ФГБОУ ВПО «Орловский государственный университет»
ул. Комсомольская, д. 95, г. Орёл, Россия, 302026

В работе описывается общий метод, позволяющий с помощью непрерывных векторнозначных функций находить решения дифференциально-операторных уравнений определённого вида с переменными коэффициентами. Рассматриваемые уравнения включают в себя, как частный случай, дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциально-разностные и интегральные уравнения, а также другие функционально-операторные уравнения. Решения представляются равномерно сходящимися функциональными векторнозначными рядами, порождёнными набором решений некоторого обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка и некоторым набором элементов локально выпуклого пространства. Найдены достаточные условия непрерывной зависимости решений от порождающего набора. Также найдено решение задачи Коши для рассматриваемых уравнений и указаны условия его единственности. Кроме того, получено так называемое общее решение рассматриваемых уравнений (функция самого общего вида, из которой можно получить любое частное решение). Исследование проводится с помощью характеристик (порядка и типа) оператора, а также операторных характеристик (операторного порядка и операторного типа) вектора относительно оператора. Также в исследовании применяется сходимость операторных рядов относительно равностепенно непрерывной борнологии.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип оператора, дифференциально-операторное уравнение, равностепенно непрерывная борнология, борнологическая сходимость, векторнозначная функция.

Введение

Пусть $\mathbf{H}$ — отделимое квазиполное локально выпуклое пространство с мультинормой $\mathbb{P} = \{\|\cdot\|_p\}$. Известно [1], что алгебра $\mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathbf{H}$, наделённый равностепенно непрерывной борнологией, является полной выпуклой борнологической алгеброй. Оператор $A \in \mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ называется принадлежащим классу $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b, a]$, если либо его p-порядки $\beta_p(A)$ меньше b, либо $\beta_p(A) = b$, но тогда p-типы $\alpha_p(A)$ меньше a [2–4].

Пусть $\mathcal{H}_G$ — пространство всех вектор-функций со значениями в $\mathbf{H}$, непрерывных на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}$, с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|u\|'_{p,r} = \max_{t \in G_r} ||u(t)||_p, \quad G_r \subset G, \quad \bigcup_r G_r = G, \quad u \in \mathcal{H}_G. \tag{1}$$

Если вектор-функция u принадлежит $\mathcal{H}_G$, то при каждом фиксированном $t \in G$, $u(t)$ — некоторый вектор из $\mathbf{H}$. Обозначим $v(t) = A(u(t))$. Получим вектор-функцию $v \in \mathcal{H}_G$. Таким образом определён оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H}_G \to \mathcal{H}_G$. В силу непрерывности оператора A, оператор $\mathcal{A}$ также непрерывен.

В работе описывается общий метод, позволяющий находить решения дифференциально-операторных уравнений вида $(\mathcal{D} - \mathcal{A})^\nu u = f, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathcal{H}_G$, где $\mathcal{D}$ — линейный дифференциальный оператор конечного порядка (вообще говоря с переменными коэффициентами), действующий в некотором пространстве вектор-функций, u — неизвестная вектор-функция.

Рассматриваемые уравнения включают в себя, как частный случай, дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциально-разностные и интегральные уравнения, а также другие функционально-операторные уравнения.

Результаты работы обобщают результаты, ранее полученные В.П. Громовым [5, 6] для случая $\mathcal{D} = \mathrm{d}^k/\mathrm{d}t^k$, $\nu = 1$, а также результаты автора [7] для случая $\nu = 1$ и постоянных коэффициентов.

1. Однородные уравнения

Пусть

$$D = \sum_{i=0}^{k} a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}, \quad a_i(t) \in \mathbb{H}, \quad a_k(t) \equiv 1 \tag{2}$$

— дифференциальный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{H}$ скалярных функций, непрерывных на множестве $G \subset \mathbb{R}$, с топологией равномерной сходимости на компактах $\|\varphi\|_r = \max\limits_{t \in G_r} |\varphi(t)|$, $G_r \subset G$, $\bigcup\limits_r G_r = G$, $\varphi \in \mathbb{H}$, выбираемом в зависимости от конкретной задачи. Обозначим $\mathcal{D}$ — оператор, определяемый формулой (2), но действующий в пространстве вектор-функций $\mathcal{H}_G$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})^{\nu} u = 0, \tag{3}$$

где $u = u(t)$ — неизвестная векторнозначная функция со значениями в $\mathbf{H}$.

Ставится задача указать функции u, являющиеся решениями уравнения (3). Обозначим $\widetilde{D}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ — операторы, правые обратные соответственно к операторам D и $\mathcal{D}$. Будем предполагать, что операторы $\widetilde{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{A}$ коммутируют.

Примечание 1. Очевидно, если вектор-функция $u(t)$ имеет вид $u(t) = \varphi(t)x$, где $\varphi(t)$ — некоторая скалярная функция, а x — фиксированный вектор из $\mathbf{H}$, то $\mathcal{A}(u)(t) = \varphi(t)A(x)$, $\mathcal{D}(u)(t) = D(\varphi)(t)x$.

Пусть оператор $A \in \mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ имеет характеристики (порядки и типы) $\beta_p(A)$, $\beta(A)$, $\alpha_p(A)$, $\alpha(A)$, а оператор $\widetilde{D} \in \mathrm{Lec}(\mathbb{H})$ имеет характеристики $\beta_r(\widetilde{D})$, $\beta(\widetilde{D})$, $\alpha_r(\widetilde{D})$, $\alpha(\widetilde{D})$.

Обозначим $\Lambda = \bigcap\limits_r \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}} \left(-\beta_r(\widetilde{D}), 1/\alpha_r(\widetilde{D})\right)$, т.е. $A \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда либо $\forall p, r,\ \beta_p(A) < -\beta_r(\widetilde{D})$, либо $\forall p, r,\ \beta_p(A) = -\beta_r(\widetilde{D}),\ \alpha_p(A) < 1/\alpha_r(\widetilde{D})$.

Пусть $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — линейно независимые решения обыкновенного дифференциального уравнения $D(\varphi) = 0$.

Теорема 1. *Если $A \in \Lambda$, то для каждого набора векторов $\{x_{ij}\} \subset \mathbf{H}$ ряд*

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t) A^n(x_{ij}) \tag{4}$$

сходится равномерно на каждом компакте $G_r \subset G$ и его сумма $u = u(t)$ — непрерывно зависящее от набора $\{x_{ij}\}$ решение уравнения (3).

Доказательство. По определению характеристик оператора [2]:

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \forall p,\ \exists K_p,\ \exists q,\ \forall x \in \mathbf{H},\ \forall n,\ \|A^n(x)\|_p \leqslant K_p(\alpha_p(A) + \varepsilon_1)^n n^{\beta_p(A)n} \|x\|_q,$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \forall r,\ \exists M_r,\ \exists \tilde{r},\ \forall \varphi \in \mathbb{H},\ \forall n,\ \|\widetilde{D}^n(\varphi)\|_r \leqslant M_r(\alpha_r(\widetilde{D}) + \varepsilon_2)^n n^{\beta_r(\widetilde{D})n} \|\varphi\|_{\tilde{r}}.$$

Тогда для общего члена ряда (4) в условиях теоремы справедлива оценка

$$\forall p,\ \forall r,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists C_{p,r},\ \exists q,\ \exists \tilde{r},\ \forall n,\ \forall x \in \mathbf{H},$$
$$\max_{t\in G_r} \left\| \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x) \right\|_p = \binom{n+j}{n} \|\widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)\|_r\ \|A^n(x)\|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_{p,r}(\alpha_r(\widetilde{D})\alpha_p(A)+\varepsilon)^n n^{(\beta_p(A)+\beta_r(\widetilde{D}))n} \|\varphi_i(t)\|_{\tilde{r}}\ \|x\|_q. \quad (5)$$

В условиях теоремы найдётся $\gamma < 1$, такое что $(\alpha_r(\widetilde{D})\alpha_p(A)+\varepsilon)^n n^{(\beta_p(A)+\beta_r(\widetilde{D}))n} \leqslant \gamma^n$, поэтому последовательность операторов $\left\{ \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n \right\}$ при каждом $t \in G$, при каждом i и при каждом j принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[0,1)$, следовательно [3], операторнозначный ряд $\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n$ сходится равномерно на каждом компакте по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ к функции $S(t)$ со значениями в $\mathrm{Lec}(\mathbf{H})$.

В силу того, что борнологическая сходимость сильнее поточечной, ряд (4) сходится при любом наборе векторов $\{x_{ij}\}$ к вектор-функции $u(t)$, непрерывно зависящей от выбора $\{x_{ij}\}$. Покажем, что эта функция является решением уравнения (3).

Обозначим $u_j(t) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_i)$, $j = 0, \ldots, \nu-1$ и покажем, что независимо от выбора векторов x_i $(\mathcal{D}-\mathcal{A})u_0(t) = 0$.

Действительно (в силу замкнутости оператора $\mathcal{D}$ им можно действовать на ряд почленно),

$$(\mathcal{D}-\mathcal{A})u_0(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} D\widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)A^n(x_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} D(\varphi_i)(t)x_i - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) = 0.$$

Теперь покажем, что независимо от выбора векторов x_i $(\mathcal{D}-\mathcal{A})u_j(t) = u_{j-1}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu-1$.

Имеем

$$(\mathcal{D}-\mathcal{A})u_j(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+j}{n} D\widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_i) - \binom{n+j}{n} D^{n+j}(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{D}^{j-1}(\varphi_i)(t)x_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+j+1}{n+1} - \binom{n+j}{n} \right) \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{D}^{j-1}(\varphi_i)(t)x_i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n+1} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^{n+1}(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{n}\widetilde{D}^{n+j-1}(\varphi_i)(t)A^n(x_i) = u_{j-1}(t).$$

Таким образом, функции $u_j(t),\ j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$ независимо от выбора векторов x_i являются решениями уравнения (3), следовательно, функция

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j}{n}\widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_{ij})$$

также является решением этого уравнения.

Примечание 2. Если G — область комплексной плоскости, а функции $\varphi_i(t)$ аналитические в G, то функция $u(t)$ будет также аналитической в G.

Примечание 3. Пусть $\beta_p(x, A)$, $\beta(x, A)$, $\alpha_p(x, A)$, $\alpha(x, A)$ — операторные характеристики вектора $x \in \mathbf{H}$ относительно оператора A [2]. Вектор x называется принадлежащим классу $\mathfrak{H}_{\mathbb{P}}^{A}[b, a)$, если либо его операторные p-порядки $\beta_p(x, A)$ меньше b, либо $\beta_p(x, A) = b$, но тогда операторные p-типы $\alpha_p(x, A)$ меньше a [2].

Обозначим

$$\Xi = \bigcap_{r}\mathfrak{H}_{\mathbb{P}}^{A}\left[-\beta_r(\widetilde{D}), \frac{1}{\alpha_r(\widetilde{D})}\right),$$

т.е. $x \in \Xi$ тогда и только тогда, когда либо $\forall p, r,\ \beta_p(x, A) < -\beta_r(\widetilde{D})$, либо $\forall p, r,\ \beta_p(x, A) = -\beta_r(\widetilde{D})$, $\alpha_p(x, A) < 1/\alpha_r(\widetilde{D})$.

Если $A \notin \Lambda$, то ряд (4) в общем случае не сходится. Тем не менее можно показать, что если $\forall ij,\ x_{ij} \in \Xi$, то ряд (4) сходится равномерно на каждом компакте. Однако в этом случае его сумма $u(t)$ не обязана непрерывно зависеть от x_{ij}.

2. Неоднородные уравнения

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})^{\nu}u(t) = f(t), \quad f(t) \in \mathcal{H}_G. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}^{\widetilde{\mathbb{P}}}[0, 1)$, то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\nu-1}{n}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n(f)(t) \tag{7}$$

сходится равномерно на компактах множества G для всех $f \in \mathcal{H}_G$ и его сумма $g = g(t)$ — решение уравнения (6), непрерывно зависящее от f. Здесь $\widetilde{\mathbb{P}}$ — мультинорма на $\mathcal{H}_G$.

Доказательство. В условиях теоремы последовательность операторов $\left\{\binom{n+\nu-1}{n}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n\right\}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}^{\widetilde{\mathbb{P}}}[0, 1)$, следовательно [3], ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+\nu-1}{n}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n$ сходится по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathcal{H}_G)$ к оператору S, а так как борнологическая сходимость сильнее поточечной, то ряд (7) сходится по топологии пространства $\mathcal{H}_G$ при любой правой части $f(t)$ уравнения (6) к вектор-функции $g(t)$, непрерывно зависящей от выбора $f(t)$.

Покажем, что функция $g(t)$ является решением уравнения (6).

Обозначим $g_\nu(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{n} \widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n(f)(t)$, $\nu \in \mathbb{N}$ и покажем, что $(\mathcal{D} - \mathcal{A})g_1(t) = f(t)$.

Действительно,

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})g_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+1}\mathcal{A}^n(f)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{D}}^{n+1}\mathcal{A}^{n+1}(f)(t) =$$
$$= f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{D}}^{n}\mathcal{A}^n(f)(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{D}}^{n}\mathcal{A}^n(f)(t) = f(t).$$

Теперь покажем, что $(\mathcal{D} - \mathcal{A})g_\nu(t) = g_{\nu-1}(t)$, $\nu > 1$.

Имеем

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})g_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+\nu-1}{n} \mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n(f)(t) - \binom{n+\nu-1}{n} \widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^{n+1}(f)(t) \right) =$$
$$= \widetilde{\mathcal{D}}^{\nu-1}f(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+\nu}{n+1} - \binom{n+\nu-1}{n} \right) \widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^{n+1}(f)(t) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu-2}{n} \widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu-1}\mathcal{A}^n(f)(t) = g_{\nu-1}(t).$$

Следствие. *Если $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A} \in \mathfrak{L}^{\widetilde{\mathbb{P}}}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$, то всякая вектор-функция вида*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\nu-1}{n} \widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n(f)(t) + \sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} \widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_{ij}), \quad (8)$$

где x_{ij} — произвольный набор векторов из пространства $\mathbf{H}$, а $\{\varphi_i = \varphi_i(t)\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — линейно независимая система решений обыкновенного дифференциального уравнения $D(\varphi) = 0$, является решением уравнения (6), непрерывно зависящим от набора x_{ij} и правой части f.

3. Задача Коши

Пусть оператор $\widetilde{D}$ и функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{i-1}\widetilde{D}(\varphi)}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right|_{t=t_0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad t_0 \in G. \quad (9)$$

$$\varphi_i^{(l-1)}(t_0) = \delta_{il}, \quad i, l = 1, 2, \ldots, k, \quad t_0 \in G. \quad (10)$$

Рассмотрим уравнения (3) и (6) с начальными условиями

$$(\mathcal{D} - \mathcal{A})^j u^{(i-1)}(t)\Big|_{t=t_0} = x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \quad (11)$$

Теорема 3. *Пусть $A \in \Lambda$. Тогда ряд (4) при любом выборе начальных данных x_{ij} сходится к функции $u(t)$, являющейся решением задачи (3), (11) и непрерывно зависящей от начальных данных.*

Доказательство. Сходимость ряда (4) к решению уравнения (3), непрерывно зависящему от x_{ij}, следует из теоремы 1. Покажем, что функция

$$u(t)=\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j}{n}\widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_{ij})$$

удовлетворяет начальным условиям (11).

Действительно,

$$(\mathcal{D}-\mathcal{A})^s u(t)=\sum_{j=s}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-s}{n}\widetilde{D}^{n+j-s}(\varphi_i)(t)A^n(x_{ij}),$$

следовательно,

$$(\mathcal{D}-\mathcal{A})^s u^{(l-1)}(t)\Big|_{t=t_0}=\sum_{j=s}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-s}{n}\left.\frac{\mathrm{d}^{l-1}\widetilde{D}^{n+j-s}(\varphi_i)(t)}{\mathrm{d}t^{l-1}}\right|_{t=t_0}A^n(x_{ij}). \tag{12}$$

В ряде (12) в силу (9) и (10) отличен от нуля только член для которого $n=0$, $j=s$, $i=l$, т.е., $\left(\mathcal{D}-\mathcal{A}\right)^s u^{(l-1)}\big|_{t=t_0}=x_{ls}$. □

Примечание 4. Можно показать, что если $A\notin\Lambda$, то ряд (4) тем не менее сходится к функции $u(t)$, являющейся решением задачи (3), (11), если $\forall ij,\ x_{ij}\in\Xi$. Однако в этом случае функция $u(t)$ не обязана непрерывно зависеть от x_{ij}.

Теорема 4. *Пусть $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\in\mathfrak{L}^{\widetilde{\mathbb{P}}}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$. Тогда при любом выборе начальных данных x_{ij} и любой непрерывной на множестве G правой части f, функция (8) является решением задачи (6), (11), непрерывно зависящим от правой части и начальных данных.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Примечание 5. Пусть вместо (11) заданы стандартные начальные условия

$$u^{(i-1)}(t_0)=y_i,\quad i=1,2,\ldots,k\nu. \tag{13}$$

Можно показать, что если $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\in\mathfrak{L}^{\widetilde{\mathbb{P}}}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$, то функция (4) является решением задачи Коши (3), (13), а функция (8) является решением задачи Коши (6), (13), каковы бы ни были начальные данные y_i. Это решение является непрерывно зависящим от функции f и векторов y_i. При этом векторы x_{ij} выражаются начальные данные y_i по следующей рекуррентной формуле ($i=1,2,\ldots,k,\quad j=1,2,\ldots,\nu-1$)

$$x_{i0}=y_i,\quad x_{ij}=\sum_{l_1,\ldots,l_j=0}^{k}y_{l_1+\ldots+l_j+i}\prod_{m=1}^{j}a_{l_m}-\sum_{l=0}^{j-1}\binom{j-l}{j}A^{j-l}(x_{il}). \tag{14}$$

Оператор $A\in\mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ называется принадлежащим классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}\left[b,a\right)$, если либо его порядок $\beta(A)$ меньше b, либо $\beta(A)=b$, но тогда тип $\alpha(A)$ меньше a. Оператор $A\in\mathrm{Lec}(\mathbf{H})$ называется принадлежащим классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}\left[b,a\right]$, если либо его порядок $\beta(A)$ меньше b, либо $\beta(A)=b$, но тогда тип $\alpha(A)$ не превосходит a [2, 3].

Теорема 5. *Если $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\in\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}\left[0,\frac{1}{2^\nu-1}\right)$, то задача Коши (6), (13) имеет единственное решение.*

Доказательство. Достаточно показать, что однородное уравнение с нулевыми начальными условиями имеет только нулевое решение. Действительно, пусть функция $u(t)$ является решением уравнения (3) на множестве G и пусть $u^{(i-1)}(t_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k\nu$. Тогда функция $u(t)$ непрерывна на этом множестве и $\forall n$, $u = (\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\mathcal{B})^n(u)$, где $\mathcal{B} = \sum\limits_{s=0}^{\nu-1}(-1)^s\binom{\nu}{s+1}(\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A})^s$. Так как $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}[0, \frac{1}{2^\nu-1})$, то в силу коммутирования операторов $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, оператор $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\mathcal{B}$ будет принадлежать классу $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$ [2,8].

Таким образом, справедлива оценка $\max\limits_{t\in G_r}\|u(t)\|_p = \max\limits_{t\in G_r}\|(\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}\mathcal{B})^n(u(t))\|_p \leqslant \varepsilon$, $\forall p,\ \forall r,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n > n_0(\varepsilon)$ в силу произвольности p, r и ε, $u(t) = 0,\ \forall t \in G$. □

Теорема 6. *Пусть* $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}\left[0, \frac{1}{2^\nu-1}\right)$. *Тогда функция (8), где* $\{x_{ij}\}$ *— произвольный набор векторов из* $\mathbf{H}$, *а* $\varphi_i(t)$ *— решения обыкновенного дифференциального уравнения* $D(\varphi) = 0$ *с условиями (10), является общим решением уравнения (6).*

Доказательство. По следствию из теоремы 2 функция (8) является решением уравнения (6) при любом наборе $\{x_{ij}\}$. Покажем, что любое решение уравнения (6) представляется в виде (8).

Действительно, пусть $v(t)$ — некоторое решение.

Положим $x_{ij} = (\mathcal{D}-\mathcal{A})^j v^{(i-1)}(t)\big|_{t=t_0}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 0, 1, \ldots, \nu-1$.

Функция

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\nu-1}{n}\widetilde{\mathcal{D}}^{n+\nu}\mathcal{A}^n(f)(t) + \sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j}{n}\widetilde{D}^{n+j}(\varphi_i)(t)A^n(x_{ij})$$

является решением уравнения (6) и удовлетворяет тем же начальным условиям, что и функция $v(t)$. В силу единственности, $v(t) \equiv u(t)$. □

4. Частные случаи

1. Оператор $\mathcal{D}$ имеет постоянные коэффициенты.

Пусть $\mathcal{D} = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}$, $\quad a_k = 1$. В этом случае оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$ легко находится:

$$\widetilde{\mathcal{D}}(f) = \int_{t_0}^{t}\varphi(t-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{15}$$

где $\varphi(t)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения $D(\varphi) = 0$ с начальными условиями

$$\varphi^{(k-1)}(0) = 1,\ \varphi^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k-2. \tag{16}$$

В качестве $\mathbb{H}$ выберем пространство $\mathbf{H}_R$ всех функций, аналитических в круге $|t| < R$ $(0 < R \leqslant +\infty)$, с топологией равномерной сходимости на компактах $\|\varphi(t)\|_r = \max\limits_{|t|\leqslant r}|\varphi(t)|$, $r < R$.

Нетрудно показать, что r-порядки оператора $\widetilde{D} : \mathbf{H}_R \to \mathbf{H}_R$ равны $\beta_r(\widetilde{D}) = -k$, $\forall r$, а для r-типов справедлива оценка

$$(k-1)!\left(\frac{e(r+|t_0|)}{k}\right)^k \leqslant \alpha_r(\widetilde{D}) \leqslant (k-1)!\left(\frac{e(r+|t_0|)}{k}\right)^k \max_{|t|\leqslant r}|\psi(t)|, \quad \forall r,$$

где

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}}, & t\neq 0\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

Пусть $\{\varphi_i(t)\}$, $i=1,2,\ldots,k$ — система решений обыкновенного дифференциального уравнения $D(\varphi)=0$ с начальными условиями $\varphi_i^{(l-1)}(t_0)=\delta_{il}$ и пусть

$$\omega=\left((k-1)!\left(\frac{e(R+|t_0|)}{k}\right)^k \max_{|t|\leqslant R}|\psi(t)|\right)^{-1}.$$

Теорема 7. *Если $A\in\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[k,\omega]$, то для каждого набора векторов $\{x_{ij}\}\subset\mathbf{H}$ ряд (4) сходится равномерно на каждом компакте круга $|t|<R$ и его сумма $u=u(t)$ — аналитическое в этом круге (целое в случае $R=+\infty$), непрерывно зависящее от набора $\{x_{ij}\}$ решение уравнения (3).*

Справедливость теоремы непосредственно следует из теоремы 1.

Для оператора (15) условие (9) автоматически выполняется, поэтому, если $A\in\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[k,\omega]$, то функция (4) является решением задачи (3), (11), а функция (8) является решением задачи (6), (11).

2. $\nu=1$.

В этом случае функция (4) имеет вид

$$u(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)A^n(x_i). \tag{17}$$

Обозначим $\widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)=b_{nk+i-1}(t)$. Тогда решение уравнения (3) запишется в виде

$$u(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}b_{nk+i-1}(t)A^n(x_i). \tag{18}$$

При этом функция $\psi(t,\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(t)\lambda^n$ будет являться решением уравнения $D(\psi)=\lambda^l\psi$ с начальными условиями $\psi^{(l)}(0,\lambda)=\lambda^l$, $l=0,1,\ldots,k-1$.

Если $f(t)\equiv y$, а $\varphi_1(t)\equiv 1$, то решение уравнения (6) примет вид

$$u(t)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}b_{nk+i-1}(t)A^n(x_i)+\sum_{n=0}^{\infty}b_{nk+k}(t)A^n(y). \tag{19}$$

Решения (18) и (19) были ранее получены иным способом [2].

3. $\nu=1$, **оператор** A **обладает собственными векторами, образующими базис в H.**

Обозначим $\widetilde{D}^n(\varphi_i)(t)=d_{in}(t)$. Очевидно, $\gamma_i(t,\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_{in}(t)\lambda^n$, $i=1,2,\ldots,k$ — собственные вектор-функции оператора D [2]: $D(\gamma_i(t,\lambda))=\lambda\gamma_i(t,\lambda)$, $\forall\lambda$.

Пусть оператор A имеет собственные векторы ψ_n и соответствующие им собственные числа $\lambda_n: A(\psi_n)=\lambda_n\psi_n$, $\forall n$. Если векторы x_i представляются рядами

$x_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega_{in}\psi_n$, то решение уравнения (3) запишется в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{in}\psi_n\gamma_i(\lambda_n, t). \tag{20}$$

Решение (20) для отдельных операторов D и A было также получено ранее иным способом [2].

Заключение

Полученные результаты позволяют решать некоторые дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциально-разностные и интегральные уравнения, а также другие функционально-операторные уравнения. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найдём решение дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^4\psi(t,x)}{\partial t^4} + \frac{2}{t}\frac{\partial^3\psi(t,x)}{\partial t^3} + \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^3\psi(t,x)}{\partial t^2\partial x} - \frac{2}{t}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} = q(t,x), \tag{21}$$

где $\psi(x,t)$, $q(x,t)$ — целые по x и непрерывные по t на промежутке $(0,+\infty)$ функции.

Выберем в качестве $\mathbf{H}$ пространство $\mathbf{H}(\mathbb{C})$ всех целых функций, а в качестве $\mathbb{H}$ — пространство $\mathbf{C}(0,+\infty)$ всех функций, непрерывных на промежутке $(0,+\infty)$ с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|F(x)\|_p = \max_{|x|\leqslant p}|F(x)|, \quad p = 1,2,\ldots, \quad F \in \mathbf{H}(\mathbb{C}),$$

$$\|\varphi(t)\|_r = \max_{\frac{1}{r}\leqslant t\leqslant r}|\varphi(t)|, \quad r = 1,2,\ldots, \quad \varphi \in \mathbf{C}(0,+\infty).$$

Тогда $\mathcal{H}_G$ — пространство всех вектор-функций со значениями в $\mathbf{H}(\mathbb{C})$, непрерывных на промежутке $(0,+\infty)$.

Для данного случая

$$D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \quad \mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \quad A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad \mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nu = 2,$$

$$\varphi_1(t) = t, \quad \varphi_2(t) = \ln t, \quad \widetilde{D}(\varphi) = \int\limits_1^t \xi\ln\frac{t}{\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \widetilde{\mathcal{D}}(\psi) = \int\limits_1^t \xi\ln\frac{t}{\xi}\psi(\xi,x)\mathrm{d}\xi.$$

(полагаем $t_0 = 1$). Порядки операторов $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ несложно находятся по определению: $\beta(\mathcal{A}) = 1$, $\beta(\widetilde{\mathcal{D}}) = -2$, поэтому в силу коммутирования операторов $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}$ [2, 8] оператор $\widetilde{\mathcal{D}}\mathcal{A}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$, а следовательно и классу $\mathfrak{L}^{\widetilde{\mathbb{P}}}_{\mathcal{H}_G}[0,1)$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и её следствия, поэтому решением уравнения (21) является любая функция вида

$$\psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_1^{(n)}(x)\widetilde{D}^n\,(t) + \sum_{n=0}^{\infty} F_2^{(n)}(x)\widetilde{D}^n\,(\ln t) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_3^{(n)}(x)\widetilde{D}^{n+1}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_4^{(n)}(x)\widetilde{D}^{n+1}(\ln t)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\widetilde{\mathcal{D}}^{n+2}\left(\frac{\partial^n q(x,t)}{\partial x^n}\right), \quad (22)$$

где $F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$ — произвольные целые функции.

Пример 2. Найдём решение уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t^2}+\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}+\psi(t,x)=\frac{\partial\psi(t,x+a)}{\partial x}, \quad (23)$$

где $\psi(t,x)$ — целая функция экспоненциально типа по x и непрерывная на всей вещественной оси по t.

Выберем в качестве $\mathbf{H}$ пространство $[1,\infty)$ всех целых функций экспоненциального типа с топологией индуктивного предела: $[1,\infty)=\lim\operatorname{ind}\,[1,\sigma]$, а в качестве $\mathbb{H}$ — пространство $\mathbf{C}(\mathbb{R})$ всех функций, непрерывных на вещественной оси с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|\varphi(t)\|_r=\max_{|t|\leqslant r}|\varphi(t)|, \quad r=1,2,\ldots, \quad \varphi\in\mathbf{C}(\mathbb{R}).$$

Тогда $\mathcal{H}_G$ — пространство всех вектор-функций со значениями в $[1,\infty)$, непрерывных на вещественной оси.

Для данного случая

$$A(F)(x)=F'(x+a), \quad \mathcal{A}(\psi)(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x+a),$$

$$D=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+E, \quad \mathcal{D}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}+E, \quad \nu=1,$$

$$\varphi_1(t)=e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad \varphi_2(t)=e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\widetilde{D}(\varphi)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^t e^{\frac{\xi-t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \widetilde{\mathcal{D}}(\psi)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^t e^{\frac{\xi-t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\xi)\psi(\xi,x)\mathrm{d}\xi.$$

Оператор $\mathcal{A}$ имеет в пространстве $[1,\infty)$ нулевой порядок [2, теорема 6.16]: $\beta(\mathcal{A})=0$. Порядок оператора $\widetilde{\mathcal{D}}$ равен $\beta(\widetilde{\mathcal{D}})=-2$ [9, следствие 1].

Таким образом выполнены все условия теоремы 1, поэтому решением уравнения (23) является любая функция вида

$$\psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\widetilde{D}^n\left(e^{-t/2}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)F_1^{(n)}(x+na)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{D}^n\left(e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)F_2^{(n)}(x+na)\right), \quad (24)$$

где $F_1,\ F_2$ — произвольные целые функции экспоненциального типа.

Пример 3. Найдём решение уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial t^2}+\psi(t,x)=\frac{\partial\psi(t,\lambda x)}{\partial x}+xt, \quad |\lambda|<1, \quad (25)$$

где $\psi(x,t)$ — целая по x и непрерывная по t на промежутке $(0,+\infty)$ функция.

Выберем в качестве $\mathbf{H}$ пространство $\mathbf{H}(\mathbb{C})$ всех целых функций, а в качестве $\mathbb{H}$ — пространство $\mathbf{C}(0,+\infty)$ всех функций, непрерывных на промежутке $(0,+\infty)$ с топологией равномерной сходимости на компактах (пример 1). Тогда $\mathcal{H}_G$ — пространство всех вектор-функций со значениями в $\mathbf{H}(\mathbb{C})$, непрерывных на промежутке $(0,+\infty)$.

Для данного случая:

$$A(F)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\lambda x), \quad \mathcal{A}(\psi)(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(t,\lambda x),$$

$$D = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + E, \quad \mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + E, \quad \nu = 1, \quad \varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t,$$

$$\widetilde{D}(\varphi) = \int\limits_0^t \sin(t-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \widetilde{\mathcal{D}}(\psi) = \int\limits_0^t \sin(t-\xi)\psi(\xi,x)\mathrm{d}\xi.$$

Порядок оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\mathbf{H}(\mathbb{C})$ легко находится по определению. Он равен $\beta(\mathcal{A}) = -\infty$. Порядок оператора $\widetilde{\mathcal{D}}$ равен $\beta(\widetilde{\mathcal{D}}) = -2$ [9, следствие 1].

Таким образом выполнены все условия теоремы 2 и её следствия, поэтому решением уравнения (25) является любая функция вида

$$\psi(t,x) = x(t-\sin t) + \lambda t\left(1 + \frac{\cos t}{2}\right) - \frac{3\lambda}{2}\sin t + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n^2+n)/2}\left(\widetilde{D}^n(\cos t)F_1^{(n)}(\lambda^n x) + \widetilde{D}^n(\sin t)F_2^{(n)}(\lambda^n x)\right), \quad (26)$$

где $F_1,\ F_2$ — произвольные целые функции.

Примечание 6. Можно показать, что ряд (26) сходится не только для целых функций F_1 и F_2, но и для любых бесконечно дифференцируемых на вещественной оси, у которых производные растут не быстрее факториала в любой степени.

Литература

1. *Радыно Я. В.* Линейные уравнения и борнология. — Минск: БГУ, 1982.
2. *Громов В. П., Мишин С. Н., Панюшкин С. В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения. — Орел: ОГУ, 2009.
3. *Мишин С. Н.* Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 4. — С. 26–34.
4. *Мишин С. Н.* О характеристиках роста операторнозначных функций. — 2013. — Т. 5, С. 112–124.
5. *Громов В. П.* Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах // ДАН. — 2004. — Т. 394, № 3. — С. 305–307.
6. *Громов В. П.* Операторный метод решения линейных уравнений // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). — 2002. — № 3. — С. 4–36.
7. *Мишин С. Н.* Дифференциально-операторные уравнения в локально выпуклых пространствах // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). — 2006. — № 6. — С. 46–61.
8. *Мишин С. Н.* Порядок и тип суммы и произведения коммутирующих операторов // Ученые записки ОГУ. — 2014. — № 3 (59). — С. 70–71.

9. *Мишин С. Н.* Порядки и типы некоторых интегральных операторов в пространствах непрерывных функций // Ученые записки ОГУ. — 2014. — № 3 (59). — С. 72–73.

UDC 517.983, MSC 46 + 47

About Some Kind of Differential-Operator Equations with Variable Coefficients

S. N. Mishin

Department of Geometry and Mathematics Teaching Methods
Oryol State University
95, Komsomolskaya str., Oryol, Russia, 302026

In this work a general method, allowing to find solutions of differential-operator equations of some type with variable coefficients by means of analitical vector-valued functions, is described. Examined equations include as particular case differential equations in partial derivatives, difference-differential and integral equations, and other functional-operator equations. Solutions are realized by uniformly converged functional vector-valued series, generated by set of solutions of ordinary differential equation of n-th order and some set of elements of locally convex space. Sufficient conditions of continuous dependence of solutions from generating set are found. Solution of Cauchy problem for examined equations is found as well and conditions of its uniqueness are specified. Besides that the so-called general solution of examined equations (the function of the most general view, from which any particular solution can be obtained) is found. The investigation is realized by means of characteristics (order and type) of operator and operator characteristics (operator type and operator order) of vector relative to operator. In this work in investigation a convergence of operator series relative to equicontinuous bornology is used.

Key words and phrases: locally convex space, order and type of operators, differential-operator equation, equicontinuous bornology, convergence by bornology, vector-valued function.

References

1. Y. V. Radyno, Linear Equations and Bornology, Belarus State University, Minsk, 1982, in Russian.
2. V. P. Gromov, S. N. Mishin, S. V. Panyushkin, Operators of Finite Order and Differential-Operator Equations, Oryol State University, Oryol, 2009, in Russian.
3. S. N. Mishin, A Connection of Characteristic of Sequence of Operators with Convergence by Bornology, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics, Information Sciences. Physics" (4) (2010) 26–34, in Russian.
4. S. N. Mishin, On Growth Characteristics of Operator-Valued Functions, Vol. 5, 2013, in Russian.
5. V. P. Gromov, Analytical Solutions of Differential-Operator Equations in Locally Convex Spaces, Proceedings of the Russian Academy of Science 394 (3) (2004) 305–307, in Russian.
6. V. P. Gromov, Operator Method of Solving of Linear Equations, Memoirs of Orel State University (laboratory of functional analysis and theory of functions) (3) (2002) 4–36, in Russian.
7. S. N. Mishin, Differential-Operator Equations in Locally Convex Spaces, Memoirs of Orel State University (laboratore of functional analysis and theory of functions) (6) (2006) 46–61, in Russian.
8. S. N. Mishin, Order and Type of Sum and Product of Commutating Operators, Memoirs of Oryol State University (3 (59)) (2014) 70–71, in Russian.
9. S. N. Mishin, Orders and Types of Some Integral Operators in Spaces of Continuous Functions, Memoirs of Oryol State University (3 (59)) (2014) 72–73, in Russian.