

УДК 004.021, 519.2, 519.8

Определение области возникновения автоколебаний в системах типа RED

А. В. Королькова

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто–Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия*

Для модели взаимодействия TCP-Reno трафика с узлом, функционирующим по одному из алгоритмов семейства Random Early Detection (RED), предложен метод определения области возникновения автоколебаний и поиска стационарной точки, приведён численный пример для алгоритма RED.

Ключевые слова: алгоритм случайного раннего обнаружения (RED), стохастические дифференциальные уравнения, стационарная точка, релаксационные автоколебания.

1. Предварительные замечания

В данной статье продолжены исследования модели взаимодействия TCP-Reno трафика с узлом, функционирующим по одному из алгоритмов семейства RED [1,2], предложенной в работах [3,4].

TCP-поток задаётся скачкообразным марковским процессом посредством аппарата стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для Пуассоновского процесса. В отличие от модели, предложенной в [5,6], в уравнении для TCP-окна при анализе учитывается возникновение потерь пакетов по тайм-ауту, а в уравнении для мгновенной длины очереди учитывается возникновение сброса пакетов в следствие функционирования управляющего алгоритма семейства RED. Кроме того, полученная система СДУ сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), проанализированы фазовые портреты системы в зависимости от применяемого в управляющем модуле алгоритма управления. В результате проведённого анализа подтверждено наличие релаксационных колебаний, предложена методика определения области устойчивости решения системы.

2. Стационарные точки и определение области возникновения релаксационных автоколебаний

Система трёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE[w(t)]}{dt} &= \frac{I(w_{\max} - E[w(t)])}{E[T(t)]} + \left(-\frac{E[w(t)]}{2} \right) \times \\ &\times (1 - E[P_{TO}(w(t - \tau))]) \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} \times \\ &\times (E[p_m(\hat{q}(t - \tau))] + E[p_d(\hat{q}(t - \tau))]) + \\ &+ (1 - E[w(t)]) E[P_{TO}(w(t - \tau))] \frac{E[w(t - \tau)]}{E[T(t - \tau)]} E[p_d(\hat{q}(t - \tau))]. \\ \frac{dE[q(t)]}{dt} &= I(R - E[q(t)]) \frac{NE[w(t)]}{E[T(t)]} (1 - E[p_d(\hat{q}(t))]) - E[C(t)], \\ \frac{dE[\hat{q}(t)]}{dt} &= \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} E[\hat{q}(t)] - \frac{\ln(1 - w_q)}{\delta} E[q(t)], \end{aligned} \right. \quad (1)$$

описывает параметры модели взаимодействия TCP-Reno трафика с узлом, функционированием по одному из алгоритмов семейства RED [1, 2], предложенной в работах [3, 4]. Здесь усреднение по времени некоторой детерминистической функции $x(t)$ определяется как $E[x(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t x(t') dt'$.

Поскольку функция сброса $p(\hat{q}) = p_m(\hat{q}) + p_d(\hat{q})$ является кусочной функцией [2], то система (1) может быть записана как совокупность нескольких систем нелинейных уравнений, каждая для одного из интервалов значений функции $p(\hat{q})$.

Для нахождения стационарной точки \hat{q}_s системы (1) все производные по времени полагаются равными нулю. Легко видеть, что для $p(\hat{q}) = 0$ и $p(\hat{q}) = 1$ стационарные точки отсутствуют. Поэтому эти промежутки могут быть исключены из рассмотрения. Действительные корни получаемой таким образом системы нелинейных уравнения и будут являться стационарными точками системы (1).

При упрощающих предположениях $\tau = 0$, $N = 1$, $p_m(\hat{q}(t)) = 0$, $P_{TO}(w(t)) = \min \left\{ 1, \frac{3}{w(t)} \right\}$ [7] методом Рунге–Кутты 4-го порядка было получено численное решение системы (1), методом Ньютона численно решена соответствующая система нелинейных уравнений, определяющая стационарные точки системы (1).

Решение системы (1) может быть как устойчивым, так и представлять собой автоколебательный процесс (имеют место релаксационные колебания). Для рассматриваемой системы возникновение автоколебаний обусловлено характером разрывов функции $p(\hat{q}(t))$. Так, для алгоритмов с кусочно-линейной функцией $p(\hat{q}(t))$ (например, RED [1, 2]) в точке q_{max} функция сброса имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы: $\lim_{\hat{q}(t) \rightarrow q_{max} - 0} p(\hat{q}(t)) \neq \lim_{\hat{q}(t) \rightarrow q_{max} + 0} p(\hat{q}(t))$, т.е. имеет место разрыв 1-го рода. Автоколебания возникают, когда значение стационарной точки \hat{q}_s , вычисленное в рабочей области, попадает на интервал, где $p(\hat{q}(t)) = 1$.

Для определения области возникновения релаксационных колебаний предлагается построить график поведения стационарной точки \hat{q}_s в предположении, что участок безусловного сброса отсутствует. При этом, если оставить свободными n параметров, то в результате получим поверхность размерности n . Также строится граничная плоскость $\hat{q}(t) = q_{max}$ (точка перехода к области $p(\hat{q}(t)) = 1$). Тогда область, стационарные точки которой оказываются выше граничной плоскости, определяет область возникновения релаксационных колебаний.

Пример. Для алгоритма RED [1, 2] зафиксируем $p_{max} = 0,1$ и $q_{min} = 20$. Начальные параметры: $w_{max} = 32$ пак., $R = 100$ пак., $T_p = 0,01$ сек., $w_q = 0,0007$ сек., $C = 1400$ пак./сек., $\delta = 1/C$ сек., $N = 1$ поток. Изменяя q_{max} в пределах $[q_{min}, R]$, получим набор стационарных точек (рис. 1).

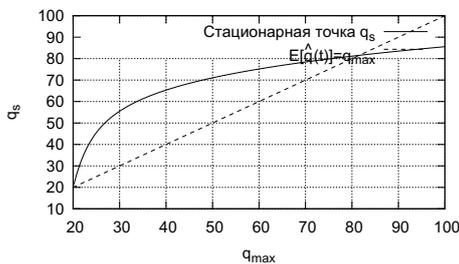


Рис. 1. Поведение стационарной точки \hat{q}_s для системы с RED, $q_{min} = 20$

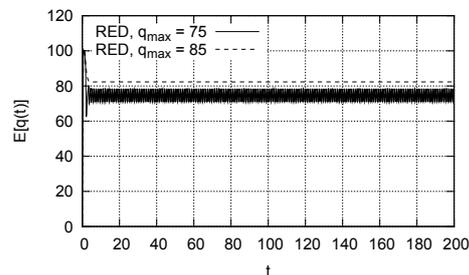


Рис. 2. Поведение $E[q(t)]$ для системы с RED, $q_{min} = 20$

Если стационарная точка будет лежать в области, расположенной выше прямой $\hat{q}(t) = q_{max}$, то поведение системы будет неустойчивым. Пример устойчивого и неустойчивого поведения системы приведён на рис. 2, 3, 4. Для рассматриваемого

примера при $q_{\max} \leq 81$ система осциллирует вокруг своей стационарной точки, а при $81 < q_{\max} \leq R$ поведение системы устойчиво (см. рис. 1).

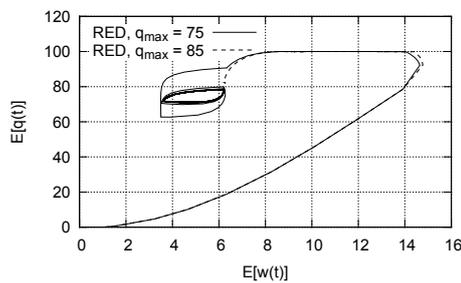


Рис. 3. Фазовый портрет для системы с RED, $q_{\min} = 20$

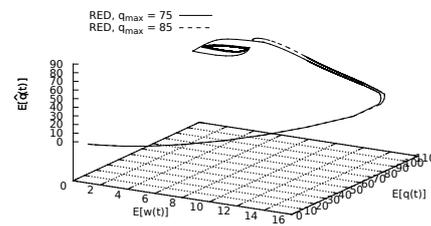


Рис. 4. Фазовый портрет для системы с RED, $q_{\min} = 20$

Литература

1. Floyd S., Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — No 1(4). — Pp. 397–413. — <http://www.icir.org/floyd/papers/red/red.html>.
2. Королькова А. В., Кулябов Д. С., Черноиванов А. И. К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — № 3. — С. 34–46.
3. Черноиванов А. И., Королькова А. В. Моделирование при помощи стохастических дифференциальных уравнений поведения TCP-трафика при взаимодействии с узлом, работающим по алгоритму RED. — М.: МФТИ, 2009. — Т. 1.
4. Королькова А. В., Черноиванов А. И. Использование стохастических дифференциальных уравнений для моделирования поведения TCP-трафика при взаимодействии с узлом, работающим по алгоритму RED // «Математика. Компьютер. Образование». Тезисы. — Дубна, 2010.
5. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior. — 1999.
6. Misra V., Gong W.-B., Towsley D. Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30, issue 4. — Pp. 151–160.
7. Modeling TCP Throughput: A Simple Model and its Empirical Validation: Techrep / J. Padhye, V. Firoiu, D. Towsley, J. Kurose. — Amherst, MA, USA, 1998.

UDC 004.021, 519.2, 519.8

Defining the Areas of Self-Oscillation in RED-Like Systems

A. V. Korolkova

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

The method for self-oscillation area evaluation and critical (stationary) point selection is introduced for the interaction model of TCP-Reno traffic with a node operating under one of Random Early Detection (RED) algorithms. The numerical results for RED algorithm are presented.

Key words and phrases: Random Early Detection (RED), stochastic differential equations, critical (stationary) point, self-oscillations.