

УДК 519.65, 519.245

Разложение полинома по кубической и квадратичным параболом

Н. Д. Дикусар

*Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия*

Получена новая форма разложения полинома $P_n(x)$ по базисным элементам — трём квадратичным и одной кубической параболом. Базисные элементы определяются через x -координаты, связанные специальным правилом сложного отношения четырёх точек. В задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания такое разложение позволяет повышать эффективность и качество вычислений.

Ключевые слова: численные методы, 4-точечное преобразование, полиномиальная аппроксимация и сглаживание, эффективность алгоритмов.

1. Введение

Повышение эффективности и устойчивости методов полиномиального сглаживания экспериментальных данных и аппроксимации сложных функций является одной из центральных задач как в научных исследованиях, так и в области развития современных технологий, где требуется обработка больших объёмов информации в режиме реального времени.

Понятие обусловленности является ключевым при работе с полиномами. При выполнении операций с полиномами высокой степени матрица нормальных уравнений становится плохо обусловленной, вследствие чего возникает потеря точности, приводящей к обесцениванию результатов вычислений [1]. Хотя такого рода трудности устраняются с помощью полиномов Чебышева, методов ортогонализации и др., разработка методов, менее чувствительных к обусловленности задачи, остаётся весьма актуальной.

Известно, что качество результатов аппроксимации дискретного набора данных существенно зависит от выбора базисных полиномов, равносильных в теоретическом плане, но различных по форме. Выбор той или иной формы представления связан, как правило, с устойчивостью и точностью вычислений или с общей эффективностью алгоритмов.

В рамках идей 4-точечных преобразований [2, 3] получена новая форма представления полинома $P_n(x)$ через три квадратичные w_1, w_2, w_3 и одну кубическую параболу Q , которые формируются по четвёрке x -координат, связанных правилом сложного отношения четырёх точек [2].

При решении задач полиномиальной аппроксимации функций и сглаживания данных представление $P_n(x)$ через Q, w_1, w_2 и w_3 , как метод базисных элементов (МБЭ), повышает эффективность и качество вычислений [4, 5]

2. Метод базисных элементов

Суть метода состоит в преобразовании многочлена

$$P_n(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

к форме, в которой полином (1) выражается через квадратичные параболы Π_i и степени кубической параболы Q в виде: $P_n(x; \mathbf{a}) \rightarrow P_{n \downarrow k}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^k Q^i \Pi_i$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Представителя правительства Словакии в ОИЯИ.

где $\Pi_i = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i$, $\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, w_3]$ — весовые функции, $\mathbf{r}_i^T = [r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}]$ — коэффициенты, α, β — параметры, функционально связанные с переменной x , а k — максимальная степень Q ($k = \lfloor n/3 \rfloor$, $\lfloor a \rfloor$ — наибольшее целое $\leq a$.)

Определение. Функции

$$w_1 = \frac{-\tau(\tau - \beta)}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad w_2 = \frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta(\beta - \alpha)}, \quad w_3 = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}, \quad \sum w_i = 1, \quad (2)$$

$$Q(\tau; \alpha, \beta) = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta), \quad \tau, \alpha, \beta \in R, \quad \alpha \neq \beta \neq 0, \quad (3)$$

называются **базисными элементами**.

Например, уравнение квадратичной параболы, проходящей через точки (α, r_α) , (β, r_β) и $(0, r_0)$ в форме $P_{2\downarrow 0}(x)$, принимает вид

$$P_{2\downarrow 0}(x) \equiv \Pi_0(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}) = Q^0 \mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_\alpha w_1 + r_\beta w_2 + r_0 w_3,$$

где $r_\nu = \Pi_0(\nu; \alpha, \beta, \mathbf{r})$, $\nu = \alpha, \beta, 0$.

Уравнение кубической параболы $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ в форме $P_{3\downarrow 1}$ имеет следующую конструкцию

$$P_{3\downarrow 1} \equiv S(x; \alpha, \beta; \mathbf{r}) = \Pi_0 + Q\Pi_1 = \Pi_0 + Q\vartheta, \quad x, \alpha, \beta \in R,$$

где $\Pi_1 = \mathbf{w}^T \mathbf{r} = \vartheta w_1 + \vartheta w_2 + \vartheta w_3 = \vartheta(w_1 + w_2 + w_3) = \vartheta \cdot 1 = \vartheta$ — коэффициент. Представление полинома $P_n(x; \mathbf{a})$ в форме $P_{n\downarrow k}$ для $n > 3$ выражает

Теорема 1. Для заданной тройки чисел $\{x_\alpha, x_\beta, x_0\} \in R$ и четвёрки базисных элементов $\{w_1, w_2, w_3, Q\}$, определённых формулами (2), (3), многочлен $P_n(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ может быть представлен в виде

$$P_{n\downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \Pi_0 + \Pi_1 Q + \Pi_2 Q^2 + \dots + \Pi_k Q^k, \quad (4)$$

где $\Pi_i = \Pi_i(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$, $k = \lfloor n/3 \rfloor$, $\tau = x - x_0$, $\alpha = x_\alpha - x_0$, $\beta = x_\beta - x_0$, а $\mathbf{r}_i^T = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}]$ — вектор, образованный из ординат, расположенных на линиях $\tau = \alpha$, $\tau = \beta$ и $\tau = 0$; $i = \overline{0, k}$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1 основано на вычислении $r_{i\nu}$ по значениям $P_n(x)$, $\Pi(x)$, $Q(x)$ и их производных до k -го, 2-го и 3-го порядков соответственно в точках $\nu = \alpha, \beta, 0$. Для этого используются:

- формулы представления $\{x^j\}_{j=1}^n$ в виде $x^j = \Pi(x; \alpha, \beta) + Q(x; \alpha, \beta)u_{j-3}(x)$ [3], где $u_j(x)$ — элементарные симметрические функции, которые определяются по рекуррентной формуле $u_j = (x + \alpha)u_{j-1} - \alpha x u_{j-2} + \beta^{j-3}$, $u_0 = u_1 = u_2 = 0$; $j = \overline{3, n}$;
- формулы редуцированных многочленов $U_i(x; \alpha, \beta) = \Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) + Q(x)U_{i+1}(x)$ [4], где $\mathbf{r}_i = [U_{i\alpha}, U_{i\beta}, U_{i0}]^T$, $i = \overline{1, k}$ и
- лемма 1 о вычислении значений $U_i(x)$ в точках $x = \alpha, x = \beta, x = 0$:

Лемма 1. Значения $U_{i\nu} \equiv U_i(\nu)$ определяются через $U_{(i-1)\nu}$, $U'_{(i-1)\nu}$, $\nu = \alpha, \beta, 0$ и параметры α, β и $\gamma = \beta - \alpha$ в виде

$$\begin{aligned} U_{i\alpha} &= (\gamma - \alpha)U_{(n-1)\alpha}/(\alpha^2\gamma^2) + U_{(i-1)\beta}/(\beta\gamma^2) - U_{(i-1)0}/(\alpha^2\beta) - U'_{(i-1)\alpha}/(\alpha\gamma), \\ U_{i\beta} &= U_{(i-1)\alpha}/(\alpha\gamma^2) - (\gamma + \beta)U_{(n-1)\beta}/(\beta^2\gamma^2) - U_{(i-1)0}/(\alpha\beta^2) + U'_{(i-1)\beta}/(\beta\gamma), \\ U_{i0} &= -U_{(i-1)\alpha}/(\alpha^2\gamma) + U_{(i-1)\beta}/(\beta^2\gamma) + (\alpha + \beta)U_{(n-1)0}/(\alpha^2\beta^2) + U'_{(i-1)0}/(\alpha\beta). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (1) получаются при раскрытии соответствующих пределов

$$U_{i\nu} = \lim_{x \rightarrow \nu} \{ [U_{(i-1)}(x) - \Pi_{(i-1)}(x; \dots, \mathbf{r}_{(i-1)})] / Q(x; \dots) \}, \quad i = \overline{2, k}, \quad \nu = \alpha, \beta, 0.$$

Следствие 1. В случае приближения функции $f(x) \in C^{(k)}[a, b]$ полиномом $P_{n \downarrow k}$ для вычисления \mathbf{r}_i требуется $k = \lfloor n/3 \rfloor$ производных $f^{(i)}$, $i = \overline{0, k}$ и производные от $\Pi_i(x)$ и $Q(x)$ до второго-третьего порядков в точках x_ν , $\nu = \alpha, \beta, 0$.

С геометрической точки зрения, коэффициенты $r_{i\nu}$ являются ординатами точек на линиях $x = x_\nu$, $\nu = \alpha, \beta, 0$, причём $r_{i\nu} = \Pi_i(\nu)$. В зависимости от расположения $r_{i\nu}$ на координатной плоскости линии однозначно определяются одной, двумя или тремя точками — горизонтальная прямая, наклонная прямая или квадратичная парабола.

3. Аппроксимация функций

Приближение непрерывной функции полиномом в достаточно малой окрестности точки всегда надёжно, тогда как в более широком промежутке оно требует большой осторожности. Использование (4) для локального приближения имеет свои особенности. Разложение $f(x)$ по степеням $Q = (x - x_\alpha)(x - x_\beta)(x - x_0)$ аналогично разложению $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$. В формуле Тейлора значения производных и самой функции вычисляются в точке x_0 , а в формулах $P_{n \downarrow k}$ используются значения f , $f^{(i)}$ и значения базисных элементов Π_i , Q и их производных в трёх точках $x = x_\alpha$, $x = x_\beta$ и $x = x_0$. При этом весьма важно подчеркнуть, что элементы w_1 , w_2 , w_3 и Q зависят от параметров α и β , изменяющих базис, тогда как в формуле Тейлора базис фиксирован. Рассуждения при доказательстве теоремы 1 позволяют сформулировать аналогичную теорему о локальном приближении функции:

Теорема 2. Если действительная функция $f(x)$, $x \in [a, b]$ одного переменного имеет $k = \lfloor n/3 \rfloor$ непрерывных производных в точках x_α , x_β и x_0 , $x_\alpha < x_0 < x_\beta$, причём точки x_α и x_β расположены вблизи границ $[a, b]$, соответственно, то $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i + R_{k+1}, \quad (6)$$

где \mathbf{r}_i вычисляются по формулам леммы на основе f , w_1 , w_2 , w_3 и Q и параметров α и β . При этом остаточный член равен $R_{k+1} = Q^{k+1} U_{k+1}(x; \alpha, \beta)$.

Замечание. В разложении (6) базисные элементы зависят от параметров, изменение которых влияет на величину R_{k+1} , т. е. α и β являются параметрами регулирования (управления), и от их выбора зависит точность аппроксимации.

Пример 1. Аппроксимация $\sin(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, ($\alpha = -\pi$, $x_0 = 0$, $\beta = \pi$, $\gamma = 2\pi$) полиномом $P_{5 \downarrow 1}(x)$. Так как $\mathbf{r}_0 = [0, 0, 0]^T$, $\sin'_{-\pi} = \sin'_{\pi} = -1$ и $\sin'_0 = 1$, то по (1) найдём $\mathbf{r}_1 = -\pi^{-2} [1/2, 1/2, 1]^T$. После подстановки этих значений в формулу редуцированных многочленов, с учётом (2), получим $\sin(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1 = -Q(1 + w_3)/(2\pi^2)$ или $\sin(x) \approx -x(x^2 - \pi^2)(2\pi^2 - x^2)(2\pi^4)$. При этом $\max |\sin(x) - Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1| < \max |\sin(x) - (x - x^3/6 + x^5/120)|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

4. Сглаживание данных

Использование модели в форме $P_{n\downarrow k}$

$$f(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i, \quad (7)$$

где $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w} = [Q^i w_1, Q^i w_2, Q^i w_3]^T = [b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]^T$ в задачах полиномиальной регрессии имеет ряд преимуществ при реализации соответствующих процедур, так как модель (7) обладает полезными свойствами, из которых наиболее важными являются:

- 1) возможность изменять базис $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w}$ через параметры α и β , т. е. влиять на обусловленность нормальной матрицы, так как абсолютные значения функций $\{x^i\}$ и $\{Q^i w_j\}$ различаются на порядки;
- 2) модель имеет составляющие — *фиксированную* ($\mathbf{w}^T \mathbf{r}_0$) и *свободную* ($\mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i$), где фиксированная составляющая ($\mathbf{w}^T \mathbf{r}_0$) использует данные вместо коэффициентов при меньших степенях x с возможностью *вычислений по параметрам* α и β ;
- 3) выбор «сопровождающих троек» из входных данных $\{(x_\nu, r_{0\nu})\}$, $r_{0\nu} = \tilde{f}_\nu$, $\nu = \alpha, \beta, 0$ обеспечивает *естественную привязку* к кривой f ;
- 4) дробно-рациональная зависимость \mathbf{b}_i от параметров позволяет *повышать устойчивость к ошибкам* и *понижать вычислительную сложность* аппроксимационных алгоритмов (для подходящих α и β знаменатели в w_j подавляют ошибки в оценке $\hat{\mathbf{r}}_0$, что обеспечивает устойчивость трансформации данных).

Например, с помощью $P_5(x) \rightarrow P_{5\downarrow 1}(x)$ и трансформации данных получим модель в виде

$$\underbrace{\tilde{f}(x) - \mathbf{w}^T(x; \alpha, \beta) \hat{\mathbf{r}}_0}_{\tilde{u}(x)} = \mathbf{b}^T(x; \alpha, \beta) \mathbf{r}_1 + e_{\tilde{u}}(x), \quad (8)$$

где $\hat{\mathbf{r}}_0$ — оценка реперных ординат, \mathbf{b} — новый базис 5-й степени, \mathbf{r}_1 — вектор неизвестных коэффициентов. При вычислении $\tilde{u}(x)$ происходит устойчивое преобразование ошибки $e_{\tilde{f}}(x) \xrightarrow{\mathbf{e}_0} e_{\tilde{u}}(x)$, где $\mathbf{e}_0 = [e_\alpha, e_\beta, e_0]^T$ — ошибки в оценке $\hat{\mathbf{r}}_0$, а число коэффициентов (\mathbf{r}_1) сокращается до трёх.

Пример 2. Покажем это на примере сравнения результатов МНК-сглаживания точек сигнала $S(x)$, $x \in [0, 7]$ полиномом 11-й степени по выборке $\{\tilde{S}_k = S(x_k) + e_k\}_{k=1}^N$, $N = 300$, ($e \sim N(0, \sigma)$, $\sigma = 0, 1$) двумя моделями $P_{11}(x; \mathbf{a})$ и $P_{11\downarrow 3}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$, при $x_0 = 3, 7$, $\alpha = -3, 3$, $\beta = 3, 1$.

Обозначим нормальные матрицы через \mathbf{C} и \mathbf{B} соответственно для моделей $S(x) \approx P_{11}(x; \mathbf{a})$ и $S(x) \approx P_{11\downarrow 3}(x; \mathbf{r}_i)$. Оценки \hat{r}_{ij} в (7) найдём из условия

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_{ij}} \sum_{k=1}^N [\tilde{S}_k - \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 b_{ijk} \hat{r}_{ij}]^2 = 0,$$

где $b_{ijk} = Q^i(\tau_k) w_j(\tau_k)$, $\tau_k = x_k - x_0$.

Результаты сглаживания (оценка \hat{S}_B , гистограммы остатков и невязка $S(x) - \hat{S}_B(x)$) показаны на рис. 1 слева. Справа приведены графики $b_{ij}(x; \alpha, \beta)$.

Разность оценок, полученных для обеих моделей, показана на графике (рис. 2, справа). Слева — графики парабол $\hat{\Pi}_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$, $Q(x; \alpha, \beta)$ и оценки $\hat{r}_{1\nu}$ для $\hat{\Pi}_1$. Точки пересечения $\hat{\Pi}_i$ с вертикалями $x = x_\nu$, $\nu = \alpha, \beta, 0$ соответствуют координатам $\hat{\mathbf{r}}_i$. Для $P_{11}(x; \mathbf{a})$ данные обрабатывались процедурой `LeastSquare()` из пакета Maple.

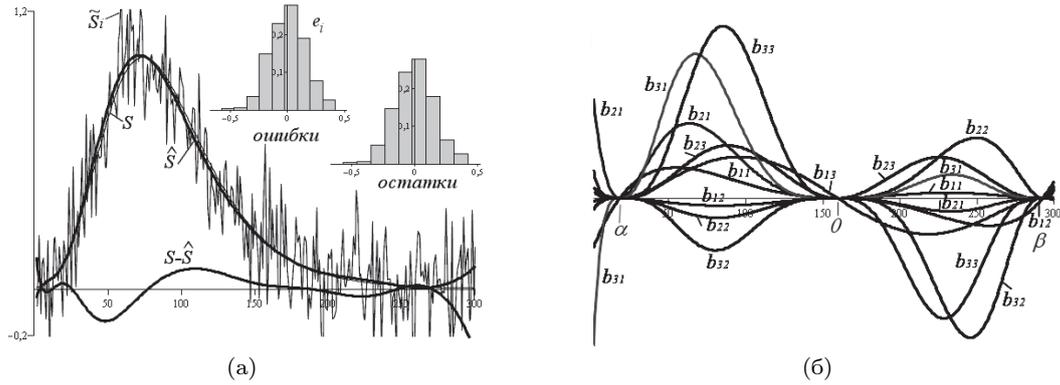


Рис. 1. Сглаживание полиномом $P_{114,3}(x; \mathbf{r}_i)$

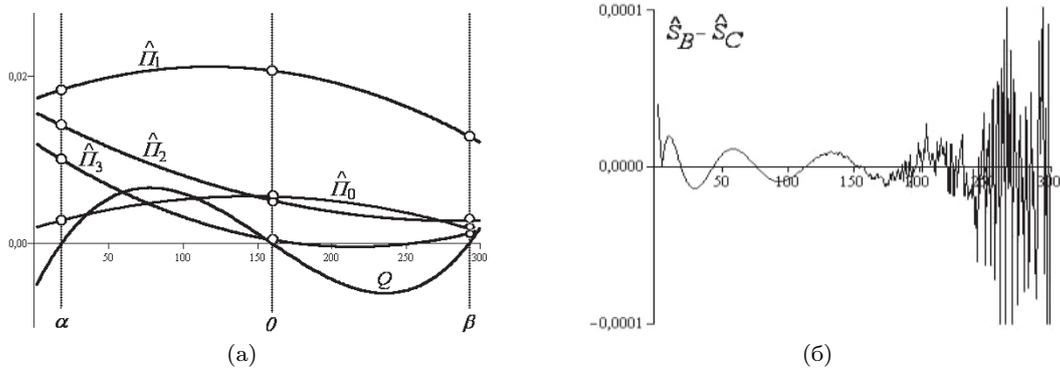


Рис. 2. $\Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$ и $\hat{S}_B(x) - \hat{S}_C(x)$

Устойчивость метода к ошибкам характеризуется числом обусловленности нормальной матрицы $\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ и значениями определителей $|\mathbf{A}|$ и $|\mathbf{A}^{-1}|$. Вычислялись значения глобальной относительной ошибки

$$\rho_e = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{S}_i - \hat{S}_i)^2} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{S}_i^2} \right]^{-1}$$

и модуль максимального отклонения оценки от истинной кривой $dev = \max\{|S_i - \hat{S}_i|\}_{i=1}^N$ для каждой модели.

Результаты расчётов показали, что при $\rho_e(\mathbf{C})/\rho_e(\mathbf{B}) \approx 1$ и $dev(\mathbf{C})/dev(\mathbf{B}) \approx 1$, отношение $\mu(\mathbf{C})/\mu(\mathbf{B}) \approx 5,449 \cdot 10^5$, а $|\mathbf{C}|/|\mathbf{B}| = 3.406157009 \cdot 10^{14}$ и $|\mathbf{C}^{-1}|/|\mathbf{B}^{-1}| = 2.932474815 \cdot 10^{-15}$, т. е. вычисления с матрицей \mathbf{B} более устойчивы к ошибкам.

При сравнении результатов сглаживания, полученных методом главных компонент [6] (МГК, пакет «Гусеница») и МНК (модель МБЭ с матрицей $B_{12 \times 12}$) на одном и том же наборе точек ($N = 1000$) также дало хорошее согласие.

5. Рекурсивное вычисление $\hat{\mathbf{r}}$

Вычисление $\hat{\mathbf{r}}_1$ в модели (8) по алгоритму рекурсивного метода наименьших квадратов (РНК) [7] даёт существенное понижение вычислительной сложности.

Трансформация $\tilde{f}_i \xrightarrow{\hat{\mathbf{r}}_0} \tilde{u}_i$ переводит модель с шестью коэффициентами в модель (8) с тремя неизвестными коэффициентами r_j :

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^3 b_j r_j, \quad \text{где } b_j = Q w_j. \quad (9)$$

При вычислении оценки $\hat{\mathbf{r}} \equiv \hat{\mathbf{r}}_1$ по РНК-алгоритму на вход подаётся временная последовательность точек $\{\tilde{f}_i\}_{i=1,2,\dots}$, упорядоченных по x , ($x_i < x_{i+1}$) с неизвестным заранее N .

В работе [5] для оценки свободного параметра ϑ кубической модели использовался режим вычисления по параметрам. Здесь рассматривается схема, в которой все параметры фиксированы, а оценки $\hat{\mathbf{r}}_0$ предварительно усредняются по $2J+1$ соседним ординатам в виде $\hat{r}_{0\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{j=-J}^J \tilde{f}_j$, $\nu = \alpha, \beta, 0$. Затем $\hat{\mathbf{r}}_0$ используется для трансформации данных: $\tilde{u}_i = \tilde{f}_i - \hat{r}_{0\alpha} w_{1i} - \hat{r}_{0\beta} w_{2i} - \hat{r}_{00} w_{3i}$, $i = \overline{1, N}$. При этом ошибки в \tilde{u}_i преобразуются по формуле $e_{u_i} = (e_i - e_\alpha w_{1i} - e_\beta w_{2i} - e_0 w_{3i})$, где e_i — ошибка f_i , а e_α, e_β и e_0 — ошибки в $\hat{r}_{0\nu}$.

При рекурсивном вычислении $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$ на вход РНК-алгоритма подаётся последовательность $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots\}$ с ошибкой на выходе n -го шага $\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}$, $n = 1, 2, \dots$. Используя критерий оптимальности $\hat{\mathbf{r}}^{(n)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{r}}}$ на n -м шаге, найдём оценку $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$ в (9) по следующему РНК-алгоритму:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &= \tilde{f}_n - \hat{\Pi}_{0n}, \\ \mathbf{k}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n [1 + \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n]^{-1}, \\ \hat{u}_n &= \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}, \\ \varepsilon_n &= \tilde{u}_n - \hat{u}_n, \\ \hat{\mathbf{r}}^{(n)} &= \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)} + \mathbf{k}_n \varepsilon_n, \\ \mathbf{\Omega}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} - \mathbf{k}_n \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1}, \\ \mathbf{\Omega}_0 &= \sigma \mathbf{I}, \hat{\mathbf{r}}^{(0)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{b}_n = [Q_n w_{1n}, Q_n w_{2n}, Q_n w_{3n}]^T$, $\mathbf{\Omega}_n = [\mathbf{B}_n^T \mathbf{B}_n]^{-1}$ размерности 3×3 , \mathbf{B}_n — матрица значений базисных функций \mathbf{b}_n размерности $n \times 3$, $\mathbf{k}_n = [K_1, K_2, K_3]^T$ — коэффициент усиления.

Пример 3. Ниже приводится пример обработки выборки точек $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{500}$, $\sigma = 0,3$, $h = 0,0088$, рассеянных вокруг полинома $P_5 = 0,03(x^5 + 3,5x^4 - 12,71x^3 - 22,725x^2 + 29,325x + 46,41)$, $x \in [-1, 7, 2, 7]$ алгоритмом (10).

Оценка $\hat{\mathbf{r}}_0 = [0, 1976281418, -0,06080134616, 1, 312190607]^T$ найдена по 11 соседним точкам при $\alpha = -1,55$, $x_0 = 0,01$, $\beta = 2,1$. Исходные данные преобразованы по формуле $\tilde{u}_i = \tilde{S}_i - \mathbf{w}^T(x_i; \alpha, \beta) \hat{\mathbf{r}}_0$ (рис. 3, слева). Устойчивость такого преобразования подтверждается гистограммами ошибок e_s и $e_{\tilde{u}}$.

Графики траекторий \hat{r}_j , $j = \overline{1, 3}$ показаны на (рис. 3, справа), а графики коэффициентов усиления K_j и гистограммы остатков для исходных \tilde{S} и преобразованных \tilde{u} данных приведены на рис. 4, слева. Графики коррекции ошибок $\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \hat{u}_n$ показаны справа на рис. 4.

По найденным векторам $\hat{\mathbf{r}} = [-0, 2780076451, 0, 1681186476, -0, 2507904166]^T$ и $\hat{\mathbf{r}}_0$ получим окончательную оценку в виде $\hat{S}(x) = \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 + Q(x) \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}$.

Как отмечается в [7], оценка вычислительной сложности РНК-алгоритма составляет $2,5m^2 + 4m$ арифметических операций на один шаг итерации (m — число коэффициентов полинома), т.е. вычислительная сложность возрастает пропорционально квадрату порядка модели, что затруднительно для приложений в случае аппроксимации полиномами степени выше трёх.

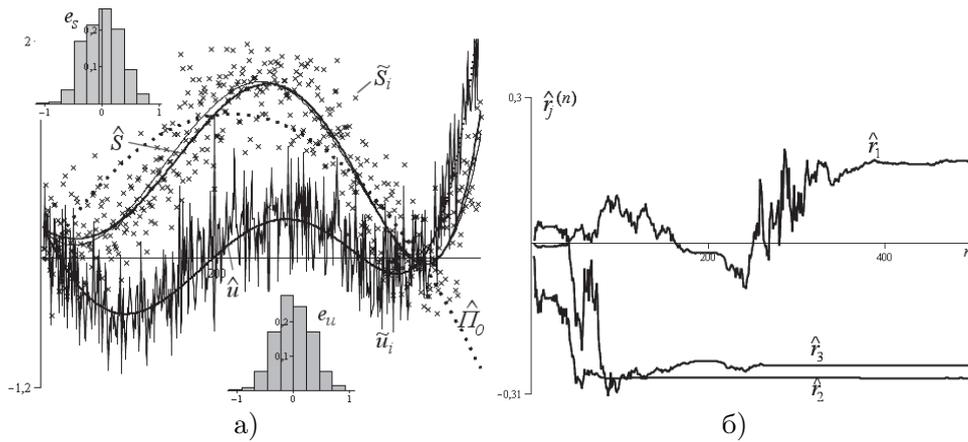


Рис. 3. Входные (\tilde{S}) и модифицированные (\tilde{u}) данные, $\hat{\Pi}_0$ и оценки \hat{S} , \hat{u} (а).
Графики траекторий $\hat{r}_j^{(n)}$ и K_{jn} (б)

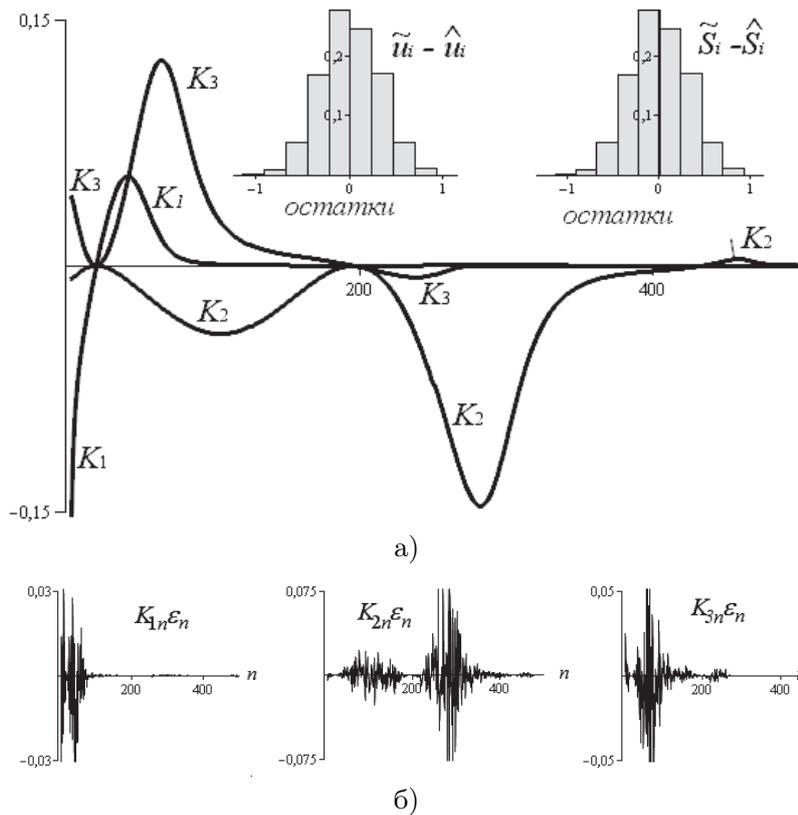


Рис. 4. Графики траекторий K_{jn} (а) и коррекция ошибок $\epsilon_n K_{jn}$ (б)

В нашем примере путём редукции модель 6-го порядка приведена к модели с тремя неизвестными коэффициентами, и оценка её вычислительной сложности, без учёта операций, затраченных на трансформацию данных $\tilde{f}_i \xrightarrow{\hat{r}_0} \tilde{u}_i$, составляет $2,5 \times 3^2 + 4 \times 3 \approx 35$ операций на один шаг против 114 для модели с 6 коэффициентами, т.е. число операций уменьшается более чем в 3 раза, что делает алгоритм пригодным для практических применений.

Литература

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1988. — С. 209–233.
2. Дикусар Н. Д. Дискретные проективные преобразования на координатной плоскости // Математическое моделирование. — 1991. — Т. 10, № 3. — С. 50–64.
3. Dikoussar N. D. Function Parametrization by using 4-point Transforms // Computer Physics Communication. — 1997. — Vol. 99. — Pp. 235–254.
4. Dikoussar N. D. Four-Point Transformation Methods in Approximation and the Smoothing Problems // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2008. — Vol. 5, No 3. — Pp. 317–323.
5. Дикусар Н. Д., Торок Ч. Автоматический поиск узлов для кусочно-кубической аппроксимации // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, № 3. — С. 23–40.
6. Golyandina N., Osipov E. "Caterpillar"-SSA Method for Analysis of Time Series with Missing Values // Journal of Statistical Planning and Inference. — 2007. — Vol. 137, No 8. — Pp. 2642–2653.
7. Адаптивные фильтры / под ред. К. Ф. Н. Коуэн, П. М. Грант. — М.: Мир, 1988. — С. 45–81.

UDC 519.65, 519.245

Polynomial Decomposition on the Basis of Cubic and Quadratic Parabolas

N. D. Dikumar

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

A new form of the decomposition of the polynomial $P_n(x)$ is constructed on basic elements given by three quadratic and one cubic parabolas. The basic elements are defined on x -axis related by special cross-ratio rule. Within the framework of polynomial approximation and smoothing problems such decomposition allows to increase efficiency and quality of computation.

Work supported by grants of Representative of the government of Slovakia in JINR.

Key words and phrases: numerical methods, 4-point transformation, polynomial approximation and smoothing, efficiency algorithm.