УДК 519.6

Методика прогноза структуры разрыва в слабодиссипативных средах с дисперсией

И. Б. Бахолдин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Миусская пл., д.4, Москва, 125047, Россия

На примере обобщённого уравнения Кортевега–Бюргерса посредством численного анализа установлено, что для слабодиссипативных сред с дисперсией и нелинейностью встречаются три типа структур разрывов: стационарные, периодические по времени и стохастические. Стационарные слабодиссипативные структуры внутри себя содержат бездиссипативные структуры разрывов типа переходов между однородными или волновыми состояниями. Разработана методика исследования ветвей двоякопериодических решений обобщённого уравнения Кортевега–де Вриза. Выявлено соответствие между типами структуры внутреннего разрыва и картинами расположения ветвей. Проведено исследование зависимости типа разрыва от его амплитуды и параметра диссипации.

Ключевые слова: структура разрыва, дисперсия, диссипация, численный анализ.

1. Периодические решения и бездиссипативные структуры

Рассмотрим ветви симметричных периодических стационарных решений обобщённого уравнения Кортевега–де Вриза

$$a_t + [-Va + a^2/2 + a_{xx} + a_{xxxx}]_x = 0,$$

описываемые уравнением

$$-Va + a^2/2 + a_{xx} + a_{xxxx} = 0.$$

Величина V здесь скорость распространения бегущей волны. Решения искались следующим образом: рассматривались начальные данные $a(0) = z$, $a'(0) = 0$, $a''(0) = w$, $a'''(0) = 0$, задавалось целое число p, искались последовательные значения $x = x_k$, $k = 1, \ldots, p$, такие что $a'''(x_k) = 0$. Далее подбиралось значение w так, что $a'(x_p) = 0$; x_p — полупериод волны. Одно и то же решение может быть найдено при различных значениях p. Нас будет интересовать минимальное из таких значений, обозначим его q. В результате такого анализа для каждого значения q на плоскости z, w можно построить некоторую кривую, которую будем называть ветвью периодических решений. Далее рассматриваем набор таких ветвей на плоскости (z, w) при различных значениях V и ищем закономерности.

Для дальнейшего анализа существенно то, что исходное уравнение имеет дисперсионную ветвь с точкой перегиба. Поэтому возможен линейный резонанс, т.е. для заданного значения V может существовать две волны: длинноволновая и коротковолновая. Для некоторых значений V отношение периодов волн целое или рациональное.

Обнаружена закономерность циклического повторения определённого расположения ветвей, схематично показанная на рис. 1. Здесь имеется некоторый целый параметр n, скачкообразно увеличивающийся от значения 2 до ∞ при уменьшении значения V от $0,25$ до нуля. Основные ветви помечены дробью вида $1/q$ со знаком плюс, если это синфазная резонансная ветвь с отношением периодов $1/q$

Статья поступила в редакцию 11 декабря 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00618-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4810.2010.1).

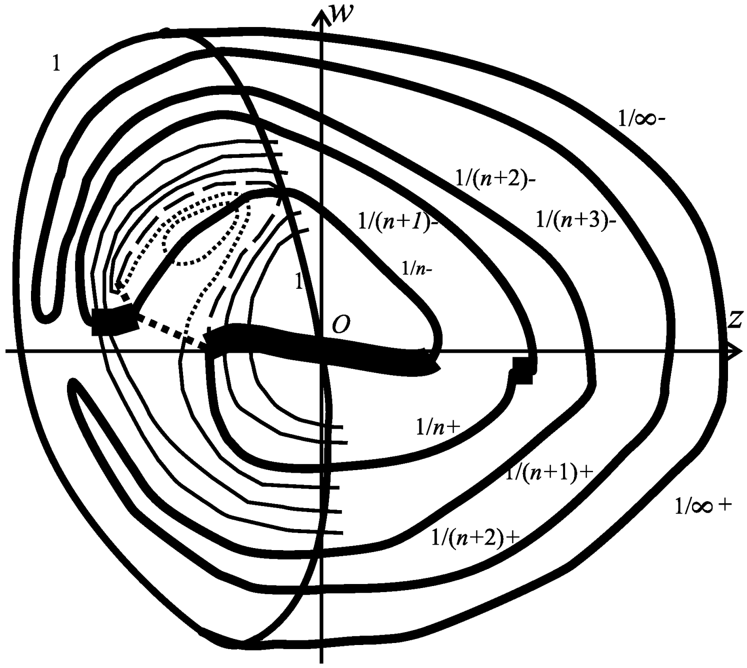

Рис. 1. **Схематичное изображение обнаруженной закономерности циклического повторения определённого расположения ветвей**

и со знаком минус, если противофазная. Кроме того, есть одноволновая длинноволновая ветвь, показанная жирной линией, и коротковолновая одноволновая ветвь, отмеченная цифрой 1. Тонкими линиями показаны другие двухволновые резонансные ветви, а пунктирными линиями — ветви резонансных фазовых колебаний. Рисунок дан для нечётного n. Для чётного расположение несколько иное. Имеется небольшой участок значений V ниже значения $0,16$ (значение $0,16$ — линейный резонанс $1/2$), где расположение ветвей нетипичное, но это не меняет общей картины.

При $V > 0,25$ (значение $0,25$ — резонанс $1/1$) имеется два вида расположения ветвей. При V, немного превышающем $0,25$, коротковолновая и длинноволновая ветви не пересекаются в начале координат, а образуют единую кривую с двумя изломами. Здесь имеются так называемые $1/1$ солитоны, простейший из них представляет собой стационарный и симметричный вариант солитона огибающей нелинейного уравнения Шрёдингера. Остальные представляют собой комбинации из первичных солитонов, смещённых на определённое расстояние друг относительно друга. Их конечное число. При увеличении V появляется буфуркационная картина со спиралеобразным расположением ветвей. Здесь число солитонов бесконечно. В этом случае, рассматривая последовательности мультисолитонов, можно получить решение в виде структуры разрыва типа перехода от периодического состояния к однородному. В случае $V < 0,25$ тоже можно найти структуры разрыва, но это структуры типа перехода от резонансного двоякопериодического состояния, соответствующего ветви $1/n$, — к однопериодному состоянию, соответствующему одноволновой коротковолновой ветви. В частности можно найти решение, соответствующее точке соединения двухволновой и одноволновой длинноволновой ветви. Для выявления решений типа структур разрывов типа переходов между двумя периодическими решениями эффективен метод, состоящий в том, что берутся начальные данные, соответствующие некоторому циклу в течение одного периода, и для каждой точки этого цикла делается малое возмущение. В результате получается однопараметрическое семейство начальных данных, например, $a(0) = a_p(x) + \delta$, $a'(0) = a'_p(x)$, $a''(0) = a''_p(x)$, $a'''(0) = a'''_p(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \Lambda$, Λ — период волны, δ — малая величина. Для каждого решения с такими начальными данными ищутся локальные минимумы расстояния (в четырёхмерном фазовом пространстве) до произвольной точки на другом цикле, такое значение x и величина расстояния r заносятся в некоторый файл. Строится поточечный график $r(x)$. Если имеются минимумы близкие нулю, то структура существует. Структура оказывается не единственной.

2. Слабодиссипативные структуры разрывов

Для обобщённого уравнения Кортевега–Бюргеса

$$a_t + [-Va + a^2/2 + a_{xx} + a_{xxxx}]_x = \varepsilon a_{xx},$$

используя метод усреднения Уизема и выявленные свойства ветвей периодических решений, при $V > 0,25$ можно построить решение, огибающие волн которого показаны на рис. 2*а*. При $V < 0,25$ строится решение усреднённых уравнений, схематично показанное на рис. 2*б*.

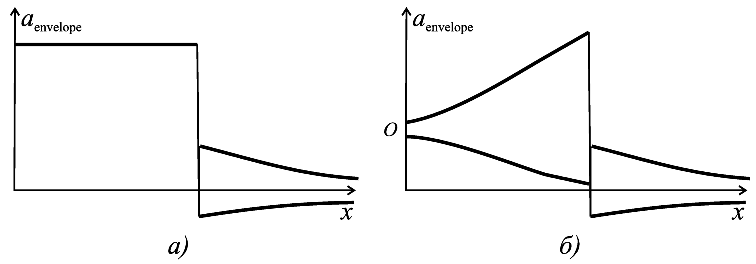

Рис. 2. **Огибающие решений обобщённого уравнения Кортевега–Бюргеса**

Существование таких решений проверяется непосредственным расчётом обобщённого уравнения Кортевега–Бюргеса с гладкими начальными данными, такими что $a \to 0$, при $x \to +\infty$, $a \to 2V$, при $x \to -\infty$. С течением времени при таком расчёте устанавливается стационарная, периодическая по времени или стохастическая структура разрыва. Пример установившейся стационарной структуры с внутренним резонансом 1/2 показан на рис. 3.

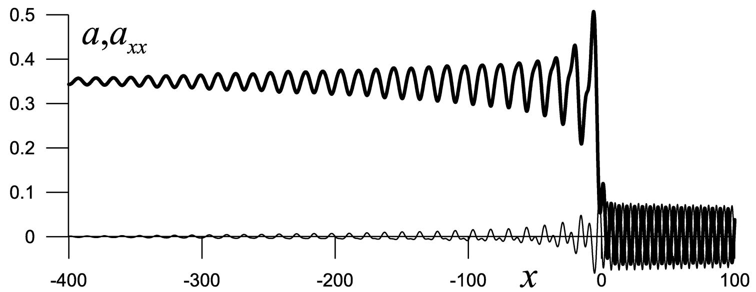

Рис. 3. **Пример установившейся стационарной структуры с внутренним резонансом** 1/2

Однако в тех областях, где существование решения с внутренним бездиссипативным разрывом предсказывается, такое решение наблюдается только при конечных значениях ε, хотя эти значения и весьма малы. При уменьшении диссипации решение становится неустойчивым. Области существования решения образуют некоторые интервалы, «острова», на оси V. Исключение — решение с 1/1 резонансом, которое есть и при $V \to \infty$. При этом в зоне острова и на некотором участке выше его (назовём этот участок зоной влияния) нет точного решения для внутренней резонансной структуры, но есть приближенное: при последовательном уменьшении ε сначала наблюдается стационарное по времени решение, затем периодическое по времени и затем хаотическое. Ниже острова наблюдается переход от стационарного решения сразу к хаосу. Однако уже при $n = 3$ зона влияния острова с $n = 4$ перекрывает часть острова с $n = 3$, поэтому вблизи нижней границы последнего осуществляется переход не к хаосу, а к решению с резонансом $1/4$, имеет место гистерезис стационарных решений.

Данная работа является продолжением работ [1–3], наиболее новые результаты отражены в [2].

Литература

1. *Бахолдин И. Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. — М.: Физматлит, 2004. — 336 с.
2. *Бахолдин И. Б.* Слабодиссипативные структуры разрывов с внутренними бездиссипативными разрывами резонансного типа. — М.: Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, №37, 2009. — 32 с.
3. *Бахолдин И. Б.* Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией // ЖВМ и МФ. — 2005. — Т. 45, № 2. — С. 330–343.

UDC 519.6

Prediction Technique of the Discontinuity Structure in Weakly Dissipative Media with Dispersion

I. B. Bakholdin

Keldysh Institute of Applied Mathematics
4, Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

By an example of the generalized Korteweg-Burgers equation by means of a numerical analysis it was found that for the weakly dissipative media with dispersion and nonlinearity there are three types of discontinuity structures: stationary, periodic on time and stochastic ones. The stationary weakly dissipative structures inside themselves contain dissipation-free discontinuity structures such as transitions between homogeneous or wave states. A technique of research of branches of doubly periodic solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation has been developed. A correspondence has been revealed between the types of the internal discontinuity structure and the pictures of the branches arrangement. Research was conducted on the dependence of the type of discontinuity upon its amplitude and dissipation parameter.

Key words and phrases: discontinuity structure, dispersion, dissipation, numerical analysis.