

---

# Математическая теория телетрафика

УДК 621.39

## Потоковый и эластичный трафик в сетях с топологией Клоса

Г. П. Башарин, Н. В. Русина

*Кафедра систем телекоммуникаций  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Быстрый прогресс высоких технологий в сфере телекоммуникаций, начавшийся с конца 20 в., ставит перед теорией телетрафика новые задачи. Конвергенция сетей различных типов породила множество классов сетевого трафика, которые различаются своими характеристиками, объемом необходимых сетевых ресурсов, а также требованиями к качеству обслуживания. Наличие разнородных потребительских запросов в сочетании с множеством предоставляемых интерактивных услуг и высокоскоростным доступом в интернет приводит к необходимости совместного обслуживания различных классов трафика, большую долю которого составляет эластичный трафик. На рубеже 20 и 21 вв. технический прогресс привел к появлению многоскоростных систем передачи, позволяющих обслуживать эластичные потоки заявок с переменной скоростью, зависящей от того, сколько на данном отрезке времени одновременно с этим обслуживается приоритетных потоковых заявок. Применение классической мультисервисной модели Эрланга для расчетов параметров качества обслуживания в современных системах становится затруднительным в силу специфических особенностей эластичного трафика. В работе представлена мультисервисная модель адаптивной многоскоростной системы типа Эрланга с потоковым и эластичным трафиком, где последнему соответствует целый набор требований к ширине полосы пропускания (ШПП). Требование к ШПП устанавливается при поступлении эластичной заявки в зависимости от занятого передаточного ресурса. Результаты модели применяются в анализе ВВХ сети с топологией Клоса, которая находит широкое применение в современных сетях телекоммуникаций.

**Ключевые слова:** мультисервисная модель Эрланга, эластичный трафик, потоковый (реального времени) трафик, пороговая стратегия доступа, вероятностно-временные характеристики (ВВХ), рекуррентный алгоритм типа Кауфман–Робертса.

## 1. Введение

В ходе быстрого прогресса высоких технологий в сфере телекоммуникаций в конце 20 в. конвергенция сетей различных типов породила множество классов сетевого трафика [1, 2]. Эти классы различаются своими характеристиками, объемом необходимых сетевых ресурсов, а также требованиями к качеству обслуживания. Среди них можно выделить две крупные категории — потоковый (streaming traffic, real-time traffic) и эластичный (elastic traffic, data traffic). При этом первоначально доминировало изучение потокового трафика [1], порождаемого в основном передачей речи, а в начале 21 в. большую роль стал играть эластичный трафик, порождаемый электронной почтой, передачей файлов, большинством интерактивных приложений и др., где требования к задержкам значительно ниже, чем в случае потокового трафика.

На рубеже 20 и 21 вв. технический прогресс привел к появлению многоскоростных систем передачи данных, обслуживающих одновременно эластичный и потоковый трафик. При этом для эластичного трафика доступно изменение скорости его передачи в силу того, что данный тип трафика допускает задержки [3–5].

Сети с топологией Клоса [6, 7], предложенные в 1953 г., находят широкое применение в современном мире высоких технологий при построении высокоинтеллектуальных вычислительных комплексов.

---

Статья поступила в редакцию 4 июня 2012 г.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 10-07-00487-а).

В работе рассматривается математическая модель одной выходной линии коммутатора третьего каскада — мультисервисная модель Эрланга со смешанным типом трафика, состоящего из потоковых и эластичных заявок, где последним соответствует целый набор требований к ширине полосы пропускания (ШПП) и реализован пороговый доступ к передаточным ресурсам. При этом рекуррентный алгоритм вычисления вероятностно-временных характеристик (ВВХ) построен так, чтобы процесс вычисления ее равновесных вероятностей был рекуррентным и близким к алгоритму Кауфмана–Робертса для  $\vec{M} \mid \vec{M} \mid V \mid 0$  [1, 2]. Далее полученные результаты применяются к анализу ВВХ для выходных линий коммутатора третьего каскада одного направления.

## 2. Модель сети с топологией Клоса типа $C_{S^2,S,S}$

Рассмотрим частный случай трехкаскадной сети Клоса типа  $C_{S^2,S,S}$ , где  $S = 2$ . На каждом каскаде имеется по два коммутатора  $2 \times 2$  (рис. 1). Все линии на рисунке имеют одинаковую емкость  $V$  каналов. На выходе из сети образуются два направления, в которые сгруппированы линии. Первая линия обоих коммутаторов 3-го каскада находится в группе линий первого направления, вторая линия обоих коммутаторов 3-го каскада находится в группе линий второго направления. В сети обслуживается  $K$  типов заявок.

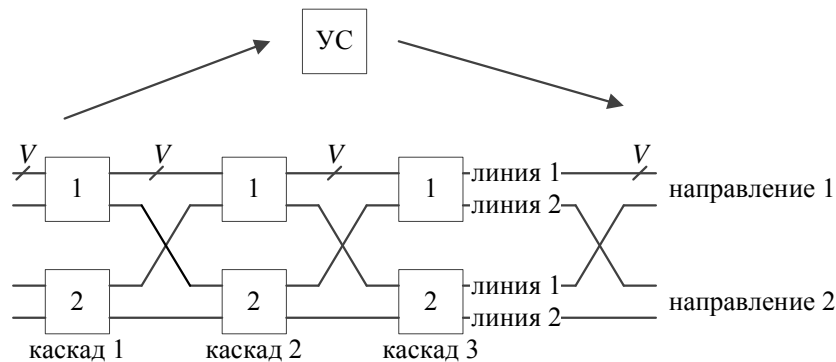
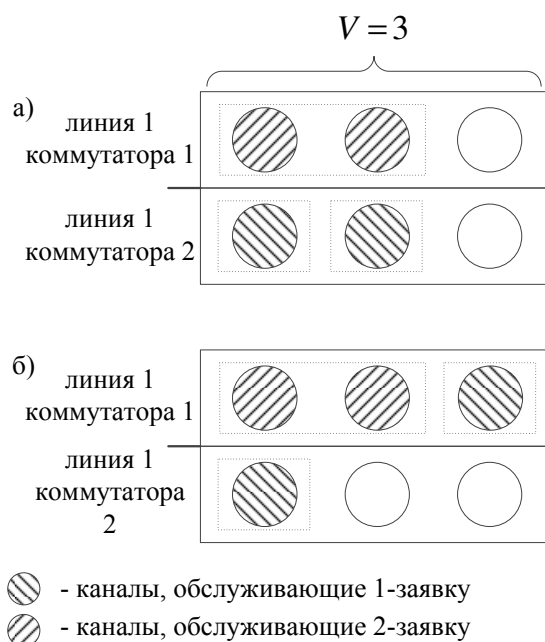


Рис. 1. Частный случай трехкаскадной сети Клоса,  $C_{4,2,2}$

Алгоритм функционирования сети состоит из трех шагов. На первом шаге управляющая система (УС) определяет, на какой коммутатор 1-го каскада поступила  $k$ -заявка. На втором шаге определяется коммутатор 3-го каскада, у которого в заданном направлении имеется линия с числом свободных каналов, необходимых для обслуживания  $k$ -заявки. На третьем шаге УС устанавливает соединение между коммутаторами, определенными на первом и втором шагах.

В сети Клоса определены внутренние и внешние блокировки. Внутренняя блокировка — вероятностью того, что на третьем шаге между коммутаторами не удалось установить соединение. Внешняя блокировка определяется вероятностью того, что на втором шаге нет ни одной линии заданного направления, в которой существует количество свободных каналов, необходимых для обслуживания  $k$ -заявки.

Внешняя блокировка  $k$ -заявки зависит не только от занятого канального ресурса каждой линии, но и от распределения обслуживаемых заявок по линиям одного направления на момент поступления  $k$ -заявки. Для этого рассмотрим 1-е направление линий для описанной выше сети с параметрами:  $V = 3$ ,  $K = 2$ , 1-заявка требует для своего обслуживания 1 канал, 2-заявка — 2 канала (рис. 2).



**Рис. 2. Пример распределения обслуживающихся заявок по линиям 1-го направления**

На рис. 2(а) представлено состояние сети, в котором свободно 2 канала, по одному на каждой линии. Если при таком состоянии сети поступает 1-заявка, то она может быть принята на обслуживание на любую из линий. Если поступает 2-заявка, то она будет заблокирована.

На рис. 2(б) представлено состояние сети, в котором также свободно 2 канала, но на одной линии. Если при таком состоянии сети поступает 1 или 2-заявка, то она может быть принята на обслуживание.

Полученные выводы можно обобщить на более сложные конфигурации сетей с топологией Клоса.

### 3. Математическая модель одной выходной линии коммутатора 3-го каскада

Рассмотрим модель функционирования одной выходной линии коммутатора 3-го каскада, в которой определено  $V$  каналов [4, 6]. Система поддерживает  $K$  различных типов услуг. Разделим все  $k$ -заявки,  $k = \overline{1, K}$ , на два класса и упорядочим их таким образом, что  $k$ -заявки при  $k = \overline{1, m}$  — заявки потокового, а при  $k = \overline{m + 1, K}$  — эластичного трафика. Поступающие  $k$ -потоки — пуассоновские с постоянной интенсивностью  $\lambda_k$ ,  $0 < \lambda_k < \infty$ ,  $k = \overline{1, K}$ , и независимы в совокупности. Для эластичных  $k$ -заявок устанавливается  $L_k > 1$  различных значений требуемой ШПП  $b_{k1} > \dots > b_{kl} > \dots > b_{kL_k}$ ,  $k = \overline{m + 1, K}$ . Для потоковых  $k$ -заявок существует только одно требование ( $L_k = 1$ ) к ШПП  $b_{k1}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Также для эластичной  $k$ -заявки задается  $L_k - 1$  пороговых значений  $V_{kl}$ ,  $0 < V_{kl} < V - b_{kl}$ ,  $l = \overline{1, L_k - 1}$ ,  $L_k > 1$ ,  $k = \overline{m + 1, K}$ . Если в момент поступления новой  $k$ -заявки,  $k = \overline{1, K}$ , в СМО оказались заняты больше, чем  $V - b_{kL_k}$  каналов, то поступившая  $k$ -заявка получает отказ и теряется, не влияя на интенсивность поступления породившего ее пуассоновского потока. Построим вектор пороговых значений для  $k$ -заявки  $\vec{V}_k := (V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{kL_k})$ ,  $k = \overline{1, K}$ , где  $V_{kL_k} = V - b_{kL_k}$ .

Время занятия эластичной  $k$ -заявкой  $b_{kl}$  каналов распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_{kl}$ , так что  $\mu_{k1}^{-1} < \dots < \mu_{kl}^{-1} < \dots < \mu_{kL_k}^{-1}$  и  $b_{kl}\mu_{kl}^{-1} = \text{const}_k$ ,  $l = \overline{1, L_k}$ ,  $L_k > 1$ ,  $k = \overline{m+1, K}$ . Время занятия потоковой  $k$ -заявкой  $b_{k1}$  каналов распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_{k1}$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Если в момент поступления  $k$ -заявки любого типа число занятых каналов  $v$  находится в интервале  $V_{k(l-1)} < v \leq V_{kl}$ ,  $l = \overline{1, L_k}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , то при обслуживании поступившей  $k$ -заявки будет использоваться пара  $(b_{kl}, \mu_{kl}^{-1})$ . Для единообразия дальнейших обозначений примем  $V_{k0} \equiv -1$ .

#### 4. Описание СтМП и пространства состояний математической модели

Функционирование системы будем описывать с помощью СтМП матричной формы  $\mathbf{X}(t) = (X_{kl}(t))_{k=\overline{1, K}, l=\overline{1, L^*}}$ ,  $t \geq 0$ ,  $L^* = \max_{k=\overline{1, K}}(L_k)$ ,  $X_{kl}(t) = 0$  для  $l = \overline{L_k + 1, L^*}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , где  $X_{kl}(t)$  — число  $k$ -заявок в СМО в момент времени  $t$ , каждая из которых занимает  $b_{kl}$  каналов [4, 5]. Пространство состояний процесса  $\mathbf{X}(t)$  составляют матрицы размерности  $K \times L^*$  из множества  $\Omega := \bigcup_{k=1}^K \left[ \bigcup_{l=1}^{L_k} (\Omega_{kl} \cup \{\mathbf{N} + \mathbf{E}_{kl} : \mathbf{N} \in \Omega_{kl}\}) \right]$ , где  $\Omega_{kl} = \{\mathbf{N} : V_{k(l-1)} < U(\mathbf{N}) \leq V_{kl}\}$ . Здесь  $l = \overline{1, L_k}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\mathbf{E}_{kl}$  — матрица, у которой стоит 1 на пересечении  $k$ -ой строки и  $l$ -го столбца, а все остальные элементы равны 0, а  $U(\mathbf{N}) := \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} n_{kl} b_{kl}$  — общее число занятых каналов в СМО в состоянии  $\mathbf{N}$ , причем  $0 \leq U(\mathbf{N}) \leq V$ . Введем  $\Omega_k := \{\mathbf{N} \in \Omega : U(\mathbf{N}) \leq V - b_{kL_k}\}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , — подпространство приема  $k$ -заявок.

Схема переходов между соседними состояниями процесса  $\mathbf{X}(t)$  по  $k$ -услуге,  $k = \overline{1, K}$ , при наличии частичного баланса представлена на рис. 3.

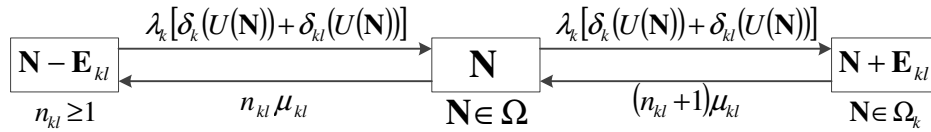


Рис. 3. Схема переходов между состояниями системы по  $k$ -услуге,  $k = \overline{1, K}$

Здесь и далее коэффициенты  $\delta_k(x)$  и  $\delta_{kl}(x)$  рассчитываются по формулам (1, 2):

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1, & \forall x = \overline{0, V}, k = \overline{1, m}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\delta_{kl}(x) = \begin{cases} 1, & V_{k(l-1)} + 1 (l > 1) b_{k(l-1)} < x \leq V_{kl} + b_{kl}, l = \overline{1, L_k}, k = \overline{m+1, K}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

### 5. Рекуррентный алгоритм расчета макровероятностей для одной выходной линии коммутатора 3-го каскада

СУГБ системы имеет сложную структуру, для которой не выполняется свойство мультипликативности. Поэтому для расчета ВВХ применяется приближенный рекуррентный алгоритм типа Кауфман–Робертса, точность которого подтверждается в [6]. Пусть  $q(v)$  — равновесная вероятность того, что в СМО занято  $v$  каналов. Тогда рекуррентный алгоритм типа Кауфмана–Робертса описывается следующими шагами:

1. Определяем  $V, L_k, V_{kl}; b_{kl}, \rho_{kl} := \frac{\lambda_k}{\mu_{kl}}, l = \overline{1, L_k}, k = \overline{1, K}$ , где  $V_{kL_k} := V - b_{kL_k}$ .
2. Пусть  $q'(0) \leftarrow 1$  и  $q'(v) \leftarrow 0$ , при  $v < 0$ .
3. Рекуррентно по  $v = \overline{1, V}$ , используя формулы (1, 2), вычисляем:

$$q'(v) = \frac{1}{v} \left( \sum_{k=1}^m \rho_{k1} b_{k1} \delta_k(v) q(v - b_{k1}) + \sum_{k=m+1}^K \sum_{l=1}^{L_k} \rho_{kl} b_{kl} \delta_{kl}(v) q(v - b_{kl}) \right). \quad (3)$$

4.  $G = \sum_{v=0}^V q'(v)$  — нормирующая константа.
5.  $q(v) \leftarrow \frac{q'(v)}{G}, v = \overline{1, V}$  — нормированное распределение вероятностей.
6.  $\pi_k = \sum_{v=V-b_{kL_k}+1}^V q(v), k = \overline{1, K}$  — вероятность блокировки поступающей в систему  $k$ -заявки.
7.  $UTIL = \sum_{v=1}^V vq(v)$  — среднее число занятых каналов.

### 6. Рекуррентный алгоритм расчета макровероятностей для совокупности выходных линий коммутаторов 3-го каскада одного направления

Применяя вышеописанную модель к анализу модели совокупности выходных линий коммутатора 3-го каскада одного направления, необходимо учесть, что емкость системы в данном случае будет составлять  $V \cdot S$ , где  $S$  — количество выходных линий одного направления,  $V$  — емкость каждой выходной линии одного направления.

Внешняя блокировка  $k$ -заявки в трехкаскадной сети Клоса зависит от того, каким образом распределены по линиям требуемого направления уже обслуживаемые в системе заявки. Равновесная вероятность того, что в СМО занято  $v$  каналов,  $v = \overline{0, VS}$ , будет рассчитываться по следующей рекуррентной формуле типа Кауфмана–Робертса [6]:

$$q'(v) = \frac{1}{v} \left( \sum_{k=1}^m \rho_{k1} b_{k1} \delta'_k(v) q(v - b_{k1}) + \sum_{k=m+1}^K \sum_{l=1}^{L_k} \rho_{kl} b_{kl} \delta'_{kl}(v) q(v - b_{kl}) \right), \quad (4)$$

$$\delta'_k(x) = \delta_k(x) \left( 1 - \frac{f(VS - x + b_{k1}, S, b_{k1} - 1)}{f(VS - x + b_{k1}, S, V)} \right), \quad (5)$$

$$\delta'_{kl}(x) = \delta_{kl}(x) \left( 1 - \frac{f(VS - x + b_{kl}, S, b_{kl} - 1)}{f(VS - x + b_{kl}, S, V)} \right), \quad (6)$$

где  $f(a, b, c)$  — число способов разместить  $a$  свободных каналов по  $b$  линиям заданного направления так, чтобы на каждой линии осталось не более  $A$  свободных каналов.

## 7. Пример численного анализа

Рассмотрим пример численного анализа модели одной выходной линии коммутатора 3-го каскада и модели совокупности линий коммутатора 3-го каскада одного направления (табл. 1).

Таблица 1  
Параметры сети Клоса

Параметры	Значения параметров модели одной выходной линии коммутатора 3-го каскада	Значения параметров модели совокупности линий коммутатора 3-го каскада одного направления
$K$	2 ( $k = 1$ — заявка потокового трафика, $k = 2$ — заявка эластичного трафика)	
$V$	32	16
$S$	1	2
$\vec{L}$	$L_1 = 1, L_2 = 2$	
$\mathbf{B}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	
$\mathbf{V}$	$\begin{pmatrix} VS - b_{11} & 0 \\ x & VS - b_{22} \end{pmatrix}$ , где $x$ — изменяемый параметр при построении графиков	
$\rho$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$	
ВВХ	$\pi_k$ $UTIL$	$\pi'_k$ $UTIL'$

Исследуется зависимость  $\pi_k$ ,  $\pi'_k$  и  $UTIL$ ,  $UTIL'$  от  $V_{21}$ . Из графиков, представленных на рис. 4–5, следует, что за счет настройки пороговых значений для заявок эластичного трафика можно гибко регулировать вероятности блокировки обоих типов трафика и оптимизировать использование ШПП как для модели одной выходной линии коммутатора 3-го каскада, так и для модели совокупности линий коммутатора 3-го каскада одного направления.

## 8. Заключение

В настоящей статье предложен приближенный рекуррентный алгоритм расчета ВВХ типа Кауфмана–Робертса для модели совокупности линий коммутатора 3-го каскада одного направления. Полученный коэффициент (5, 6) может быть применён при анализе сети Клоса с любой другой моделью одной выходной линии коммутатора 3-го каскада.

Авторы предполагают использовать идею предложенного подхода для анализа пассивных оптических сетей с радиусом действия от нескольких десятков до нескольких сотен километров.

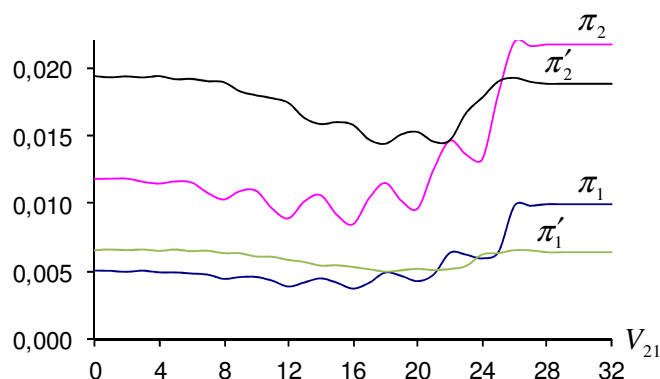


Рис. 4. Зависимость вероятностей внешней блокировки  $\pi_k$  и  $\pi'_k$  от  $V_{21}$

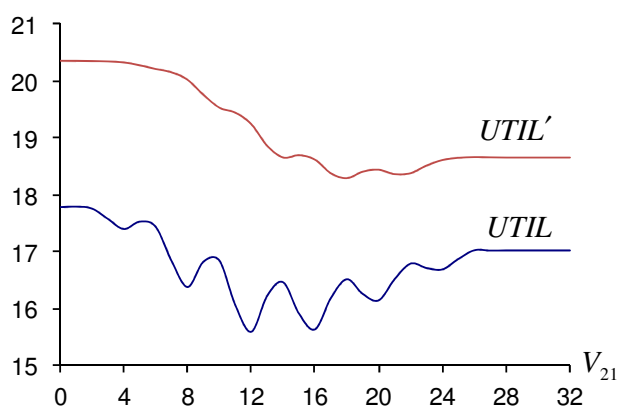


Рис. 5. Зависимость коэффициента использования ШПП  $UTIL$  и  $UTIL'$  от  $V_{21}$

## Литература

1. Башарин Г. П. Лекции по математической теории телетрафика. — М.: РУДН, 2009. — С. 342. [Basharin G. P. Lekcii po matematicheskoy teorii teletrafika. — М.: RUDN, 2009. — С. 342.]
2. Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Яржина Н. В. Теория телетрафика мультисервисных сетей. — М.: РУДН, 2008. — С. 191. [Naumov V. A., Samuylov K. E., Yarkina N. V. Teoriya teletrafika multjiserwisnihkh seteyj. — М.: RUDN, 2008. — С. 191.]
3. Башарин Г. П., Клапоуцак С. Н., Митькина (Русина) Н. В. Математическая модель адаптивной многоскоростной системы с эластичным трафиком // Вестник РУДН. «Математика. Информатика. Физика». — 2008. — № 3. — С. 58–66. [Basharin G. P., Klapouthak S. N., Mitjkina (Rusina) N. V. Matematicheskaya modelj adaptivnoy mnogoskorostnoy sistemih s ehlastichnim trafikom // Vestnik RUDN. «Matematika. Informatika. Fizika». — 2008. — No 3. — S. 58–66.]
4. Клапоуцак С. Н. Математические модели сетей соты связи с эластичным трафиком и пороговой стратегией доступа. — 2010. [Klapouthak S. N. Matematicheskie modeli seteyj sotih svyazi s ehlastichnim trafikom i porogovoy strategiej dostupa. — 2010.]
5. Башарин Г. П., Коннон А. М. Математическая модель многоскоростного

- ВРР трафика с учетом приоритетов // Вестник РУДН. «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — С. 82–90. [Basharin G. P., Konnon A. M. Matematicheskaya modelj mnogoskorostnogo ВРР trafika s uchetom prioritetov // Vestnik RUDN. «Matematika. Informatika. Fizika». — 2011. — S. 82–90. ]
6. *Glabowski M., Sobieraj M.* Point-to-Group Blocking Probability in Switching Networks with Threshold Mechanisms // Proc. of Fifth Advanced International Conference of Telecommunications (AICT '09). — Venice: 2009. — Pp. 95–100.
7. *Гринфилд Д.* Оптические сети. — Киев: «ДиаСофт», 2002. — С. 256. [Greenfield D. Opticheskie seti. — Kiev: «DiaSoft», 2002. — 256 p. ]

UDC 621.39

## Streaming and Elastic Traffic in Closs Networks

G. P. Basharin, N. V. Russina

*Telecommunication Systems Department  
Peoples' Friendship University of Russia  
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198*

Rapid progress in telecommunications which started in the end of 20th century raises new teletraffic problems. The result of the convergence of different networks stems that set of different traffic types should be served by the system. These types differ by their characteristics, in network bandwidth and Quality of Service (QoS) requirements. Diverse consumer needs, variety of on-line services and high-speed Internet access joined in the same system generate large amount of traffic most part of which includes elastic traffic. Multi-rate communication systems, developed at the beginning of 21th century as a result of engineering progress, are able to serve elastic traffic with variable rate depending on the number of prioritized streaming requests being processed in parallel. Specific characteristics of elastic traffic do not allow us to use Erlang multi-rate loss model for simulation of modern telecommunication systems. This paper concerns Erlang-like multi-service loss model of an adaptive multi-rate system for streaming and elastic traffic, where a set of bandwidth requirements corresponds to each type of elastic traffic. A bandwidth requirement is assigned to an entered elastic request depending on occupied bandwidth. The results obtained in the paper are applied to calculation of QoS parameters of the Closs network topology which is widely used in modern switching networks.

**Key words and phrases:** Erlang multi-rate loss model, elastic traffic, streaming (real-time) traffic, threshold admission control, blocking probability, network performance, Kaufman-Roberts recursion.