

УДК 51-77

**Фрактальная модель роста народонаселения****А. Н. Кудинов, О. И. Сажина,  
В. П. Цветков, И. В. Цветков***Лаборатория математического моделирования  
Тверской государственной университет  
ул. Желябова, 33, г. Тверь, Россия 170100*

В работе построена фрактальная модель роста народонаселения. В ней средняя скорость роста народонаселения на отдельных участках динамики кривой народонаселения является функцией фрактальной размерности участков  $D$  и определяется кубическим уравнением. Анализ данных проведён с 1950 года по настоящее время. Они явно указывают на выделение трёх периодов длительностью 12, 20 и 27 лет соответственно. Прогноз, в рамках нашей модели, показывает, что тренд роста народонаселения пересечёт линию в 7 млрд. человек в июле 2011 года, 8 млрд. человечество достигнет в 2024 году, и 2030 году — 8,5 млрд. человек.

**Ключевые слова:** фрактальный анализ, математическая модель, демография, прогноз численности населения.

**1. Введение**

В настоящее время численность населения Земли составляет 6,8 млрд. человек. Скорость роста народонаселения является одним из важнейших количественных показателей, характеризующих качество условий проживания человечества на Земле. Так, в 20 веке количество людей выросло в четыре раза. Причём в городах живёт 47% населения, а в деревнях — 53%. По многим прогнозам ожидается, что примерно в 2030 г. численность населения Земли достигнет 8 млрд. В первую очередь рост народонаселения прогнозируется в городах.

Необходимо отметить и явление старения населения Земли. Быстрее всего увеличивается численность людей старше 80 лет. По проведённым оценкам ООН, в настоящее время ежегодно численность населения увеличивается на 1,2 %. На развивающиеся страны приходится 97 % роста. Лидерами прироста являются Индия, Китай, Пакистан, Нигерия, Бангладеш, Индонезия. Из развитых стран высокий уровень рождаемости сохраняется лишь в США. Эта страна занимает 7-е место в мире по темпам прироста численности населения. Иммигранты обеспечивают 80% этого роста. В Европе численность населения сокращается, несмотря на существенную иммиграцию. В ряде работ [1–3] рассматривается вероятность того, что «пик» (численности человечества) будет достигнут уже при жизни нынешнего поколения, после чего начнётся неуклонное её снижение. Такой возможный ход истории получил отражение в изданиях ООН, отличающихся взвешенным подходом. Так, в прогнозе комитета ООН по народонаселению «The 1996 Revision» наряду с «высшим» и «средним» присутствует и «низкий» вариант, согласно которому уже после 2040 г. при «нормальном» развитии событий, исключая войну, голод и крупные эпидемии, рост численности прекратится, после чего начнётся депопуляция мира. По этому сценарию народонаселение в 2040 году будет составлять 7,7 млрд. человек. Но уже за период с 2040 по 2050 гг. человечество сократится на 8 млн. человек. Далее оно будет сокращаться на 25% с каждым поколением.

Многообразие сценариев динамики народонаселения, опирающихся на различные механизмы, влияющие на демографические процессы, ставит вопрос о построении модели роста народонаселения, описывающей этот процесс и независимой от всевозможных допущений и предположений.

В данной работе мы предлагаем такую модель, которая основана на фрактальном подходе. Эта модель представляется более надёжной по сравнению с другими. Она мало зависит от деталей функционирования рассматриваемой системы, устройство которой и численные параметры её нам недостаточно известны.

## 2. Основные уравнения модели

Численность народонаселения будем измерять в млрд. человек, а время — в годах. Скорость роста народонаселения обозначим через  $X$ , она измеряется в млрд. чел./год.

Будем предполагать, что динамика народонаселения описывается мультифрактальной кривой. Это означает, что весь промежуток времени наблюдения можно разбить на промежутки, на каждом из которых она имеет определённое значение фрактальной размерности  $D$ . На этих участках скорость роста народонаселения  $X$  (тангенс угла наклона линейного тренда) согласно нашей модели [4] является функцией  $D$ , которая является решением кубического уравнения:

$$A(D)X + B_k X^3 = \eta. \tag{1}$$

Для функции  $A(D)$ , в отличии от [4], мы выбираем несколько другое аналитическое представление:

$$A(D) = \frac{1}{D_0 - D} \text{ при } 1 \leq D \leq D_0; \quad A(D) = \frac{1}{D_0 - D_k} \frac{D - D_k}{D_0 - D} \text{ при } D_0 \leq D \leq 2.$$

Параметры модели  $D_0$ ,  $D_k$ ,  $B_k$  и  $\eta$  выбираются из наилучшего согласия с опытными данными. В случае  $|D - D_k| \gg \eta^{\frac{2}{3}}$  членом с  $B_k$  можно пренебречь и справедливо линейное приближение:

$$X = \eta(D_0 - D). \tag{2}$$

Уравнение (1) можно упростить заменой  $X = \left(\frac{\eta}{B_k}\right)^{\frac{1}{3}} \xi(D)$ :

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda, \quad \lambda = -\frac{(D - D_k)}{(D_0 - D_k) B_k^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} (D_0 - D)}. \tag{3}$$

График зависимости  $\xi(D)$  приведён на рис. 1 и 2 для  $D_0 = 1,61$ ,  $D_k = 1,86$ ,  $B_k = \mp 0,4$ ,  $\eta = 0,25$ .

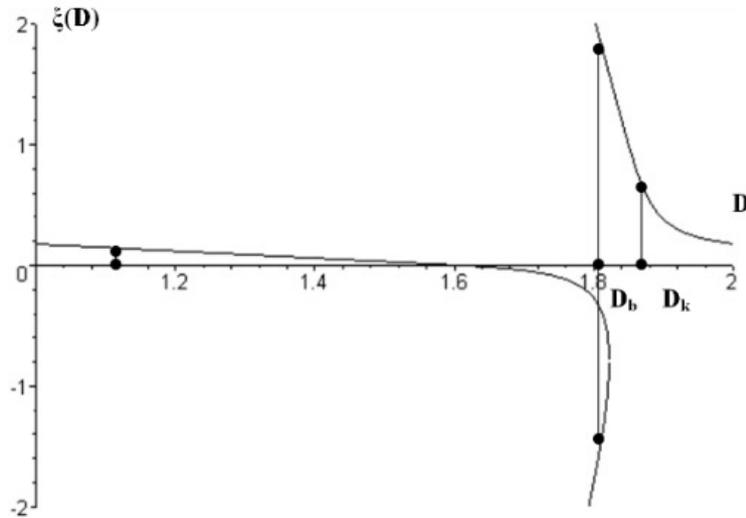


Рис. 1. График зависимости  $\xi(D)$  при  $B_k = 0,4$

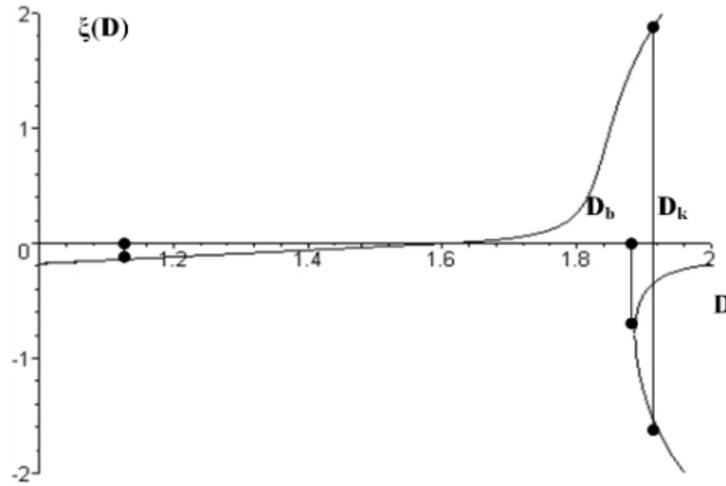


Рис. 2. График зависимости  $\xi(D)$  при  $B_k = -0,4$

Из рис. 1 и 2 следует наличие в данной модели трёх характерных точек  $D_0$ ,  $D_k$ ,  $D_b$ . В точке  $D_0$   $\xi(D_0) = 0$  и  $X(D_0) = 0$ . В этой точке скорость роста равна нулю и мы имеем статистическую ситуацию. Численность народонаселения для этого значения  $D$  стабилизируется и равна константе. При небольшом превышении  $D$  над величиной  $D_0$  значение  $X$  будет отрицательно и численность народонаселения линейно начинает сокращаться.

Критическая точка  $D_k$  соответствует условию  $A(D_k) = 0$  и становится определяющей нелинейная зависимость  $X$  от  $D$ . В точке  $D_k$   $X_k = \sqrt[3]{\eta/B_k}$  при  $B_k > 0$ ,  $X_k > 0$  и  $B_k < 0$ ,  $X_k < 0$ . Это значит, что в критической точке в первом случае имеет место рост народонаселения, а во втором случае — его убывание. При достаточно малых  $B_k$   $|X_k| > 1$  и возникает или быстрый рост, или быстрое убывание народонаселения в этой точке.

Точка бифуркации  $D_b$  находится из условия:

$$\lambda_b = -\frac{(D_b - D_k)}{(D_0 - D_k)(D_0 - D_b) B_k^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}. \quad (4)$$

Отсюда следует значение  $D_b$ :

$$D_b = -\frac{D_k + \sqrt[3]{\frac{27}{4}} D_0 (-D_0 + D_k) B_k^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{27}{4}} (-D_0 + D_k) B_k^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}, \quad (5)$$

и сдвиг точки бифуркации от критической точки  $D_k$  при  $B_k > 0$  происходит влево, а при  $B_k < 0$  — вправо. В точке  $D_b$  имеются два вещественных корня  $\xi_{1b} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ ,  $\xi_{2b} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ , которые имеют разные знаки. Если  $B_k > 0$ , то  $X_{1b} = -\frac{1}{2} X_{2b}$ .

Таким образом, в точке  $D_b$  может иметь место как рост народонаселения, так и убывание народонаселения. Причём скорость роста в два раза превосходит скорость убывания.

В случае  $B_k < 0$  обратная картина наблюдается.

### 3. Расчёт фрактальной размерности кривой динамики народонаселения

Поскольку ежегодные данные по народонаселению имеются начиная с 1950 года, то мы будем проводить подробный их анализ с 1950 г. по настоящее время — 2009 г. График роста народонаселения за это время представлен на рис. 3.

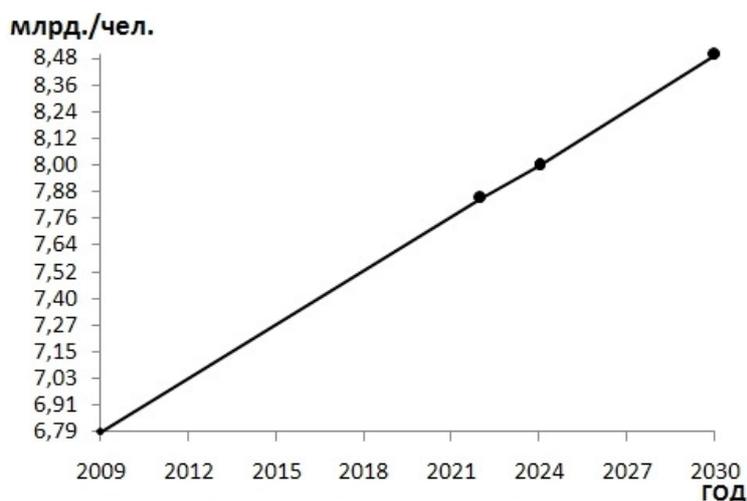


Рис. 3. График роста народонаселения за 1950–2009 г.

Точность приближения  $\Delta_i$  функции численности народонаселения  $\tilde{y}_i(t)$  на участке  $T_i \leq t \leq T_{i+1}$  линейной функции (6) может быть оценена по формуле:

$$\Delta_i = \max_{T_i \leq t \leq T_{i+1}} \left| \frac{\tilde{y}_i}{X_i(t - t_{0i}) + y_{0i}} - 1 \right|. \quad (6)$$

Вычисления дают:  $\Delta_1 = 0,0061$ ,  $\Delta_2 = 0,0024$ ,  $\Delta_3 = 0,0037$ . Тогда общее значение погрешности аппроксимации  $\Delta = \max \Delta_i = 0,0061$ . Это указывает на то, что максимальное относительное отклонение точных значений  $\tilde{y}(t)$  от линейного тренда не превосходит 0,0061.

Как видно из рис. 3, за интересующий нас период времени с 1950 года выделяются три периода. Первый период, длительностью  $T_1 = 12$  лет, второй период, длительностью  $T_2 = 20$  лет, и третий период, длительностью  $T_3 = 27$  лет. На каждом из них численность народонаселения хорошо приближается линейной по времени функцией:

$$y_i(t) = y_i(t_{0i}) + X_i(t - t_{0i}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Значения  $X_i$  соответственно равны:  $X_1 = 49.804$  млрд.чел/год,  $X_2 = 73.614$  млрд.чел/год,  $X_3 = 80.872$  млрд.чел/год.

В силу мелкого масштаба графика ежегодное колебание скорости роста народонаселения визуально незаметно.

Для иллюстрации этого построим график отклонений от линейных трендов (рис. 4).

Величины фрактальной размерности  $D_i$  на выделенных участках вычислялись по следующей методике. Из графика на каждом участке вычитался линейный тренд. В результате получалась кривая с нулевым средним, график которой и дан на рис. 4. Далее находились зависимости длины линии их графиков  $L_i$  от временного масштаба  $\delta = \frac{\Delta t}{year}$ . Мы брали  $\delta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . На участках с

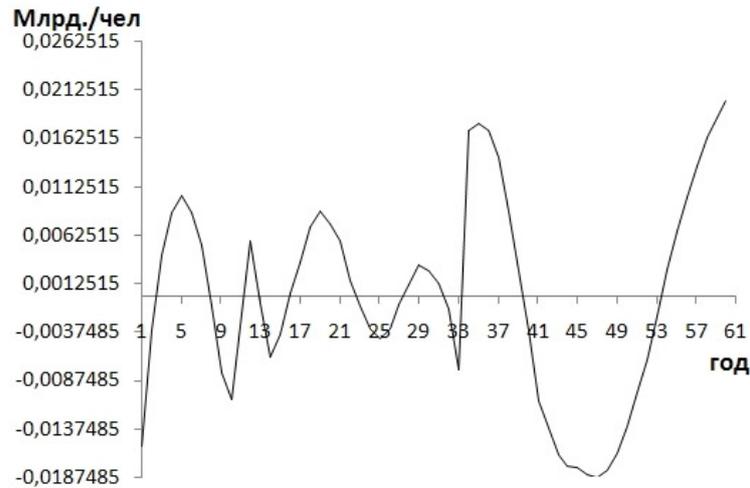


Рис. 4. График уклонений от линейных трендов

постоянным значением  $D_i$  для мультифрактальных кривых имеет место соотношение:

$$\ln\left(\frac{L_i}{L_{0i}}\right) = (1 - D_i) \ln(\delta). \quad (8)$$

С использованием метода наименьших квадратов мы получили:  $D_1 = 1,41$ ;  $D_2 = 1,33$ ,  $D_3 = 1,29$ ,  $\eta = 0,251$ ,  $D_0 = 1,61$ .

#### 4. Анализ результатов и прогноз роста народонаселения

Так как в нашем случае  $D_i < D_0$ , то для расчёта  $X_i$  вполне приемлемо линейное приближение (2). Расчётные значения  $X_i^{(p)}$  соответственно будут равны в млрд.чел/год  $X_1^{(p)} = 0,0498$ ,  $X_2^{(p)} = 0,0736$ ,  $X_3^{(p)} = 0,0808$ . Эти значения отличаются от опытных не более 2%.

Из (2) следует, что максимально возможная скорость роста народонаселения составляет 154 млн. чел. в год при  $D = 1.4$ . Это в 2–3 раза больше скорости роста в настоящее время.

Наблюдается тенденция уменьшения фрактальной размерности кривой народонаселения, и следовательно, увеличение скорости роста народонаселения. Полученные нами значения  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  оказались далеки от значения  $D_0 = 1,61$ , при приближении к которому скорость роста народонаселения становится равной нулю и при превышении которого эта скорость будет становиться отрицательной. Возникает уже состояние убыли народонаселения. Так как  $D_k < D_0$ , то для оценок и построения графиков мы выбрали  $D_k = 1,85$ , а вычисление  $D_b$  по формуле (5) даёт значение  $D_b = 1,78$ . Значения фрактальных размерностей  $D_1$ ;  $D_2$ ;  $D_3$  ещё больше отстоят от критических значений  $D_b$  и  $D_k$ , чем от  $D_0$ .

Проведённый нами анализ указывает на стабильный рост народонаселения. В ближайшее время катастрофических изменений темпа роста народонаселения не ожидается.

Достаточно серьёзной проверкой нашей модели будут результаты прогноза роста народонаселения на её основе.

Чтобы это сделать в рамках нашей модели, нужно иметь сведения о величине фрактальной размерности кривой народонаселения за период после 2009 года. Наблюдаемая ранее тенденция поведения  $D$  такова: за примерно удвоенный

предыдущий период  $D$  уменьшается на величину  $\frac{1}{n} \cdot 0,08$ , где  $n$  — номер периода. Проверка даёт  $D_1 = 1,41$ ,  $D_2 = D_1 - \frac{1}{1} \cdot 0,08 = 1,33$ ,  $D_3 = D_2 - \frac{1}{2} \cdot 0,08 = 1,29$ ,  $D_4 = D_3 - \frac{1}{3} \cdot 0,08 = 1,26$ . По этой схеме четвёртый период должен наступить в 2022 году. До 2022 года мы будем в прогнозах считать  $D = D_3 = 1,29$ , а после 2022 года считать  $D = 1,26$ .

Прогноз роста народонаселения за период с 2009 года по 2012 год, в течение которого оно перешагнёт барьер (7 млрд. человек) представим на рис. 5.

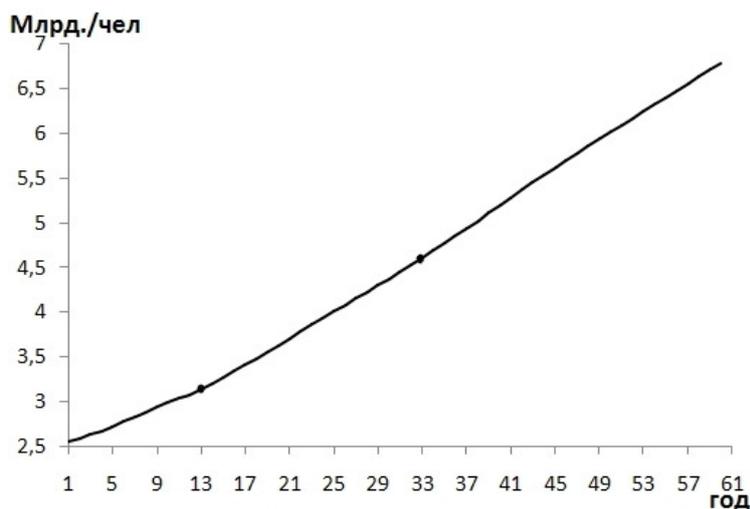


Рис. 5. Прогноз роста народонаселения за период 2009–2012 г.

Из графика на рис. 5 видно, что тренд роста народонаселения пересечёт линию в 7 млрд. человек в июле 2011 года. Близость прогноза и опытных данных несомненно будет показателем качества нашей модели.

Приведём далее прогноз нашей модели до 2030 года, тогда численность народонаселения может достигнуть 8 млрд. человек. Результаты прогноза до 2030 года представим на рис. 6.

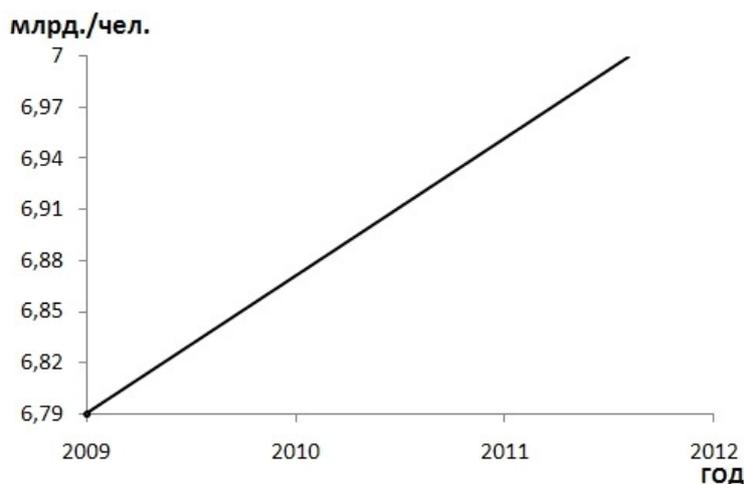


Рис. 6. Результаты прогноза до 2030 г.

Из рис. 6 видно, что 8 миллиардный рубеж человечество может перейти в 2024 году, а к 2030 году достигнуть 8,5 миллиардов человек.

## 5. Заключение

Проведённый в данной работе фрактальный анализ роста народонаселения с 1950 года указывает на хорошее согласие опытных данных и расчётных результатов в рамках построенной в [4, 5] математической модели. Расхождение составило не более 2%. Мы показали, что фрактальная размерность кривой народонаселения непрерывно уменьшается с 1,41 по 1,29 в настоящее время. Это в свою очередь является показателем стабильности данного процесса в течение рассматриваемого промежутка времени. Оснований для ожидания демографического взрыва в ближайшее время нет.

Сравнение результатов прогноза и фактических данных по пересечению 7 и 8 миллиардных рубежей численности народонаселения, а также характер скорости роста народонаселения позволит проверить качество и надёжность построенной нами модели.

## Литература

1. Капица С. П. Сколько людей жило, живет и будет жить на земле. — М., 1999. — 398 с.
2. Капица С. П. Синергетика и прогноз будущего. — М., 1997. — 254 с.
3. Современная демография / под ред. А. Я. Кваша, В. А. Ионцевой. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — 188 с.
4. Бифуркации параметра порядка в задачах астрофизики, физики и экономики / А. Н. Кудинов, С. А. Михеев, В. П. Цветков, И. В. Цветков // Четвертые Курдюмовские юбилейные чтения. Синергетика в естественных науках. — Тверь: Изд-во ТвГУ, 2009. — С. 36–37.
5. Кудинов А. Н., Цветков В. П., Цветков И. В. Валютный кризис и бифуркационные явления в рамках фрактальной модели // Финансы и кредит. — 2009. — № 46(382). — С. 2–6.

UDC 51-77

### Fractal Model of Population Growth

A. N. Kudinov, O. I. Shazina, V. P. Tsvetkov, I. V. Tsvetkov

*Laboratory of mathematical modeling  
Tver State University  
33, Zhelyabova str, Tver, 170100, Russia*

In the study there was developed a fractal model of population growth. In the model the average population growth rate in separate segments of the growth curve dynamics is a function of fractal dimension of segments SDS which is defined as a cubic equation. The data analysis has been performing since 1950 up to now. The data marks three periods in 12, 20, and 27 years in duration. The prognostic within our model shows that a population growth trend will cross the line of 7 bln of people in June, 2011; 8 bln of people there will be in 2024, and 8,5 bln — in 2030.

**Key words and phrases:** fractal analysis, mathematical model, demography, population forecast.