УДК 532.5

Исследование непотенциального течения жидкости в пористой среде с учётом нелинейного закона Дарси и переменного коэффициента диффузии

Ю. П. Рыбаков, О. Д. Свиридова, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе исследуется непотенциальное течение несжимаемой жидкости в пористой среде с учётом нелинейного закона Дарси и переменного коэффициента поперечной диффузии. Течение предполагается аксиально симметричным и стационарным, при этом скорость имеет две компоненты: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$. Рассматривается течение, при котором компоненты скорости допускают представление в виде: $v_z = v_0 + \xi(r,z)$, $|\xi| \ll v_0, v_r \ll v_0, v_0 = \mathrm{const}$. Комбинация уравнений Эйлера приводит к уравнению второго порядка, а уравнение непрерывности к уравнению первого порядка для $\xi(r,z)$ и $v_r(r,z)$. Полученные уравнения являются линейными дифференциальными уравнениями, решение которых можно искать в разделённых переменных, полагая $v_r(r,z) = P(r)Q(z)$, $\xi = M(r)N(z)$. Для $M(r)$ получено уравнение Бесселя нулевого порядка, имеющее решение вида $M(r) = -J_0(\sqrt{\lambda}r)$, $\lambda = \mathrm{const}$. Из связи $M(r)$ и $P(r)$ получено $P(r)$: $P(r) = \frac{1}{\sigma}M^{'} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}J_1(\sqrt{\lambda}r)$, $\sigma = \mathrm{const}$. Система уравнений для $Q(z)$ и $N(z)$ сводится к одному уравнению третьего порядка для $N(z)$. Получены точные решения этого уравнения при постоянном коэффициенте диффузии $D(z) = D_0 = \mathrm{const}$ и при $D(z) = \Phi_0 e^{\gamma z} ch\sqrt{\frac{B\gamma}{A}}z + \Phi_1$, где Φ_0, Φ_1, γ, B, $A = \mathrm{const}$. Подробно рассмотрен особый случай, когда постоянные, входящие в уравнение, связанны соотношением: $\alpha_0 = 2\varepsilon_0 v_0 \rho g/(1+\varepsilon_0 v_0^2)$. В этом случае для функции $N(z)$ получается уравнение второго порядка. Получены точные решения этого уравнения при трёх видах коэффициентов диффузии: $D(z) = 0$, $D(z) = D_0$, $D(z) = D_0 e^{-\gamma z}$, $D_0 = \mathrm{const}$, $\gamma = \mathrm{const}$.

Установлено, что во всех решениях компонента скорости $v_z(r,z)$ экспоненциально убывает с возрастанием z.

Ключевые слова: непотенциальное течение, стационарное течение, пористая среда, диффузия, закон Дарси.

Система уравнений гидродинамики для стационарного течения жидкости в поле тяжести имеет вид

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})v = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} - \vec{f}_D, \tag{1}$$

$$div\vec{j} = 0, \tag{2}$$

где $\vec{v}$ — скорость течения жидкости, ρ — плотность жидкости, P — давление, $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести, а $\vec{f_D}$ — сила Дарси, имеющая вид [1]:

$$\vec{f_D} = -[\alpha_0 - \varepsilon_0(\vec{v}\vec{\nabla}P)]\vec{v}. \tag{3}$$

В (3) α и ε_0 — постоянные коэффициенты, входящие в выражение для силы Дарси. Течение жидкости рассматривается в трубе радиуса r_0, предполагается, что плотность жидкости постоянна, $\rho = \mathrm{const}$, P и $\vec{v}$ зависят от радиальной r и продольной z цилиндрических координат и не зависят от угловой координаты φ.

В уравнении (2) вектор плотности потока жидкости $\vec{j}$ имеет компоненты в цилиндрических координатах [2]:

$$j_r = \rho(v_r - D(z)\partial_r v_z), \quad j_z = \rho v_z. \tag{4}$$

Статья поступила в редакцию 19 июня 2014 г.

При этом считаем, что в силу аксиальной симметрии течения существуют две компоненты скорости: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$.

Запишем в явном виде уравнение Эйлера:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla}P) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} - [\alpha_0 - \varepsilon_0(\vec{v}\vec{\nabla}P)\vec{v}]. \tag{5}$$

Используя тождество

$$\nabla\frac{v^2}{2} = [\vec{v}, rot\vec{v}] + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}, \tag{6}$$

перепишем (5) в виде:

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \rho\vec{\nabla}\frac{v^2}{2} - \rho[\vec{v}, rot\vec{v}] = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} - [\alpha_0 - \varepsilon_0(\vec{v}\vec{\nabla}P)]\vec{v}. \tag{7}$$

Умножим равенство (7) скалярно на $\vec{v}$ и получим уравнение

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\frac{v^2}{2} = -(\vec{v}\vec{\nabla}P) + \rho(\vec{g}\vec{v}) - \alpha_0 v^2 + \varepsilon_0 v^2(\vec{v}\vec{\nabla}P). \tag{8}$$

Из (8) получаем следующее уравнение:

$$(\vec{v}\vec{\nabla}P)\left(1 - \varepsilon_0 v^2\right) = \rho(\vec{g}\vec{v}) - \alpha_0 v^2 - \rho(\vec{v}\vec{\nabla})\frac{v^2}{2}, \tag{9}$$

$$(\vec{v}\vec{\nabla}P) = \left[\rho(\vec{g}\vec{v}) - \alpha_0 v^2 - \rho(\vec{v}\vec{\nabla})\frac{v^2}{2}\right] / (1 - \varepsilon_0 v^2).$$

Подставляем $(\vec{v}\vec{\nabla}P)$ из (9) в (5) и получаем уравнение

$$\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \frac{\vec{v}\left[-\alpha_0 + \varepsilon_0\rho(\vec{g}\vec{v}) - \varepsilon_0\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\frac{v^2}{2}\right]}{1 - \varepsilon_0 v^2}. \tag{10}$$

Запишем уравнение (10) в цилиндрических координатах для компонент v_r и v_z [3]:

$$\rho(v_r\partial_r + v_z\partial_z)v_r = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v_r}{(1 - \varepsilon_0 v^2)}\left[-\alpha_0 + \varepsilon_0\rho g v_z - \varepsilon_0\rho\left(v_r\partial_r + v_z\partial_z\right)\frac{v^2}{2}\right], \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\rho(v_r\partial_r + v_z\partial_z)v_z &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g + \frac{v_z}{(1 - \varepsilon_0 v^2)}\left[-\alpha_0 + \varepsilon_0\rho g v_z - \varepsilon_0\rho\left(v_r\partial_r + v_z\partial_z\right)\frac{v^2}{2}\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Продифференцируем уравнение (11) по z, а уравнение (12) по r и запишем их разность с учётом того, что $\dfrac{\partial^2 P}{\partial z\partial r} \equiv \dfrac{\partial^2 P}{\partial r\partial z}$:

$$\begin{aligned}&\rho\partial_z\left[(v_r\partial_r + v_z\partial_z)v_r\right] - \rho\partial_r\left[(v_r\partial_r + v_z\partial_z)v_z\right] = \\ &\quad = \partial_z\left\{v_r\left[-\alpha_0 + \varepsilon_0\rho g v_z - \varepsilon_0\rho\left(v_r\partial_r + v_z\partial_z\right)\frac{v^2}{2}\right] / \left(1 - \varepsilon_0 v^2\right)\right\} -\end{aligned}$$

$$- \partial_r \left\{ v_z \left[-\alpha_0 + \varepsilon_0 \rho g v_z - \varepsilon_0 \rho \left(v_r \partial_r + v_z \partial_z \right) \frac{v^2}{2} \right] / \left(1 - \varepsilon_0 v^2 \right) \right\}. \quad (13)$$

Будем рассматривать течение жидкости, при котором компоненты скорости v_r и v_z можно представить в виде:

$$v_z = v_0 + \xi(r, z), \quad |\xi| \ll v_0, \quad v_r \ll v_0, \quad v_0 = \text{const}, \quad (14)$$

$$v^2 = (v_0 + \xi)^2 = v_0^2 + 2v_0\xi.$$

С учётом (14) функцию $(1 - \varepsilon_0 v^2)^{-1}$ можно представить в виде:

$$(1 - \varepsilon_0 v^2)^{-1} \approx (1 - \varepsilon_0 v_0^2 - 2\varepsilon_0 v_0 \xi)^{-1} = (1 - \varepsilon_0 v_0^2)^{-1} \left[1 - \frac{2\varepsilon_0 v_0 \xi}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} \right]^{-1} \approx$$

$$\approx (1 - \varepsilon_0 v_0^2)^{-1} \left(1 + \frac{2\varepsilon_0 v_0 \xi}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} \right). \quad (15)$$

Подставляем v_z и v_r из (14) в (13) и получаем уравнение:

$$\rho v_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r + \frac{\alpha_0 - \varepsilon_0 \rho g v_0}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} \frac{\partial}{\partial z} v_r =$$

$$= \frac{\rho v_0}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \xi + \frac{[\alpha_0 (1 + \varepsilon_0 v_0^2) - 2\varepsilon_0 \rho g v_0]}{(1 - \varepsilon_0 v_0^2)^2} \frac{\partial}{\partial r} \xi, \quad 1 - \varepsilon_0 v_0^2 \neq 0. \quad (16)$$

Запишем в явном виде уравнение непрерывности (2) с учётом (4):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(v_r - D(z) \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0. \quad (17)$$

В (17) $D(z)$ — коэффициент поперечной диффузии. Подставляем в (17) v_r и v_z из (14) и получаем уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(v_r - D(z) \frac{\partial}{\partial r} \xi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \xi = 0. \quad (18)$$

Уравнения (16) и (18) являются линейными дифференциальными уравнениями, допускающими решение в разделённых переменных. Будем искать решение уравнений (16) и (18) в виде:

$$v_r = P(r) Q(z), \quad \xi = M(r) N(z). \quad (19)$$

С учётом (19) уравнения (16) и (18) запишутся так:

$$\rho v_0 P(r) Q''(z) + \frac{\alpha_0 - \varepsilon_0 \rho g v_0}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} P(r) Q'(z) =$$

$$= \frac{\rho v_0}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} M'(r) N'(z) + \frac{[\alpha_0 (1 + \varepsilon_0 v_0^2) - 2\varepsilon_0 \rho g v_0]}{(1 - \varepsilon_0 v_0^2)^2} M'(r) N(z). \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r P(r)] Q(z) - D(z) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r M'(r)] N(z) + M(r) N'(z) = 0. \quad (21)$$

Уравнения (20)–(21) представляют собой систему двух уравнений на четыре функции $P(r)$, $Q(z)$, $M(r)$, $N(z)$. Следовательно, существует некоторая свобода их выбора.

Предположим, что

$$M'(r) = \sigma P(r), \quad \sigma = \text{const}. \tag{22}$$

С учётом (22) уравнение (21) можно представить в виде:

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rM'(r)]}{\sigma}[Q(z) - D(z)\sigma N(z)] + M(r)N'(z) = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) представим в виде:

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rM'(r)]}{M(r)} = -\frac{\sigma N'(z)}{Q(z) - D(z)\sigma N(z)} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const}. \tag{24}$$

Из (24) получаем два уравнения:

$$r^2 M''(r) + rM'(r) + \lambda r^2 M(r) = 0, \tag{25}$$

$$\lambda Q(z) - \lambda D(z)\sigma N(z) - \sigma N'(z) = 0. \tag{26}$$

Уравнение (25) является уравнением Бесселя нулевого порядка и имеет убывающее решение вида

$$M(r) = -J_0(\sqrt{\lambda} r). \tag{27}$$

Из (22) находим $P(r)$:

$$P(r) = \frac{1}{\sigma}M'(r) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}J_1(\sqrt{\lambda} r). \tag{28}$$

Граничные условия на поверхности трубы $r = r_0$:

$$v_r(r_0) = 0, \quad P(r_0) = 0. \tag{29}$$

Функция $J_1(x)$ имеет первый нуль при $x = 0$, второй нуль при $x \approx 3,83$. Отсюда получаем конкретное значение: $\sqrt{\lambda} a \approx 3,83$, $\sqrt{\lambda} = 3,83/a$.

С учётом (22) уравнение (20) запишется так:

$$AQ''(z) + BQ'(z) = \sigma C N'(z) + \sigma \Gamma N(z), \tag{30}$$

где

$$A = \rho v_0, \quad B = \frac{\alpha_0 - \varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 - \varepsilon_0 v_0^2}, \quad C = \frac{\rho v_0}{1 - \epsilon_0 v_0^2}, \quad \Gamma = \frac{\alpha_0(1 + \varepsilon_0 v_0^2) - 2\varepsilon_0 v_0 \rho g}{(1 - \varepsilon_0 v_0^2)^2}.$$

Для определения $Q(z)$ и $N(z)$ имеем два уравнения (26) и (30). Представим их таким образом:

$$Q(z) = \sigma D(z) N(z) + \frac{\sigma}{\lambda} N'(z), \tag{31}$$

$$Q''(z) + \frac{B}{A}Q'(z) = \frac{\sigma C}{A}N'(z) + \frac{\sigma \Gamma}{A}N(z). \tag{32}$$

В общем случае система уравнений (31), (32) сводится к одному уравнению третьего порядка для $N(z)$:

$$N''' + N''\left(\lambda D + \frac{B}{A}\right) + N^{'}\left(2\lambda D' + \frac{\lambda B}{A}D - \frac{\lambda C}{A}\right) + N\left(\lambda D'' - \frac{\lambda\Gamma}{A}\right) = 0. \quad (33)$$

При $D(z) = D_0 = \text{const}$ получаем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$N''' + N''\left(\lambda D_0 + \frac{B}{A}\right) + N'\left(\frac{\lambda B}{A}D_0 - \frac{\lambda C}{A}\right) + N\frac{\lambda\Gamma}{A} = 0. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) ищем в виде

$$N = N_0 e^{\alpha z}, \quad N_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}. \quad (35)$$

Подставляем (35) в (34) и получаем уравнение для определения α:

$$\alpha^3 + r\alpha^2 + S\alpha + t = 0, \quad (36)$$

где $r = \lambda D_0 + \dfrac{B}{A}$, $S = \dfrac{\lambda B}{A}D_0 - \dfrac{\lambda C}{A}$, $t = -\dfrac{\lambda\Gamma}{A}$.

При переходе к новой переменной $\alpha = \eta - \dfrac{r}{3}$ получаем уравнение для η:

$$\eta^3 + p\eta + q = 0, \quad (37)$$

где $p = \dfrac{3S - r^2}{3}$, $q = \dfrac{2r^3}{27} - \dfrac{rS}{3} + t$.

Простейшее решение уравнения (37) получаем при $p = q = 0$. При этом $\eta = 0$ и

$$\alpha = -\frac{1}{3}r = -\frac{1}{3}\left(\lambda D_0 + \frac{B}{A}\right). \quad (38)$$

Полученное решение имеет вид:

$$N = N_0 e^{-\frac{1}{3}\left(\lambda D_0 + \frac{B}{A}\right)z}. \quad (39)$$

Получили быстро убывающую с ростом z функцию.

В общем случае в уравнении (33) коэффициент диффузии выбираем в виде:

$$D(z) = \frac{1}{\gamma(\gamma - \frac{B}{A})}\left(\Phi_0 e^{\gamma z} ch\sqrt{\frac{B\gamma}{A}}z + \frac{\gamma^3}{\lambda} - \frac{\gamma^2 B}{\lambda A} - \frac{\gamma C}{A} + \frac{\Gamma}{A}\right), \quad (40)$$

где γ — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию: $\gamma > B/A$. При этом

$$D(0) = \frac{1}{\gamma(\gamma - \frac{B}{A})}\left(\Phi_0 + \frac{\gamma^3}{\lambda} - \frac{\gamma^2 B}{\lambda A} - \frac{\gamma C}{A} + \frac{\Gamma}{A}\right) \geqslant 0.$$

В этом случае решение уравнения (33) имеет вид: $N = N_0 e^{-\gamma z}$, $N_0 = \text{const}$.

Рассмотрим специальный случай, когда в (32) $\Gamma = 0$ и система уравнений (31)–(32) сводится к уравнению второго порядка для $N(z)$. При $\Gamma = 0$ из (32) имеем:

$$Q'(z) + \frac{B}{A}Q(z) = \frac{\sigma C}{A}N(z). \quad (41)$$

Из (31) имеем:

$$Q'(z) = \sigma D'(z)N(z) + \sigma D(z)N'(z) + \frac{\sigma}{\lambda}N''. \qquad (42)$$

При подстановке $Q^{'}(z)$ из (42) в (41) получаем уравнение для $N(z)$:

$$N'' + N'\left(D(z)\lambda + \frac{B}{A}\right) + N\left(D'(z)\lambda + \frac{B}{A}D(z)\lambda - \frac{C\lambda}{A}\right) = 0. \qquad (43)$$

Из условия $\Gamma = 0$ следует связь между постоянными, входящими в уравнение:

$$\alpha_0 = \frac{2\varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 + \varepsilon_0 v_0^2}. \qquad (44)$$

На четыре произвольных параметра α_0, ε_0, v_0, ρ одна связь, при этом три параметра свободные. При выполнении (44) имеем:

$$B = \frac{\varepsilon_0 v_0 \rho g}{1 + \varepsilon_0 v_0^2}, \quad \frac{B}{A} = \frac{\varepsilon_0 g}{1 + \varepsilon_0 v_0^2} = a, \quad \frac{\lambda C}{A} = \frac{\lambda}{1 - \varepsilon_0 v_0^2} = b. \qquad (45)$$

Запишем уравнение (43) с учётом (45):

$$N'' + (\lambda D(z) + a)N' + (\lambda D'(z) + a\lambda D(z) - b)N = 0. \qquad (46)$$

Рассмотрим частные случаи выбора коэффициента диффузии $D(z)$.

1. $D(z) = 0$.

Из (43) получаем уравнение:

$$N'' + aN' - bN = 0. \qquad (47)$$

Решение уравнения (47) ищем в виде

$$N(z) = N_0 e^{\gamma z}, \quad \gamma = \text{const}, \quad N_0 = \text{const}. \qquad (48)$$

Для γ из (47) получаем уравнение $\gamma^2 + a\gamma - b = 0$ и его решение:

$$\gamma_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}, \quad \gamma_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Если $\varepsilon_0 v_0^2 > 1$ и $b < 0$, решение уравнения (47) запишется так:

$$N(z) = C_1 e^{\gamma_1 z} + C_2 e^{\gamma_2 z}, \quad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Если $\varepsilon_0 v_0^2 < 1$ и $b > 1$, то

$$N(z) = Ce^{\gamma_2 z}, \quad C = \text{const}.$$

Решение — убывающая функция с ростом z.

2. $D(z) = D_0 = \text{const}$.

Из (43) получаем уравнение:

$$N'' + (\lambda D_0 + a)N' + (aD_0\lambda - b)N = 0. \qquad (49)$$

Решение уравнения (49) ищем в виде (48). Для γ из (49) получаем уравнение

$$\gamma^2 + R_1\gamma + R_2 = 0, \quad R_1 = \gamma D_0 + a, \quad R_2 = aD_0\lambda - b,$$

имеющее решение:

$$\gamma_1 = -\frac{R_1}{2} + \sqrt{\frac{R_1^2}{4} - R_2}, \quad \gamma_2 = -\frac{R_1}{2} - \sqrt{\frac{R_1^2}{4} - R_2}.$$

При $R_2 > 0$ $N(z) = C_1 e^{\gamma_1 z} + C_2 e^{\gamma_2 z}$, $C_1, C_2 = \mathrm{const}$. При $R_2 < 0$ $N(z) = C e^{\gamma_2 z}$, $C = \mathrm{const}$.

Полученное решение — убывающая функция z.

3.

$$D(z) = D_0 e^{-\gamma z}, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad D_0 = \mathrm{const}. \tag{50}$$

При подстановке (50) в (46) получаем следующее уравнение для $N(z)$:

$$N'' + (\lambda D_0 e^{-\gamma z} + a)N' + [(a\lambda D_0 - \lambda\gamma D_0)e^{-\gamma z} - b]N = 0. \tag{51}$$

В уравнении (51) перейдём к новой функции от нового аргумента:

$$N(z) = \Psi(\xi), \quad \xi = e^{-\gamma z}. \tag{52}$$

Для Ψ из (51) получаем уравнение:

$$\Psi'' + \Psi' \frac{1}{\xi}\left(\frac{\gamma - a}{\gamma} - \frac{\lambda D_0}{\gamma}\xi\right) + \frac{1}{\xi^2}\Psi\left(\frac{\lambda D_0(a-\gamma)}{\gamma^2}\xi - \frac{b}{\gamma^2}\right) = 0. \tag{53}$$

Введём обозначения:

$$\frac{\gamma - a}{\gamma} = S, \quad \frac{\lambda D_0}{\gamma} = h, \quad \frac{b}{\gamma^2} = t, \quad 1 - \frac{a}{\gamma} = S. \tag{54}$$

В обозначениях (54) уравнение (53) запишется так:

$$\Psi'' + \frac{(S - h\xi)}{\xi}\Psi' - \frac{(hS\xi + t)}{\xi^2}\Psi = 0. \tag{55}$$

Уравнение (55) является уравнением вырожденного гипергеометрического типа и с помощью подстановки $\Psi(\xi) = \varphi(\xi)y(\xi)$ сводится к канонической форме для функции $y(\xi)$ [4]:

$$\xi y''(\xi) + \tau(\xi)y'(\xi) - \alpha y(\xi) = 0, \tag{56}$$

где $\tau(\xi)$ — полином первой степени, $\alpha = \mathrm{const}$. Существует 4 типа уравнений (56), соответствующие различным видам $\varphi(\xi)$, $\tau(\xi)$, α, которые определяют реальные режимы течения жидкости.

Рассмотрим возможные выборы $\varphi(\xi)$ и соответствующие формы уравнения (56).

1. При выборе $\varphi(\xi)$ в виде

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\gamma}+\omega\right)} e^{h\xi}, \tag{57}$$

где a определяется из (45), h — из (54),

$$\omega = \sqrt{\frac{a^2}{\gamma^2} - \frac{4\lambda}{\gamma^2(\varepsilon_0 v_0^2 - 1)}}, \quad \frac{a^2}{\gamma^2} - \frac{4\lambda}{\gamma^2(\varepsilon_0 v_0^2 - 1)} > 0, \quad \varepsilon_0 v_0^2 > 1, \tag{58}$$

получаем убывающую функцию при возрастающем z.

Для $y(\eta)$, $\eta = h\xi$, получаем уравнение:

$$\eta y''(\eta) + (1+\omega+\eta)y'(\eta) + \left(3 - \frac{3a}{2\gamma} + \frac{1}{2}\omega\right) y(\eta) = 0. \tag{59}$$

Уравнение (59) является канонической формой уравнения вырожденного гипергеометрического типа и имеет решение в виде суммы двух линейно независимых вырожденных гипергеометрических функций [4]:

$$y(\eta) = C_1 f(\alpha, \bar{\gamma}, -\eta) + C_2 e^{-\eta} f(\bar{\gamma} - \alpha, \bar{\gamma}, \eta), \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}, \tag{60}$$

где $\bar{\gamma} = 1 + \omega_1$, $-\alpha = 3 - \dfrac{3a}{2\gamma} + \dfrac{1}{2}\omega$.

Кроме решения (60) уравнение (59) имеет частное решение в виде полиномов Ляггера:

$$y_n(\eta) = L_n^{-\omega}(\eta) = B_n \eta^{-\omega} e^{-\eta} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\eta^n}(e^{\eta}\eta^{\omega+n}), \quad B_n = \mathrm{const} \tag{61}$$

с соответствующими собственными значениями

$$-\alpha_n = -n = 3 - \frac{3a}{2\gamma} + \frac{1}{2}\omega. \tag{62}$$

Решение (61) существует только в том случае, когда при $\sqrt{\lambda} = 3,83/r_0$ (r_0 — радиус трубы) и фиксированном значении γ существуют такие ε_0 и v_0, что выполняется равенство (62). Из (62) следует:

$$n + 3 = \frac{1}{2\gamma}\left(3a - \sqrt{a^2 - \frac{4\lambda}{\varepsilon_0 v_0^2 - 1}}\right). \tag{63}$$

В простейшем случае:

$$a^2 = \frac{4\lambda}{\varepsilon_0 v_0^2 - 1}. \tag{64}$$

С учётом (64) из (63) получаем:

$$a = \frac{2}{3}\gamma(n+3). \tag{65}$$

Из (64) следует:

$$\varepsilon_0 v_0^2 = \frac{4\lambda}{a^2} + 1 = \frac{4\lambda}{\left[\frac{2}{3}\gamma(n+3)\right]^2} + 1. \tag{66}$$

Учитывая, что $a = \varepsilon_0 g / \left(1 + \varepsilon_0 v_0^2\right)$, для $\varepsilon_0 g/\gamma$ получаем выражение:

$$\frac{\varepsilon_0 g}{\gamma} = \frac{a}{\gamma}(1 + \varepsilon_0 v_0^2) = \frac{6\lambda}{\gamma^2(n+3)} + \frac{4}{3}(n+3). \tag{67}$$

Выражаем $\varepsilon_0 g/\gamma$ и $\varepsilon_0 v_0^2$ через α, γ и n. Каждому $\varepsilon_0 g/\gamma$ соответствуют свои $\varepsilon_0 v_0^2$ и n.

2. При выборе $\varphi(\xi)$ в виде

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\gamma} - \omega\right)} \tag{68}$$

получаем убывающую функцию при возрастании z.

Для $y(\eta)$ получаем уравнение

$$\eta y''(\eta) + (1-\omega-\eta)y'(\eta) + \left(1 - \frac{3a}{2\gamma} + \frac{1}{2}\omega\right) y(\eta) = 0. \qquad (69)$$

Уравнение (69) является уравнением вырожденного гипергеометрического типа и имеет решение в виде суммы двух линейно независимых вырожденных гипергеометрических функций:

$$y(\eta) = C_1 f(\alpha, \bar{\gamma}, \eta) + C_2 e^{-\eta} f(\bar{\gamma} - \alpha, \bar{\gamma}, -\eta), \qquad (70)$$

где $\bar{\gamma} = 1 - \omega$, $-\alpha = 1 - \dfrac{3a}{\gamma} + \dfrac{1}{2}\omega$.

Уравнение (69) полиномиальных решений не имеет.

3. При выборе $\varphi(\xi)$ в виде

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\gamma} - \omega\right)} e^{h\xi}, \qquad (71)$$

получаем убывающую функцию при возрастании z.

Для $y(\xi)$ получаем уравнение

$$\eta y''(\eta) + (1-\omega+\eta)y'(\eta) + \left(3 - \frac{3a}{2\gamma} - \frac{1}{2}\omega\right) y(\eta) = 0. \qquad (72)$$

Уравнение (72) является уравнением вырожденного гипергеометрического типа и имеет решение в виде суммы двух линейно независимых вырожденных гипергеометрических функций:

$$y(\eta) = C_1 f(\alpha, \bar{\gamma}, \eta) + C_2 e^{\eta} f(\bar{\gamma} - \alpha, \bar{\gamma}, -\eta), \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}, \qquad (73)$$

где $\bar{\gamma} = 1 - \omega$, $-\alpha = 3 - \dfrac{3a}{2\gamma} + \dfrac{1}{2}\omega$.

Кроме того, уравнение (73) имеет частные решения в виде полиномов Ляггера

$$y_n(\eta) = L_n^{\omega}(\eta) = B_n \eta^{\omega} e^{-\eta} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\eta^n} \left(e^{\eta} \eta^{-\omega+n}\right) \qquad (74)$$

с собственными значениями

$$-\alpha_n = -n = 3 - \frac{3a}{2\gamma} - \frac{1}{2}\omega. \qquad (75)$$

Решение (74) существует только в том случае, если при $\sqrt{\lambda} = 3,83/r_0$ и фиксированном значении γ существуют такие ε_0 и v_0, что выполняется равенство (75). Из (75) следует:

$$n + 3 = \frac{3a}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma}\sqrt{a^2 - \frac{4\lambda}{\varepsilon_0 v_0^2 - 1}}. \qquad (76)$$

В частном случае $a^2 = \dfrac{4\lambda}{\varepsilon_0 v_0^2 - 1}$ выражения $\varepsilon_0 v_0^2$ и $\varepsilon_0 g/\gamma$ совпадают со случаем 1.

4. При выборе $\varphi(\xi)$ в виде

$$\varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\gamma} + \omega\right)} \qquad (77)$$

получаем убывающую функцию при возрастании z.

Для $y(\xi)$ получаем уравнение

$$\eta y''(\eta) + (1 + \omega - \eta) y'(\eta) + \left(1 - \frac{3a}{2\gamma} - \frac{1}{2}\omega\right) y(\eta) = 0. \tag{78}$$

Как и в предыдущих случаях уравнение (78) является уравнением вырожденного гипергеометрического типа и имеет решение:

$$y(\eta) = C_1 f(\alpha, \bar{\gamma}, \eta) + C_2 \eta^{1-\gamma} f(\alpha - \bar{\gamma} + 1, 2 - \gamma, \eta), \tag{79}$$

где $\bar{\gamma} = 1 + \omega$, $-\alpha = 1 - \dfrac{3a}{2\gamma} - \dfrac{1}{2}\omega$.

Уравнение (78) полиномиальных решений не имеет.

У всех рассмотренных решений $v_z(r, z)$ убывает с ростом z по экспоненциальному закону.

Литература

1. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. — Москва: Институт компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
2. Течение жидкости в пористой среде и оптимизация параметров фильтров с зернистой загрузкой / Ю. П. Рыбаков, Д. Н. Маслов, Г. Н. Шикин, В. А. Янушкевич // Труды конференции «Инженерные системы». — 2008. — С. 351–354.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — Москва: Наука, 1988.
4. *Никифоров А. Ф., Уваров В. В.* Специальные функции математической физики. — Москва: Наука, 1978.

UDC 532.5

Investigation of Nonpotential Flow of Fluid in Porous Medium Taking into Account of Nonlinear Darcy Law and Variable Diffusion Coefficient

Yu. P. Rybakov, O. D. Sviridova, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198

We have considered the non-potential flow of the incompressible fluid in the porous medium taking into account nonlinear Darcy law and different types of the diffusion coefficient. The flow is supposed to be cylindrically-symmetric and stationary. The velocity has two components: $\vec{v} = (v_r, 0, v_z)$. We have considered the flow when $v_z = v_0 + \xi(r, z), |\xi| \ll v_0, v_r \ll v_0, v_0 =$ const. The combination of the Euler equations reduces to the equation of second order, and continuity equation reduces to an equation of first order for $\xi(r, z)$ and $v_r(r, z)$. These equations are linear differential equations with solutions of the form $v_r(r, z) = P(r)Q(z)$, $\xi = M(r)N(z)$. For $M(r)$ we have obtained the Bessel equation of zero order with solution in the form $M(r) = -J_0(\sqrt{\lambda} r)$, $\lambda =$ const. From the relation between $M(r)$ and $P(r)$ we have obtained $P(r)$: $P(r) = \frac{1}{\sigma} M' = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma} J_1(\sqrt{\lambda} r)$, $\sigma =$ const. The system of equations for $Q(z)$ and $N(z)$ is reduced to one equation of the third order for $N(z)$. We have obtained the exact solution of this equation with fixed diffusion coefficient $D(z) = \Phi_0 e^{\gamma z} ch\sqrt{\frac{B\gamma}{A}} z + \Phi_1$ where Φ_0, Φ_1, γ, B, $A =$ const. A special case when constants in the equation are connected in the relation $\alpha_0 = 2\varepsilon_0 v_0 \rho g (1 + \varepsilon_0 v_0^2)$ is fully considered. In this case for function $N(z)$ we have obtained the equation of second order. Exact solutions of this equation are obtained with three types of diffusion: $D(z) = 0$, $D(z) = D_0$, $D(z) = D_0 e^{-\gamma z}$, $D_0 = \mathrm{const}$, $\gamma = \mathrm{const}$. We have established that for all solutions the component of the velocity $v_z(r, z)$ decreases exponentially with increasing of z.

Key words and phrases: nonpotential flow, porous medium, Darcy law, diffusion coefficient.

References

1. A. E. Sheydegger, Physics of Fluid Flow in Porous Medium, Institute for Computer Research. NIC "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow, 2008, in Russian.
2. Y. P. Rybakov, D. N. Maslov, G. N. Shikin, V. A. Yanushkevich, Fluid Flow in Porous Medium and Optimization of Parameters of Filters with Granular Filling, in: Proceedings "Engineering Systems", 2008, pp. 351–354, in Russian.
3. L. D. Landau, E. M. Liphshyz, Hydrodynamics, Nauka, Moscow, 1988, in Russian.
4. A. F. Nikiforov, V. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1978, in Russian.