



Математическое моделирование

УДК 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215

Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окружённых упругой средой

Ю. А. Блинков*, Е. В. Евдокимова[†], Л. И. Могилевич[†], А. Ю. Ребрина[†]

* Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, Россия, 410012

[†] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, Россия, 410054

На базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, в виде обобщённых уравнений Кортвега–де Вриза (КдВ). Математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью между оболочками, полученные применением метода возмущений по малому параметру задачи, описываются в виде системы обобщённых уравнений КдВ. В представленной статье проведено исследование модели волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость как между ними, так и внутри, и окружённых упругой средой, действующей как в нормальном, так и в продольном направлении. Для рассмотренных систем уравнений с учётом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка–Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки, базис Грёбнера

Введение

Взаимодействие упругих элементов конструкций с жидкостью рассматривалось в разных аспектах. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [1–3], а с учётом вращения жидкости — в [4].

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих тонкостенных конструкциях. Проблема распространения волн в газовой динамике и теории упругих оболочек изучается при помощи линеаризованных уравнений. При этом скорость распространения возмущений считается постоянной и равной скорости распространения звука в невозмущённой среде. Однако ряд явлений, несмотря на малые значения зависимых переменных, целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины зависимых переменных и исследуется на базе нелинейных уравнений. Эти исследования проводятся с помощью методов возмущений, таких как метод сравнимых асимптотических разложений, метод деформируемых координат, метод многомасштабных разложений.

Кроме того, проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках

без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривались в [5, 6] с позиции теории солитонов.

Известны математические модели, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости на волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [7, 8]. При этом найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает.

Решение поставленной в работе задачи для геометрически нелинейных оболочек представляется актуальным и сложным, имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности, карбоновых нанотрубок.

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окружённой упругой средой и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Аналогичная задача без влияния упругой среды была рассмотрена в работе [9]. Показано влияние вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку, окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования на поведение продольных волн деформации в упругой цилиндрической оболочке.

Постановка задачи

Рассмотрим окружённые упругой средой две соосные бесконечно длинные упругие оболочки (см. рис. 1), между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Зазор между оболочками, занимаемый жидкостью δ , радиус срединной поверхности оболочки R ; $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$ — внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$ — внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - h_0^{(2)}/2$ — внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ — их толщины. В дальнейшем, для внешней оболочки будем использовать обозначение сверху индексом $(i) = (1)$, а для внутренней — индексом $(i) = (2)$.

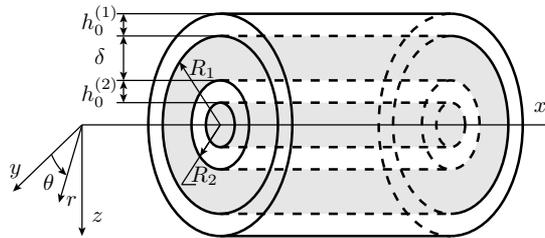


Рис. 1. Бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Лява, рассмотрим материал с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [10]: $\sigma_i = E e_i$, где E — модуль Юнга.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r , Θ , x записываются, в случае осесимметричного течения, в виде [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left[\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right], \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. (1) при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [12]

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь t — время; x, r — цилиндрические координаты; V_x, V_r — проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости жидкости; p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб оболочки, положительный к центру кривизны.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде [13, 14]

$$\begin{aligned} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} - \\ - \left[k_3 R^{(i)2} \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2 R^{(i)2}} U^{(i)3} \right] (2-i) = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \\ \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} W_{xxxx}^{(i)} - \right. \\ \left. - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\}_x - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \right\rangle + \\ + k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2} W^{(i)} (2-i) + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек; μ_0 — коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность; $U^{(i)}, W^{(i)}$ — продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны, x — продольная координата; t — время; q_x^i, q_n — напряжения со стороны жидкости, находящейся между оболочками; \tilde{q}_x, \tilde{q}_n — напряжения со стороны жидкости, заполняющей внутреннюю оболочку; реакция упругой среды в нормальном и продольном направлениях [5, 6, 15–18]:

$$k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2} W^{(1)}, \quad k_3 \frac{R^{(1)2} \rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^4} U^{(1)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2 R^{(1)2}} U^{(1)3};$$

$c_0 = \sqrt{E/(\rho_0(1-\mu_0^2))}$ – скорость распространения продольных волн в оболочке.
Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$q_n = -p + 2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_x = \rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x}\right). \quad (4)$$

Уравнения динамики оболочек

Принимая за характерную длину l – длину волны, перейдём к безразмерным переменным для исследования уравнений (3):

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t, \quad x^* = \frac{x}{l}. \quad (5)$$

Здесь w_m, u_m – характерные значения прогиба W и продольного перемещения U . Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (6)$$

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (7)$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, τ – быстрое время, а ε – малый параметр.

Записываем систему уравнений (3) в безразмерных переменных с использованием формул (5)–(7) и разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (8)$$

Подставим разложение (8) в полученные уравнения из (3) и после некоторых преобразований этих уравнений, аналогичных приведённым в [8, 19], приравняем нулю коэффициенты при ε^0 , получим

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} u_{xi} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0, \quad (9)$$

откуда определяется безразмерная скорость волны $c^2 = 1 - \mu_0^2$.

Из следующего приближения по ε , учитывая (9), находится уравнение, являющееся составным для u_{10} :

$$\begin{aligned} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} + \\ + \frac{2-i}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \left(\mu_0^2 k_1 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2} \varepsilon} u_{10}^3 \right) = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^2 c_0^2} \left(q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

В представлениях (8) взято два первых члена разложения по ε для учёта нелинейности исходной системы уравнений (3), как следует из системы (10).

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (10) обращается в ноль и система распадается на независимые уравнения, каждое из которых имеет своё точное решение. Для определения напряжений, действующих со стороны жидкости, можно воспользоваться результатами работы [9]:

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho \nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)} \right],$$

$$q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i, \quad (11)$$

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[1 - \left(2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$

Подставляя (11) в систему уравнение (10), окончательно получим

$$\begin{aligned} & u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(1)} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[k_1 \mu_0^2 \frac{R^{(1)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(1)} - k_3 \frac{R^{(2)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10}^{(1)} + k_4 \frac{n_m^2}{R^{(1)2} \varepsilon} u_{10}^{(1)3} \right] + \\ & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)} \right] = 0 \\ & u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(2)} + \\ & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)} \right] - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь с принятой точностью $h_0/R \approx O(\varepsilon)$, $\delta/R_2 = \psi \ll 1$, обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, при этом положено $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Легко видеть, что замена $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = \eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$\begin{aligned} c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ c_3 &= \frac{c_2 l \varepsilon^2}{c_1 u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}, \quad \sigma_1 = \frac{c_1}{c_2} \frac{k_1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \mu_0^2 \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{c_1 c_2} \frac{k_2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}, \\ \sigma_4 &= \frac{c_3^2}{c_2 c_1^3} \frac{k_4}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{u_m}{R^2 \varepsilon}, \quad \sigma = \frac{1 - 4\mu_0^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu}}{\rho \nu} \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

позволяет записать систему уравнений (12) в виде

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1 \phi_\eta^{(1)} - \sigma_3 \int \phi^{(1)} d\eta + \sigma_4 \left(\int \phi^{(1)} d\eta \right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = 0, \quad (14)$$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma \phi^{(2)} = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (14)–(15) при отсутствии жидкости распадается на два независимых уравнения. Для $\phi^{(1)}$:

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3 \int \phi^{(1)} d\eta + \sigma_4 \left(\int \phi^{(1)} d\eta \right)^3 = 0$$

с точным решением

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1 \right) t \right] \right\}. \quad (16)$$

Для $\phi^{(2)}$: $\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0$ с точным решением

$$\phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[\eta - \frac{\sigma_3}{\sigma_4} t \right] \right\}, \quad (17)$$

где σ_3/σ_4 — произвольная величина.

Как следует из (16) и (17), скорость солитона $\phi^{(1)}$ больше, чем скорость солитона $\phi^{(2)}$ при одинаковых амплитудах. При наличии жидкости во внутренней оболочке и окружающей упругой среды для внешней оболочки численное исследование системы уравнений (14)–(15) при начальном условии

$$\phi^{(1)}(\eta, 0) = \phi^{(2)}(\eta, 0) = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \eta \right\} \quad (18)$$

позволит оценить их влияние на волновые процессы в соосных оболочках.

Численное моделирование

В статьях [20] подробно рассмотрен процесс дискретизации квазилинейных дифференциальных уравнений эволюционного типа на примере классического уравнения КдВ, численные методы решения которого рассмотрены в [21]. Полученная с помощью данного подхода дискретизация уравнения КдВ имеет точность второго порядка как по пространственному шагу h сетки, так и по временному τ . Поскольку разностная схема неявная, т.е. устойчива при достаточно малом h , то её согласованность и устойчивость приводят к её сходимости [22]. Также строго доказана классическая теорема эквивалентности Лакса для начальной задачи с одним линейным дифференциальным уравнением и обобщениями на нелинейный случай [23].

Существует большое количество методов построения разностных схем для дифференциальных уравнений. Мы будем использовать алгоритм построения конечно-разностной аппроксимации согласно [24].

Запишем систему уравнений (14)–(15) в виде интегралов по контуру

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(1)} - 3\phi^{(1)2} - \sigma_1\phi^{(1)} \right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} (-\sigma_3\Psi + \sigma_4\Psi^3) dt d\eta + \iint_{\Omega} (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) dt d\eta = 0, \quad (19)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(2)} - 3\phi^{(2)2} \right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} (\phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)}) dt d\eta = 0 \quad (20)$$

для $\int \phi^{(1)} d\eta = \Psi$, любой области Ω и любого интервала $a > b$. На разностной сетке сопоставим $u_j^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$, $U_j^n = \Psi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 2.

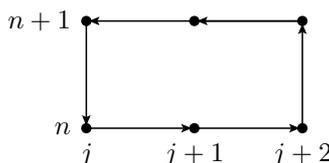


Рис. 2. Базовой контур для уравнений (19)–(20)

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j),$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j), \quad \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u d\eta = U(t, \eta_{j+2}) - U(t, \eta_j).$$
(21)

Применяя для численного интегрирования формулы Ньютона–Котеса и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (19), (20), (21) в виде

$$\begin{aligned} & \left(- \left(u_{\eta\eta}^{(1)n} + u_{\eta\eta}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta}^{(1)n} - u_{\eta\eta}^{(1)n+1} \right) - \right. \\ & \left. - 3 \left(u^{(1)2n}_j + u^{(1)2n+1}_j - u^{(1)2n}_{j+2} - u^{(1)2n+1}_{j+2} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n}_{j+1} \right) \cdot 2h + \\ & + \left(\left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) - \right. \\ & \left. - \sigma_3 \left(U^{n+1}_{j+1} + U^n_{j+1} \right) + \sigma_4 \left(U^{3n+1}_{j+1} + U^{3n}_{j+1} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(- \left(u_{\eta\eta}^{(2)n} + u_{\eta\eta}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta}^{(2)n} - u_{\eta\eta}^{(2)n+1} \right) - \right. \\ & \left. - 3 \left(u^{(2)2n}_j + u^{(2)2n+1}_j - u^{(2)2n}_{j+2} - u^{(2)2n+1}_{j+2} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n}_{j+1} \right) \cdot 2h + \\ & + \left(\left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \sigma \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\left(u_{\eta}^{(i)n}_{j+1} + u_{\eta}^{(i)n}_j \right) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j,$$

$$u_{\eta\eta}^{(i)n}_{j+1} \cdot 2h = u_{\eta}^{(i)n}_{j+2} - u_{\eta}^{(i)n}_j,$$

$$\left(u^{(1)n}_{j+2} + 4u^{(1)n}_{j+1} + u^{(1)n}_j \right) \frac{h}{3} = U^n_{\eta_{j+2}} - U^n_{\eta_j}.$$

Поскольку исходное дифференциальное уравнение (14)–(15) нелинейно, то за счёт выбора допустимого упорядочения в данном случае в базисе Грёбнера [25] лидирующие мономы не будут состоять из нелинейных членов.

В результате получим разностную схему для уравнения (14)–(15)

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)j}_{n+1} - u^{(1)j}_n}{\tau} + 3 \frac{(u^{(1)j+1}_{2n+1} - u^{(1)j-1}_{2n+1}) + (u^{(1)j+1}_{2n} - u^{(1)j-1}_{2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(1)j+2}_{n+1} - 2u^{(1)j+1}_{n+1} + 2u^{(1)j-1}_{n+1} - u^{(1)j-2}_{n+1})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(1)j+2}_n - 2u^{(1)j+1}_n + 2u^{(1)j-1}_n - u^{(1)j-2}_n)}{4h^3} + \\ & + \sigma_1 \frac{(u^{(1)j+1}_{n+1} - u^{(1)j-1}_{n+1}) + (u^{(1)j+1}_n - u^{(1)j-1}_n)}{4h} - \sigma_3 \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + \\ & + \sigma_4 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} + \frac{u^{(1)j}_{n+1} + u^{(1)j}_n}{2} - \frac{u^{(2)j}_{n+1} + u^{(2)j}_n}{2} = 0, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\left(u^{(1)j}_{n+1} + 4u^{(1)j}_n + u^{(1)j-1}_n \right) \frac{h}{3} - (U_{j+1} - U_{j-1}) = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(2)j}_{n+1} - u^{(2)j}_n}{\tau} + 3 \frac{(u^{(2)j+1}_{2n+1} - u^{(2)j-1}_{2n+1}) + (u^{(2)j+1}_{2n} - u^{(2)j-1}_{2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(2)j+2}_{n+1} - 2u^{(2)j+1}_{n+1} + 2u^{(2)j-1}_{n+1} - u^{(2)j-2}_{n+1})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(2)j+2}_n - 2u^{(2)j+1}_n + 2u^{(2)j-1}_n - u^{(2)j-2}_n)}{4h^3} - \\ & + \frac{u^{(2)j}_{n+1} + u^{(2)j}_n}{2} - \frac{u^{(1)j}_{n+1} + u^{(1)j}_n}{2} - \sigma \frac{u^{(2)j}_{n+1} + u^{(2)j}_n}{2} = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Разностная схема (22), (24) подобна схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности.

Реализация разностной схемы (22)–(24) была проведена с использованием программного обеспечения с открытым кодом SciPy и SymPy, построенном для языка программирования Python3.

Полученные неявные разностные схемы нелинейны относительно следующего временного слоя, поэтому для построения решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

На границах вычислительной области использовались условия равенства первых производных $\phi_\eta^{(1)} = \phi_\eta^{(2)} = 0$. Поскольку схема (22)–(24) имеет 5-точечный шаблон по оси η , то на границах использовались по два соотношения, например для левой границы:

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx h^2 \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{-5f(x_i) + 9f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+3})}{6h},$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{11h^2}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{-5f(x_{i+1}) + 8f(x_{i+2}) - 3f(x_{i+3})}{2h}.$$

На рис. 3 и 4 видно влияние окружающей упругой среды на поведение нелинейной волны деформации в системе в зависимости от коэффициента Пуассона μ_0 в (13) в выражении для σ .

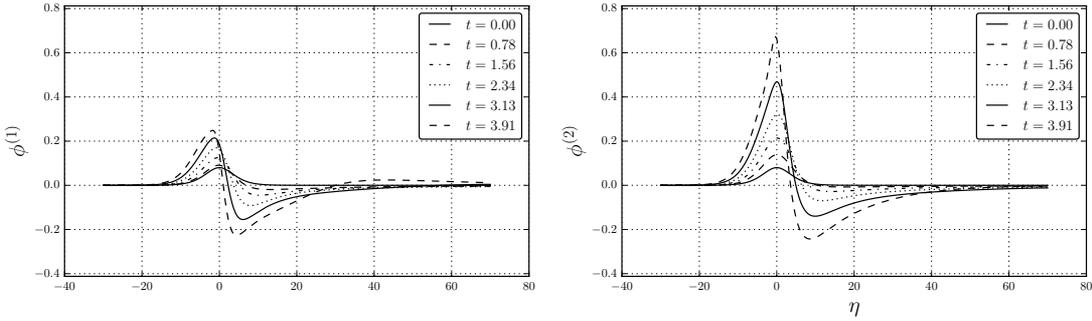


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (14)–(15) при $\sigma_1 = 1$ с начальным условием (18) с $\sigma_3 = 0,004$, $\sigma_4 = 0,1$ и $\sqrt{\sigma_3/\sigma_4} = 0,2$

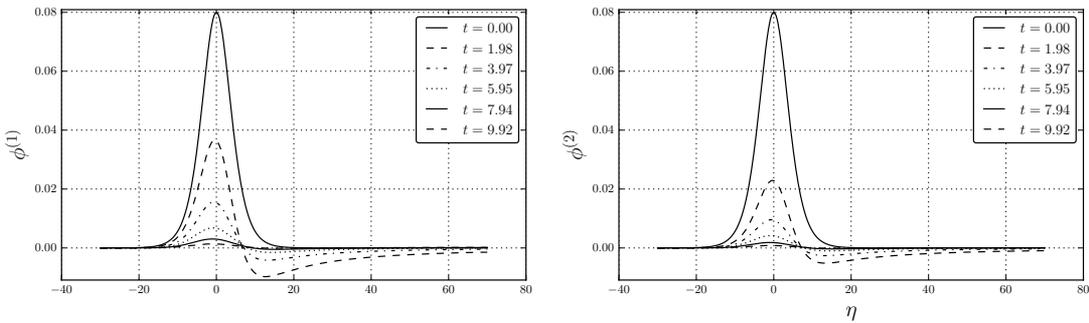


Рис. 4. Графики численного решения уравнений (14)–(15) при $\sigma_1 = -1$ с начальным условием (18) с $\sigma_3 = 0,004$, $\sigma_4 = 0,1$ и $\sqrt{\sigma_3/\sigma_4} = 0,2$

В случае $\mu_0 < 1/2$ (рисунок 3) наблюдается волнообразование и рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более слабом во внешней оболочке в следствии влияния окружающей упругой среды. И наоборот, при $\mu_0 > 1/2$ (рис. 4) наблюдается волнообразование и падение амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном во внешней оболочке.

Заключение

Выполненные вычислительные эксперименты позволили впервые оценить влияние окружающей упругой среды для внешней оболочки на поведение нелинейной волны деформации в системе, когда внутренняя оболочка заполнена вязкой несжимаемой жидкостью.

В результате под влиянием воздействия упругой среды на внешнюю оболочку и наличия жидкости во внутренней оболочке наблюдается в зависимости от коэффициента Пуассона меньший рост или падение амплитуды волны во внешней оболочке по сравнению с внутренней.

Литература

1. *Paidoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K.* A Theoretical Study of the Stability of Cantilevered Coaxial Cylindrical Shells Conveying Fluid // *Journal of Fluids and Structures*. — 1991. — Т. 5, № 2. — С. 127–164. — DOI: 10.1016/0889-9746(91)90454-W.
2. *Amabili M.* Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. — Cambridge University Press, 2008. — С. 374. — DOI: 10.1017/S009780511619694.
3. *Могилевич Л. И., Попов В. С.* Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2004. — № 5. — С. 179–190.
4. *Бочкарёв С. А., Матвеевко В. П.* Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 94–102. — DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12.
5. *Багдоев А. Г., Ерофеев В. И., Шешенин С. Ф.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. — М.: Физматлит, 2009. — С. 318.
6. *Ерофеев В. И., Кажжаев В. В., Павлов И. С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 140–150. — DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17.
7. *Блинков Ю. А., Иванов С. В., Могилевич Л. И.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных волн деформаций в оболочке, содержащей вязкую жидкость // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2012. — Т. 3. — С. 52–60.
8. *Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2013. — Т. 3. — С. 42–51.
9. *Блинков Ю. А., Мезянжин А. В., Могилевич Л. И.* Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // *Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика*. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 19–35. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35.
10. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961. — С. 778.
11. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — С. 840.
12. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: Изд. ЛГУ, 1978. — С. 296.
13. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — С. 432.
14. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
15. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. — С. 490.
16. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно упругом основании / В. И. Ерофеев, В. В. Кажжаев, Е. Е. Лисенкова, Н. П. Семерикова // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. — 2008. — № 3. — С. 30–36.
17. *Михасев Г. И., Шейко А. Н.* О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде. — 2012. — Т. 153. — С. 41–44.

18. Бочкарев А. В., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // *Акустический журнал*. — 2017. — Т. 63, № 2. — С. 145–151.
19. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость / А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, А. Д. Ковалев, Л. И. Могилевич // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика*. — 2012. — Т. 12, № 2. — С. 12–18. — DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
20. Блинков Ю. А., Гердт В. П., Маринов К. Б. Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // *Программирование*. — 2017. — № 2. — С. 28–34.
21. Belashov V. Y., Vladimirov S. V. *Solitary Waves in Dispersive Complex Media: Theory, Simulation, Applications*. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — С. 292.
22. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. — 3-е издание. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — С. 786.
23. Rosinger E. E. *Nonlinear Equivalence, Reduction of PDEs to ODEs and Fast Convergent Numerical Methods*. — London: Pitman, 1983. — С. 439. — DOI: 10.1137/1026088.
24. Gerdt V. P., Blinkov Y. A., Mozhilkin V. V. *Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*. — 2006. — Т. 2. — С. 26. — DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051.
25. Gerdt V. P. *Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems*. — MMCP. Lecture Notes in Computer Science, 2011. — Т. 7125. — С. 28–42.

UDC 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215

Wave Processes Modeling in Two Coaxial Shells Filled with a Viscous Liquid and Surrounded by Elastic Medium

Y. A. Blinkov*, E. V. Evdokimova†, L. I. Mogilevich†, A. Y. Rebrina†

* *Saratov State University*

83, Astrahanskaya str., Saratov, 410012, Russian Federation

† *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov*

77, Politekhnikeskaya str., Saratov, 410054, Russian Federation

The investigation of deformation waves behavior in elastic shells is one of the important trends in the contemporary wave dynamics. There exist mathematical models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid based on the related hydroelasticity problems, which are derived by the shells dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of centralized Korteweg–de Vries (KdV) equations. In addition, mathematical models or the wave process in infinitely long geometrically non-linear coaxial cylindrical elastic shells are obtained by the perturbation method. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding edge conditions in the form of generalized KdV equations system. The paper presents the investigation of wave occurrences in two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells of Kirchhoff–Love type, containing viscous incompressible liquid both in between and inside, and surrounded by an elastic medium, acting in both normal and longitudinal directions. The difference schemes of Crank–Nicholson type are obtained for the considered equations system by taking into account liquid impact and with the help of Gröbner basis construction. To generate these difference schemes, the basic integral difference correlations, approximating initial equations system, were used.

Key words and phrases: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells, Gröbner basis

References

1. M. P. Paidoussis, V. B. Nguyen, A. K. Misra, A Theoretical Study of the Stability of Cantilevered Coaxial Cylindrical Shells Conveying Fluid, *Journal of Fluids and Structures* 5 (2) (1991) 127–164. doi:10.1016/0889-9746(91)90454-W.
2. M. Amabili, *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, Cambridge University Press, 2008. doi:10.1017/CBO9780511619694.
3. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, Dynamics of the Interaction of an Elastic Cylinder with a Layer of a Viscous Incompressible Fluid, *Mechanics of Solids* (5) (2004) 179–190, in Russian.
4. S. A. Bochkarev, V. P. Matveenko, Stability of Coaxial Cylindrical Shells Containing a Rotating Fluid Flow, *Computational Continuum Mechanics* 6 (1) (2013) 94–102, in Russian. doi:10.7242/1999-6691/2013.6.1.12.
5. A. G. Bagdoev, V. I. Erofeev, S. F. Sheshenin, *Linear and Nonlinear Waves in Dispersive Continuous Media*, Fizmatlit, Moscow, 2009, in Russian.
6. V. I. Erofeev, V. V. Kazhaev, I. S. Pavlov, Inelastic Interaction and Splitting of Strain Solitons Propagating in a Granular Medium, *Computational Continuum Mechanics* 6 (2) (2013) 140–150, in Russian. doi:10.7242/1999-6691/2013.6.2.17.
7. Y. A. Blinkov, S. V. Ivanov, L. I. Mogilevich, Mathematical and Computer Modeling of Non-linear Deformation Waves in Shell with Viscous Liquid Inside, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* 3 (2012) 52–60, in Russian.
8. Y. A. Blinkov, I. A. Kovaleva, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in between, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* 3 (2013) 42–51, in Russian.
9. Y. A. Blinkov, A. V. Mesyazhin, L. I. Mogilevich, Propagation of Nonlinear Waves in Coaxial Physically Nonlinear Cylindrical Shells Filled with a Viscous Fluid, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (1) (2017) 19–35, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35.
10. G. Cowdery, *Nonlinear Mechanics, Foreign Literature*, Moscow, 1961, in Russian.
11. L. G. Loytsiansky, *Mechanics of Liquid and Gas*, Drofa, Moscow, 2003, in Russian.
12. S. V. Vallander, *Lectures on Hydroaeromechanics*, Ed. Leningrad State University, Leningrad, 1978, in Russian.
13. A. S. Volmir, *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
14. A. S. Volmir, *Shells in a Fluid and Gas Flow: Hydroelasticity Problems*, Nauka, Moscow, 1979, in Russian.
15. V. Z. Vlasov, N. N. Leontiev, *Beams, Plates and Shells on an Elastic Base*, Gos. ed. fiz.-mat. literature, Moscow, 1960, in Russian.
16. V. I. Erofeev, V. V. Kazhaev, E. E. Lisenkova, N. P. Semerikova, Nonsinusoidal Bending Waves in Timoshenko Beam Lying on Nonlinear Elastic Foundation, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability* 36 (3) (2008) 230–235, in Russian.
17. G. Mikhasev, A. Sheiko, On the Influence of the Elastic Nonlocality Parameter on the Natural Frequencies of Vibrations of a Carbon Nanotube in an Elastic Medium, Vol. 153, *BSTU, Minsk*, 2012, pp. 41–44, in Russian.
18. A. V. Bochkarev, A. I. Zemlyanukhin, L. I. Mogilevich, Solitary Waves in an Inhomogeneous Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Medium, *Akusticheskij Zhurnal* 63 (2) (2017) 145–151, in Russian.
19. A. Y. Blinkova, S. V. Ivanov, A. D. Kovalev, L. I. Mogilevich, Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them, *Izvestiya of Saratov University. New series. Series: Physics* 12 (2) (2012) 12–18, in Russian. doi:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.

20. Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt, K. B. Marinov, Discretization of Quasilinear Evolution Equations by Computer Algebra Methods, Programming and Computer Software 43 (2) (2017) 84–89. doi:10.1134/S0361768817020049.
21. V. Y. Belashov, S. V. Vladimirov, Solitary Waves in Dispersive Complex Media: Theory, Simulation, Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
22. A. A. Samarskii, The Theory of Difference Schemes, Marcel Dekker Inc., N.-Y., 2001.
23. E. E. Rosinger, Nonlinear Equivalence, Reduction of PDEs to ODEs and Fast Convergent Numerical Methods, Pitman, London, 1983. doi:10.1137/1026088.
24. V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov, V. V. Mozzhilkin, Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 2 (2006) 26. doi:10.3842/SIGMA.2006.051.
25. V. P. Gerdt, Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems, Vol. 7125, MMCP. Lecture Notes in Computer Science, 2011, pp. 28–42.

© Блинков Ю. А., Евдокимова Е. В., Могилевич Л. И., Ребрина А. Ю., 2018

Для цитирования:

Блинков Ю. А., Евдокимова Е. В., Могилевич Л. И., Ребрина А. Ю. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью и окружённых упругой средой // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 3. — С. 203–215. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215.

For citation:

Blinkov Y. A., Evdokimova E. V., Mogilevich L. I., Rebrina A. Y. Wave Processes Modeling in Two Coaxial Shells Filled with a Viscous Liquid and Surrounded by Elastic Medium, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (3) (2018) 203–215. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-3-203-215. In Russian.

Сведения об авторах:

Блинков Юрий Анатольевич — д.ф.-м.н., заведующий кафедры математического и компьютерного моделирования Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (e-mail: blinkovua@info.sgu.ru)

Евдокимова Екатерина Владимировна — аспирант кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. (e-mail: eev2106@mail.ru)

Могилевич Лев Ильич — д.т.н., профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. (e-mail: mogilevich@sgu.ru)

Ребрина Анастасия Юрьевна — доцент, к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. (e-mail: anblinkova26@gmail.com)

Information about the authors:

Blinkov Yu. A. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chair of Department of Mathematic and Computer Modeling, Saratov State University (e-mail: blinkovua@info.sgu.ru)

Evdokimova E. V. — Postgraduate of Department of Applied Mathematics and System Analysis, Saratov State Technical University (e-mail: eev2106@mail.ru)

Mogilevich L. I. — Doctor of Engineering, Professor of Department of Applied Mathematics and System Analysis, Saratov State Technical University (e-mail: mogilevich@sgu.ru)

Rebrina A. Yu. — Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and System Analysis, Saratov State Technical University (e-mail: anblinkova26@gmail.com)