Физика

УДК 530.12:531.551
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389

Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями

Д. М. Янишевский

Кафедра высшей математики
Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, Россия, 614990

В рамках общей теории относительности построены космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки в присутствии в первом случае поля излучения, а во втором — идеальной жидкости с пылевидным уравнением состояния. Вращающаяся тёмная энергия моделируется анизотропной идеальной жидкостью. Рассмотрены статические и динамические космологические режимы, при этом уравнения состояния материальных параметров в первом случае вводятся отчасти как исходные данные для анизотропной жидкости, а во втором — для идеальной изотропной жидкости, моделирующей барионную материю. Методом анализа замкнутых времениподобных линий получены ограничения, которые требуется наложить на параметры метрики, обеспечивающие причинность. Выяснены условия, при которых изначально анизотропная тёмная энергия энергетически доминирует, а также когда имеет место осциллирующий космологический режим. Показано, что модели при рассмотрении расширения от планковских масштабов до современного размера наблюдаемой Вселенной дают удовлетворительную величину порядка угловой скорости её вращения. Полученные решения могут быть применены к изучению эффектов, имеющих место в современную эпоху, а также во время инфляционной стадии.

Ключевые слова: космологическое расширение, пылевидное уравнение состояния, анизотропия Вселенной, ускоренное расширение, метрика VIII типа Бьянки

1. Введение

Обращение к анизотропной космологии обусловлено наблюдательными фактами [1–3]. В нынешнюю эпоху Вселенная расширяется с ускорением, причиной которого является, скорее всего, тёмная энергия. В работах [4–6] авторами были получены результаты для метрики рассматриваемого типа, но с другими материальными источниками, а в работах [7, 8] — в других метриках. В данной работе в рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\vartheta^\alpha\vartheta^\beta, \tag{1}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — элементы лоренцевой матрицы, α, $\beta = \{0, 1, 2, 3\}$, ϑ^α — ортонормированные 1-формы, выражающиеся через масштабный фактор R следующим образом:

$$\vartheta^0 = \mathrm{d}t - R\nu_A e^A, \quad \vartheta^A = \mathrm{d}t - RK_A e^A,$$

при этом $\nu_A = \{0, 0, d\}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

Базисные 1-формы e^A имеют следующий вид:

$$e^1 = \mathrm{ch}(y)\cos(z)\mathrm{d}x - \sin(z)\mathrm{d}y,\ e^2 = \mathrm{ch}(y)\sin(z)\mathrm{d}x + \cos(z)\mathrm{d}y,\ e^3 = \mathrm{sh}(y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 27 апреля 2017 г.

Источниками гравитации являются анизотропная жидкость, чистое излучение, а также идеальная изотропная жидкость. Для метрики (1) ищется космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

2. Космологическая модель с анизотропной жидкостью и чистым излучением

Возьмём параметры метрики K_A в самом общем виде $K_A = \{a, b, c\}$, при этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T^{(1)}_{ik} = (p+\rho)\, u_i u_k + (\sigma - p)\chi_i\chi_k + (\pi - p)\xi_i\xi_k - p\eta_{ik}, \tag{4}$$

где векторы анизотропии $\chi = \{0,0,1,0\}$, $\xi = \{0,0,0,1\}$ и $u^i = \delta^i_0$ — 4-скорость сопутствующей анизотропной жидкости.

Тензор энергии-импульса чистого излучения

$$T^{(2)}_{\alpha\beta} = wk_\alpha k_\beta \quad (w > 0), \tag{5}$$

причём тетрадные компоненты волнового вектора излучения $k_\alpha = \{k_0, 0, 0, k_3\}$, т. е. $k_0 = k_3$. Результирующий тензор энергии-импульса даётся формулой

$$T_{\alpha\beta} = T^{(1)}_{\alpha\beta} + T^{(2)}_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

В итоге из (3) для метрики (1) получим систему уравнений

$$\frac{-(a^4 + 2a^2(-b^2+c^2) + (b^2+c^2)^2 - 3c^2d^2 + 4a^2b^2\big((d^2-3c^2)\dot{R}^2 + 2d^2\ddot{R}R)\big)}{4a^2b^2c^2R^2} = \\ = \rho + wk_0^2, \tag{7}$$

$$\frac{3a^4 + 2a^2(-b^2+c^2) - (b^2+c^2)^2 + c^2d^2 - 4a^2b^2(c^2-d^2)(\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R)}{4a^2b^2c^2R^2} = p, \tag{8}$$

$$\frac{-(a^4 - 3b^4 - 2b^2c^2 + c^4 + 2a^2(b^2+c^2) - c^2d^2 + 4a^2b^2\big((c^2-d^2)(\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R)\big)}{4a^2b^2c^2R^2} = \sigma, \tag{9}$$

$$\frac{-(a^4 + b^4 - 2b^2c^2 - 3c^4 - 2a^2(b^2+c^2) + c^2d^2 + 4a^2b^2\big((c^2-3d^2)\dot{R}^2 + 2c^2\ddot{R}R)\big)}{4a^2b^2c^2R^2} = \\ = \pi + wk_0^2, \tag{10}$$

$$\frac{d(c^2/a^2b^2 + 4\dot{R}^2 - 4\ddot{R}R)}{2cR^2} = wk_0^2, \tag{11}$$

$$\frac{d(a^2-b^2)\dot{R}}{abc^2R^2} = 0. \tag{12}$$

Последнее уравнение из системы (7)–(12) открывает два возможных космологических сценария: статический, если масштабный фактор не зависит от времени, и динамический, когда $a = b$.

2.1. Статическое решение с излучением

Если $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t = 0$, т.е. $R = \mathrm{const}$, то из системы уравнений (9)–(12) следует, что материальные параметры равны следующим значениям:

$$\rho = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - 2c^2(a^2+b^2) - b^4 - c^4 - 2c^3d + 3c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \tag{13}$$

$$p = \frac{3a^4 + 2a^2(c^2-b^2) - (b^2+c^2)^2 + c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \tag{14}$$

$$\sigma = \frac{-a^4 + 3b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + c^2d^2 - 2a^2(b^2+c^2)}{4a^2b^2c^2R^2}, \tag{15}$$

$$\pi = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 + 2c^2(a^2+b^2) - b^4 + 3c^4 - 2c^3d - c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \tag{16}$$

$$wk_0^2 = \frac{cd}{2a^2b^2R^2}. \tag{17}$$

Данное решение можно использовать для исследования космологических эффектов, обусловленных только вращением Вселенной.

2.2. Нестатическое решение

Если $a = b$, то из системы уравнений (9)–(12) следует, что $\sigma = p$, а также

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)\dot{R}^2 + 8a^4(c-d)dR\ddot{R}}{4a^4c^2R^2}, \tag{18}$$

$$\pi + \rho = \frac{(c-d)^2\big(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})\big)}{2a^4c^2R^2}, \tag{19}$$

$$p + \rho = \frac{-c\big(2a^2 + (c-d)(c+2d)\big) + 4a^4(c-d)(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4cR^2}. \tag{20}$$

Для нас представляют интерес модели с вращением и ускорением, поэтому рассмотрим нашу жидкость в качестве вакуумоподобной среды вдоль одной оси. В случае такого уравнения состояния $p = -\rho$ получается следующее уравнение:

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \tag{21}$$

где $L = c(2a^2 + (c-d)(c+2d))/4(c-d)a^4$. Оно имеет следующие возможные решения:

$$\begin{aligned} &R = R_0\,\mathrm{sh}(Ht), \quad R_0 = \sqrt{L}/H, && \text{если } L > 0,\\ &R = R_0\,\mathrm{ch}(Ht), \quad R_0 = \sqrt{-L}/H, && \text{если } L < 0,\\ &R = R_0 e^{Ht}, && \text{если } L = 0. \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования H характеризует темп раздувания. При $L > 0$ получается следующий вид эволюции параметров материи:

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)H^2R_0^2\,\mathrm{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\,\mathrm{sh}^2(Ht)} +$$

$$+\frac{8a^4(c-d)dH^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (22)$$

$$p=\frac{c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)-4a^4(3c^2-2cd-d^2)H^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}-$$
$$-\frac{8a^4(c-d)dH^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (23)$$

$$k_0^2=\frac{d(c^2+4a^4H^2R_0^2)}{2wca^4R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (24)$$

$$\pi=\frac{c^2(4a^2+3c^2-2cd-d^2)-4a^4(c^2+2cd-3d^2)H^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}+$$
$$+\frac{8a^4(d-c)cH^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}. \quad (25)$$

Чтобы плотность энергии была положительной, требуется выполнение условия $c^2>d^2$. Легко убедиться, что при $t\to\infty$: $\rho\to 3(c^2-d^2)H^2/c^2$, $k_0\to 0$, $p\to 3(c^2-d^2)H^2/c^2$, $\pi\to 3(d^2-c^2)H^2/c^2$, т. е. на больших временах анизотропная жидкость энергетически доминирует, а её давление асимптотически изотропизируется. В случае $L\leqslant 0$ имеет место такое же асимптотическое поведение материи.

Также рамках использования уравнения состояния $p=-\rho$ при $L>0$ имеет место особое решение $R=\sqrt{L}t$, тогда эволюция материальных параметров даётся следующими соотношениями:

$$\rho=\frac{-c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)+4a^4(3c^2-2cd-d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}, \quad (26)$$

$$p=\frac{c^2(4a^2+c^2+2cd-3d^2)-4a^4(3c^2-2cd-d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}, \quad (27)$$

$$k_0^2=\frac{d(c^2+4a^4L)}{2wca^4Lt^2}, \quad (28)$$

$$\pi=\frac{c^2(4a^2+3c^2-2cd-d^2)-4a^4(c^2+2cd-3d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}. \quad (29)$$

В случае уравнения состояния $\pi=-\rho$ из (18)–(20) получается следующее уравнение:

$$R\ddot{R}-\dot{R}^2=c^2/4a^4. \quad (30)$$

Его общее решение $R=Me^{Ht}+c^2e^{-Ht}/(16MH^2a^4)$ выбором константы интегрирования $M=c/4Ha^2=R_0/2$ приводится к виду $R=R_0\operatorname{ch}(Ht)$, т. е. является несингулярным независимо от коэффициентов метрики. Его асимптотическое поведение аналогично случаю, охватываемому уравнениями (26)–(29), т. е. и в этом случае положительность плотности энергии обеспечивается условием $c^2>d^2$, а давления p и π стремятся к общему пределу.

Определим, является ли модель с метрикой, определяемой условиями (1)–(2), причинной, методом, предложенным в работе [9]. Для этого предположим существование замкнутых времениподобных кривых, тогда на каждой из которых найдётся точка, удовлетворяющая условию $\mathrm{d}t/\mathrm{d}S = 0$, тогда как $V^{\mu}V_{\mu} > 0$ в силу временниподобности. Чтобы удовлетворить этим двум условиям, квадратичная форма из компонент касательного вектора, с матрицей коэффициентов из пространственных компонент метрического тензора, должна быть положительно определена. Матрица формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -(1/2)\big(a^2-c^2+d^2+(a^2+c^2-d^2)\,\mathrm{ch}(2y)\big)R^2 & 0 & (d^2-c^2)R^2\,\mathrm{sh}(y) \\ 0 & -a^2R^2 & 0 \\ (d^2-c^2)R^2\,\mathrm{sh}(y) & 0 & (d^2-c^2)R^2 \end{pmatrix}.$$

Вид этой матрицы, в силу условия $c^2 - d^2 > 0$ при выполнении неравенства $a^2 > c^2 - d^2$ таков, что с помощью критерия Сильвестра легко убедиться в неположительной определённости соответствующей квадратичной формы. Таким образом, мы пришли к противоречию с гипотезой о существовании замкнутых времениподобных линий, следовательно, рассмотренные в работе динамические модели являются причинными.

3. Космологическая модель с изотропной и анизотропной жидкостями

В данном случае источниками гравитации являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся тёмную энергию, и идеальная жидкость с уравнением состояния пыли, описывающая барионную материю. Коэффициенты K_A метрики (1) взяты в виде $K_A = \{a, b, b\}$. Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T^{(1)}_{ik} = (p+\rho)\,u_i u_k + (\pi - p)\xi_i\xi_k - p\eta_{ik}, \tag{31}$$

где p, π — давления анизотропной жидкости в трёх направлениях, определяемых тетрадой, ρ — плотность энергии идеальной жидкости, $\xi = \{0, 0, 0, 1\}$ — вектор анизотропии, $u^i\delta^i_0$ — 4-скорость сопутствующей анизотропной жидкости.

Тензор энергии-импульса идеальной пылевидной жидкости имеет вид:

$$T^{(2)}_{ik} = \mu v_i v_k, \tag{32}$$

где, соответственно, $v = \{v_0, 0, 0, v_3\}$ и μ — 4-скорость и плотность идеальной изотропной жидкости.

В итоге тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = T^{(1)}_{ik} + T^{(2)}_{ik} = (p+\rho)\,u_i u_k + (\pi - p)\xi_i\xi_k - p\eta_{ik} + \mu v_i v_k. \tag{33}$$

Из (3) для метрики (1) получим систему уравнений Эйнштейна:

$$\frac{c^2(3d^2 - c^2 - 4a^2) + 4a^4(3c^2 - d^2)\dot{R}^2 - 8a^4d^2R\ddot{R}}{4a^4c^2R^2} = \mu v_0^2 + \rho, \tag{34}$$

$$\frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4c^2R^2} = p, \tag{35}$$

$$\frac{c^2(4a^2 + 3c^2 - d^2) + 4a^4(3d^2 - c^2)\dot{R}^2 - 8a^4c^2R\ddot{R}}{4a^4c^2R^2} = \pi + \mu v_3^2, \tag{36}$$

$$\frac{d\big(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})\big)}{2a^4cR^2} = \mu v_0 v_3. \tag{37}$$

3.1. Нестатические решения

В данном случае число неизвестных превышает число уравнений. Избавляемся от этой проблемы наложением следующих условий:

$$v_0 = S v_3, \quad S > 1, \quad \rho = k/a^2 R^2, \quad k > 0. \tag{38}$$

Из системы уравнений (34)–(37) при условиях (38) следует следующее уравнение для определения масштабного фактора:

$$2d(cS - d)R\ddot{R} + (3c^2 - d^2 - 2cdS)\dot{R}^2 = c^2(4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2)/4a^4. \tag{39}$$

Если $cS = d$, то найдутся такие c и d, что решение уравнения (39) даётся соотношением

$$R = R_0 t, \tag{40}$$

где

$$R_0 = c\sqrt{\frac{4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2}{(3c^2 - d^2 - 2cdS)4a^4}}. \tag{41}$$

Эволюция параметров материи даётся условием (39) и следующими уравнениями:

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0^2)}{4a^4 c^2 R_0^2 t^2}, \tag{42}$$

$$v_3 = \mathrm{const}, \tag{43}$$

$$\mu = \frac{d(c^2 + 4a^4 R_0^2)}{2S v_3^2 a^4 c R_0^2 t^2}, \tag{44}$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)R_0^2 + c^2(2cd + d^2 S - 4a^2 S - 3c^2 S)4a}{4a^4 c^2 R_0^2 t^2}. \tag{45}$$

Рассмотрим ситуацию, когда вместо условия (38) выполняется $\mu = \alpha/R^2$, $\alpha > 0$. В этом случае вместо (34)–(37) следует, что

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \tag{46}$$

$$L = \frac{\alpha c S v_3^2}{2d} - \frac{c^2}{4a^4}. \tag{47}$$

Решение уравнения (47) даётся интегралом $\int \mathrm{d}R/\sqrt{L + DR^2} = \int \mathrm{d}t$, где D — постоянная. Рассмотрим, как меняется решение уравнения (47) в зависимости от знаков D и L. Отметим, что L и D не могут быть одновременно отрицательными.

Если $L > 0$, $D > 0$, то $R = R_0 \operatorname{sh}(Ht)$, где $H = \sqrt{D}$, $R_0 = \sqrt{L/D}$.

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2 R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} + \\ + \frac{8a^4(cS - d)dH^2 R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}, \tag{48}$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0^2 H^2 \big(\operatorname{ch}^2(Ht) + 2\operatorname{sh}^2(Ht)\big)}{4a^4 c^2 R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}, \tag{49}$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S) + 4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2SR_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)} + \\ + \frac{8a^4(d - cS)dH^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)} \quad (50)$$

при $t \to \infty$ $\rho \to 3(c^2 - d^2)H^2/c^2$, $k_0 \to 0$, $p \to 3(d^2 - c^2)H^2/c^2$, $\pi \to 3(d^2 - c^2)H^2/c^2$, $\mu \to 0$, т. е. анизотропная жидкость в рассматриваемом случае вакуумоподобна и асимптотически изотропизируется.

Если же $L < 0$, $D > 0$, то $R = R_0\operatorname{ch}(Ht)$, где $H = \sqrt{D}$, $R_0 = \sqrt{-L/D}$.

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)} + \\ + \frac{8a^4(cS - d)dH^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}, \quad (51)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4R_0^2H^2\big(\operatorname{sh}^2(Ht) + 2\operatorname{ch}^2(Ht)\big)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}, \quad (52)$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht) + 8a^4c(d - cS)H^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)} + \\ + \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)}. \quad (53)$$

Асимптотическое поведение плотностей и давлений останется таким же, как и в предыдущем случае, стоит лишь отметить, что именно эта модель позволяет корректно моделировать предельный переход в силу соотношения (47).

Если $L = 0$, $D > 0$, то $R = R_0e^{Ht}$, где $H = \sqrt{D}$. В данном случае для параметров материи также выполняются соотношения, аналогичные (51)–(53) при замене гиперболических функций экспонентой.

В случае $L > 0$, $D < 0$ $R = R_0\sin(Ht)$, где $H = \sqrt{-D}$, $R_0 = \sqrt{-L/D}$. При этом

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2R_0^2\cos^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\sin^2(Ht)} - \\ - \frac{8a^4(cS - d)dH^2R_0^2\sin^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\sin^2(Ht)}, \quad (54)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4R_0^2H^2\big(1 - 3\sin^2(Ht)\big)}{4a^4c^2R_0^2\sin^2(Ht)}, \quad (55)$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S) + 4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2\cos^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\sin^2(Ht)} - \\ - \frac{8a^4c(d - cS)H^2R_0^2\sin^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\sin^2(Ht)}, \quad (56)$$

$$\mu = \frac{\alpha}{R_0^2 \sin^2(Ht)}, \tag{57}$$

т. е. эта космологическая модель является осциллирующей.

Качественное рассмотрение первой стадии инфляции при расширении Вселенной от планковского масштаба до современного размера наблюдаемой Вселенной 10^{28}см, как и в работе [10], даёт в настоящее время угловую скорость вращения, равную по порядку 10^{-11} рад/год, что совпадает с оценками [11, 12]. Параметры тёмной энергии — расширение ϑ, ускорение A и параметр вращения ω — даются следующими формулами:

$$\vartheta = 3\dot{R}/R, \tag{58}$$

$$A = \dot{R}/cR, \tag{59}$$

$$\omega = d/2a^2R. \tag{60}$$

Помимо ситуаций, рассмотренных выше, возможен ещё и случай особого решения при условии $L > 0$, с точностью до значения R_0 описывающийся формулой (40). Эволюция плотностей и давлений такой модели имеет вид, аналогичный (42)–(45).

3.2. Статическое решение

Наконец, отметим особое решение уравнения (46), соответствующее ситуации $L = 0$, а именно $R = \mathrm{const}$. Для данного статического решения имеют место следующие значения плотностей и давлений, обладающие физическим смыслом при всех $d \notin [(cS - \sqrt{c^2(S^2+3)+4a^2})/3; (cS + \sqrt{c^2(S^2+3)+4a^2})/3]$:

$$\rho = \frac{3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS}{4a^4R^2}, \tag{61}$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)}{4a^4R^2}, \tag{62}$$

$$\pi = \frac{-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S}{4a^4SR^2}, \tag{63}$$

$$\mu = \frac{\alpha}{R^2}. \tag{64}$$

Во всех случаях данная статическая модель является причинной, если $a^2 > c^2 - d^2$ при условии $|c| > |d|$.

4. Заключение

В рассмотренных космологических моделях с двумя типами источников найдены стационарные и нестационарные решения. Обнаружены условия, при которых модели причинны, а также становятся асимптотически изотропными. Модели предсказывают согласующийся с экспериментами порядок угловой скорости вращения Вселенной в современную эпоху.

Литература

1. *Land K., Magueijo J.* Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 071301–071304.

2. *Payez A., Cudell J. R., Hutsemékers D.* New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. — 2012. — Vol. 2012, No 07. — P. 041.
3. *Liddle A. R., Cortes M.* Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 111. — P. 111302.
4. *Панов В. Ф.* Вращающиеся космологические модели типа VIII по Бьянки // Известия Вузов. Физика. — 1989. — № 5. — С. 98–103.
5. *Bradley G. M., Sviestins E.* Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow // GRG. — 1984. — Vol. 16, No 12. — Pp. 1119–1133.
6. *Kuvshinova E. V., Pavelkin V. N., Panov V. F.* Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy // Gravitation and Cosmology. — 2014. — Vol. 20, No 1. — Pp. 141–143.
7. *Бобровских Е. И., Панов В. Ф.* Нестационарные космологические модели с вращением типа II по Бьянки // Известия Вузов. Физика. — 2012. — Т. 55, № 4. — С. 113–114.
8. *Панов В. Ф., Сандакова О. В.* Космологические модели типа IX по Бьянки // Известия Вузов. Физика. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 82–85.
9. *Maitra S. C.* Stationary Dust — Filled Cosmological Solution with $\Lambda = 0$ and without Closed Timelike Lines // Journal of Mathematical Physics. — 1966. — Vol. 7, No 6. — Pp. 1025–1030.
10. *Янишевский Д. М.* Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 192–198.
11. *Кречет В. Г.* Современные космологические данные и вращение вселенной // Известия Вузов. Физика. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 3–6.
12. *Kuvshinova E. V., Panov V. F., Sandakova O. V.* Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations // Gravitation and Cosmology. — 2014. — Vol. 20, No 2. — Pp. 138–140.

UDC 530.12:531.551
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389

Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Fluid Sources

D. M. Yanishevskiy

Department of Higher Mathematics
Perm State University
15, Bukireva St., Perm, 614990, Russian Federation

Within the general theory of relativity the Bianchi type VIII cosmological models with rotation and expansion have been built. The first case includes a field of radiation, the second one — a perfect fluid with dust-like equation of state. Perfect anisotropic fluid imitates the rotating dark energy. Static and dynamic cosmological modes have been observed, at the same time the equations of state are partly postulated in the first case for the anisotropic fluid and in the second case — for the perfect isotropic fluid, that imitates baryon matter. The analysis of absence of closed time-like curves has been done, so the models have been proved to be casual when the metric parameters satisfy the found conditions. Also the conditions, when the anisotropic fluid's equation of state becomes vacuum-like, the energy of the fluid dominates and it becomes asymptotically isotropic, have been cleared out. Specialities of the oscillating mode have been observed. The order of present angular velocity value, calculated within the cosmological models, has been found to be quite satisfactory when expanding from the Plank scale to the present size of observed part of the Universe. The found solutions may be used for effects taking place nowadays and also during the inflationary stage.

Key words and phrases: cosmological expansion, dust-like equation of state, anisotropy of the Universe, accelerated expansion, type VIII Bianchi metric

References

1. K. Land, J. Magueijo, Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy, Physical Review Letters 95 (2005) 071301–071304.
2. A. Payez, J. R. Cudell, D. Hutsemékers, New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 2012 (07) (2012) 041.
3. A. R. Liddle, M. Cortes, Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe, Physical Review Letters 111 (2013) 111302.
4. G. M. Bradley, E. Sviestins, Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow, GRG 16 (12) (1984) 1119–1133.
5. E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy, Gravitation and Cosmology 20 (1) (2014) 141–143.
6. E. I. Bobrovskikh, V. F. Panov, Unstationary Bianchi Type II Cosmological Models with Rotation, Russian Physics Journal 55 (4) (2012) 113–114.
7. V. F. Panov, O. V. Sandakova, Bianchi Type IX Cosmological Models, Russian Physics Journal 54 (3) (2011) 82–85.
8. S. C. Maitra, Stationary Dust-Filled Cosmological Solution with $\Lambda = 0$ and without Closed Timelike Lines, Journal of Mathematical Physics 7 (6) (1966) 1025–1030.
9. D. M. Yanishevskiy, Rotating Bianchi Type VIII Cosmological Models with Anisotropic Fluid, Scalar Field and Radiation, RUDN Journal of Mathematics, Information Science and Physics 25 (2) (2017) 192–198.
10. V. G. Krechet, Modern Cosmological Data and Rotation of the Universe, Russian Physics Journal 48 (3) (2005) 219–223.
11. E. Kuvshinova, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations, Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical observations 20 (2) (2014) 138–140.

Для цитирования:
Янишевский Д. М. Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 380–389. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389.

For citation:
Yanishevskiy D. M. Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Fluid Sources, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 380–389. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389. In Russian.

Сведения об авторах:
Янишевский Даниил Михайлович — соискатель кафедры высшей математики ПГНИУ (e-mail: ydm86@yandex.ru, тел.: +7 (922) 6465325)

Information about the authors:
Yanishevskiy D. M. — applicant of the Department of Higher Mathematics of Perm State University (e-mail: ydm86@yandex.ru, phone: +7 (922) 6465325)