

УДК 530.145

Кулон-мультипольные аналоги эффекта Мотта

В. В. Пупышев

Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Показано, что в пределе низких энергий квантовомеханическое дифференциальное сечение рассеяния двух тождественных заряженных частиц, порождённого центральным мультипольным взаимодействием в кулоновском поле, быстро осциллирует. Эта угловая особенность сечения — обсуждаемое новое явление, названное кулон-мультипольным аналогом эффекта Мотта.

Ключевые слова: упругое рассеяние, принцип Паули, эффект Мотта.

1. Введение

Сначала следует описать основные обозначения. В координатном трёхмерном пространстве фиксируем правую декартову систему координат S_3 с направляющими ковариантными ортами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и начальной точкой O_3 , совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2\}$ двух частиц p_1 и p_2 с массами m_1 и m_2 с электрическими зарядами z_1e и z_2e , где e — заряд электрона. Пусть в этой системе координат \mathbf{r} — вектор, направленный от частицы p_1 к частице p_2 , $\hat{r} = (\theta_r, \varphi_r)$ — его сферические углы; $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_3$ и $E \equiv \hbar^2 k^2 / (2\mu)$ — импульс и энергия упругого рассеяния частиц; $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — их приведённая масса; $\mathbf{k}' = (k, \theta, \varphi)$ — относительный импульс после столкновения, θ и φ — углы рассеяния, и, наконец $\mathbf{L} \equiv -i\mathbf{r} \times \nabla_r$ — оператор углового момента. Удобно и математически корректно использовать безразмерные параметры: безразмерный импульс рассеяния $q \equiv k|R|$ и параметр Зоммерфельда $\eta \equiv 1/2q$.

По предположению, полное взаимодействие V^{eff} между частицами центральное и равно сумме кулоновского потенциала $V^c \equiv 1/rR$ и мультипольной добавке к нему V , которая в пределе больших расстояний ($r/|R| \rightarrow \infty$) имеет асимптотику $V \sim V_0^d r^{-d}$, где V_0^d — некоторое известное число, а $d = 2, 3, \dots$.

Как известно [1, 2], полная амплитуда рассеяния центральным потенциалом не зависит от угла φ , но зависит от угла θ и представляется бесконечным рядом по парциальным амплитудам рассеяния и полиномам Лежандра $P_\ell(\cos \theta)$. Например, кулоновские парциальные и полная амплитуда рассеяния f_ℓ^c и f^c задаются известными явными выражениями [1, 2]: парциальная амплитуда f_ℓ^c определяется через парциальные фазы δ_ℓ^c кулоновского рассеяния

$$\delta_\ell^c(q) \equiv \arg \Gamma(1 + \ell + i\eta), \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

где Γ — гамма-функция, формулой

$$f_\ell^c(q) \equiv |R| (2iq)^{-1} [\exp(2i\delta_\ell^c(q)) - 1], \quad (1)$$

а полная амплитуда f^c является бесконечным рядом

$$f^c(\theta; q) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f_\ell^c(q) P_\ell(\cos \theta),$$

Статья поступила в редакцию 15 октября 2007 г.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-02-16828).

который суммируется в замкнутое выражение:

$$f^c(\theta; q) = -|R| [2q \sin(\theta/2)]^{-2} \exp \{2i [\delta_0^c(q) - \eta \ln \sin(\theta/2)]\}. \quad (2)$$

Если частицы p_1 и p_2 нетождественные, то разбиениям $\delta_\ell^{\text{eff}} = \delta_\ell^c + \delta_\ell$ всех ($\ell = 0, 1, \dots$) фаз рассеяния δ_ℓ^{eff} взаимодействием $V^{\text{eff}} = V^c + V$ отвечают представления парциальных и полных амплитуд $f_\ell^{\text{eff}} = f_\ell^c + f_\ell$ и $f^{\text{eff}} = f^c + f$, вклады f_ℓ и f потенциала V в эти амплитуды определяются формулами

$$f_\ell(q) = |R|(2iq)^{-1} \exp(2i\delta_\ell^c(q)) [\exp(2i\delta_\ell(q)) - 1],$$

$$f(\theta; q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(q) [(2\ell + 1)P_\ell(\cos \theta)], \quad (3)$$

а его вклады $d\sigma$, σ_ℓ и σ в дифференциальное, парциальные, и полное сечения рассеяния — формулами

$$d\sigma(\theta; E) \equiv |f(\theta; q)|^2, \quad \sigma_\ell(E) \equiv 4\pi |f_\ell(q)|^2,$$

$$\sigma(E) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell(E) = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta d\sigma(\theta; E), \quad (4)$$

где, как и всюду далее, $d\sigma$ — сокращённое обозначение отношения $d\sigma/(d\theta \sin \theta)$.

Если частицы p_1 и p_2 тождественные, то, как известно [1, 3, 4], амплитуду f и сечения $d\sigma$, σ следует заменить симметризованными (+) или антисимметризованными (−) амплитудами f^\pm :

$$f^\pm(\theta; q) \equiv f(\theta; q) \pm f(\pi - \theta; q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(q) (2\ell + 1) [1 \pm (-1)^\ell] P_\ell(\cos \theta) \quad (5)$$

и соответствующими им сечениями $d\sigma^\pm$ и σ^\pm :

$$d\sigma^\pm(\theta; E) \equiv 2\pi |f^\pm(\theta; q)|^2, \quad \sigma^\pm(E) \equiv \int_0^\pi d\theta \sin \theta d\sigma^\pm(\theta; E). \quad (6)$$

Напомним и обсудим давно известный эффект Мотта.

2. Эффект Мотта

Кулоновское рассеяние — исключительный случай: кулоновская амплитуда f^c при любых значениях энергии и угла рассеяния известна явно и задана формулой (2), а кулоновское сечение $d\sigma^c$ рассеяния нетождественных частиц не осциллирует и совпадает с классическим сечением [3]:

$$d\sigma^c(\theta; E) \equiv 2\pi |f^c(\theta; q)|^2 = \frac{\pi R^2}{8 q^4} [\text{cosec}(\theta/2)]^4. \quad (7)$$

Кулоновское сечение $d\sigma^{c\pm}$ рассеяния тождественных частиц определяется через симметризованную или антисимметризованную кулоновские амплитуды

$$f^{c\pm}(\theta; q) \equiv f^c(\theta; q) \pm f^c(\pi - \theta; q)$$

формулой $d\sigma^{c\pm}(\theta; E) \equiv 2\pi |f^{c\pm}(\theta; q)|^2$ и поэтому является алгебраической суммой

$$d\sigma^{c\pm}(\theta; E) = d\sigma_{\text{clas}}^c \pm \pi \frac{R^2}{q^4} \frac{\cos \{2\eta \ln [\text{tg}(\theta/2)]\}}{[\sin \theta]^2}. \quad (8)$$

Первое слагаемое этой суммы — не осциллирующее по углу θ классическое сечение рассеяния $d\sigma_{\text{clas}}^c$ двух одинаковых частиц:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{clas}}^c(\theta; E) &\equiv 2\pi |f^c(\theta; q)|^2 + 2\pi |f^c(\pi - \theta; q)|^2 = \\ &= \frac{\pi R^2}{8 q^4} \left\{ [\text{cosec}(\theta/2)]^4 + [\text{sec}(\theta/2)]^4 \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

а её второе слагаемое не имеет классического аналога и в пределе низких энергий ($\eta \rightarrow \infty$) является быстро осциллирующей функцией угла рассеяния θ .

Присутствие осциллирующего слагаемого в дифференциальном сечении рассеяния существенных частиц — предсказанный Моттом (см. [1, с. 529]) характерный квантовомеханический эффект интерференции. Этот эффект экспериментально подтверждён, но лишь в случае кулоновского рассеяния [1, 4]. Поэтому теоретический и экспериментальный анализ осциллирующих дифференциальных сечений, обусловленных тождественностью частиц, во всех остальных случаях представляется интересным.

В предыдущей работе [5] обнаружен протон-протонный аналог эффекта Мотта. В настоящей работе докажем, что имеются и другие аналоги этого эффекта.

3. Аналоги эффекта Мотта

Задача рассеяния суперпозицией $V^{\text{eff}} = V^c + V$ довольно сложная: проблема приближения порождённых дальнедействующим взаимодействием V амплитуды (3) и дифференциального сечения (4) асимптотическими при $q \rightarrow 0$ разложениями по известным явно функциям энергии и угла рассеяния в полном объёме не решена. Перспективные подходы к её решению — методы, предложенные в работах [6–8].

В работе [6] доказано, что все особенности амплитуды рассеяния на $f^{\text{eff}} = f^c + f$ нецентральном потенциале

$$V^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = V^c(r) + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) \sim V_0^d(\hat{r})/r^d, \quad d = 2, 3, \dots, \quad r/|R| \rightarrow \infty,$$

где $|V_0^d(\hat{r})|$ — всюду гладкая функция, исчерпываются конечным числом итераций трёхмерного уравнения Шрёдингера, и поэтому в случаях $d = 2, 3$ амплитуда f имеет дополнительные к чисто кулоновским особенности в направлении рассеяния вперёд ($\theta \rightarrow 0$) и не имеет особенностей такого типа в случае $d > 3$.

Предложенные в [6, 7] методы были развиты и применены в [8] соответственно для вывода в явном виде старших слагаемых асимптотик при $\theta \rightarrow 0$ и $q \rightarrow 0$ амплитуды рассеяния $f(\theta; q)$, в случае $V^{\text{eff}} = V^c + V$, где $V \sim V_0^d r^{-d}$, V_0^d — константа, а $d > 1$.

В работе [8] доказаны два утверждения: в случае $d = 3$ и $\theta \rightarrow 0$, но при любом q

$$f(\theta; q) = -V_0^3 q \frac{\exp[i\omega(\eta)]}{[\sin(\theta/2)]^{2i\eta}} + \bar{f}(\theta; q), \quad \omega(\eta) \equiv 2\eta(\ln \eta - 1), \quad (10)$$

где $\bar{f}(\theta; q)$ — гладкая функция; в случае $d = 3, d = 4$ и $q \rightarrow 0$, но при любом θ

$$f(\theta; q) \sim \tilde{f}(\theta; q) \equiv -V_0^d |R|^{3-d} q^{2d-5} \frac{\exp[i\omega(\eta)]}{[\sin(\theta/2)]^{2i\eta}} t_d(\theta), \quad (11)$$

где функция t_d в случае $d = 3$ определена формулой

$$t_3(\theta) \equiv \frac{2 + (\theta - \pi) \text{tg}(\theta/2)}{1 + \cos \theta}, \quad (12)$$

а в случае $d = 4$ вычисляется по формуле

$$t_4(\theta) \equiv \sin \theta \frac{(2 - \cos \theta)(\pi - \theta) - 3 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^3}. \quad (13)$$

Обсудим следствия формул (10)–(13). Функции $t_3(\theta)$ и $t_4(\theta)$ — всюду ($\theta \in [0, \pi]$) гладкие, функция t_3 монотонно убывает, причём $t_3(0) = 1$, $t_3(\pi) = 1/3$, а функция t_4 — возрастает, причём $t_4(0) = 0$, $t_4(\pi) = 4/15$. Так как $t_3(\theta = 0) \neq 0$, то асимптотика (10) старшей угловой сингулярности амплитуды f совпадает с главной особенностью при $\theta \rightarrow 0$ её же низкоэнергетической асимптотики (11). В случае $d = 4$ амплитуда f не имеет аналогичных свойств, потому что функция $t_4(\theta)$ равна нулю при $\theta = 0$. В обоих случаях ($d = 3, d = 4$) дифференциальное сечение (4), отвечающее амплитуде f , не имеет никаких угловых особенностей, а при $q \rightarrow 0$ убывает:

$$d\sigma(\theta; E) \sim 2\pi|V_0^d R^{3-d}|^2 q^{4d-10} |t_d(\theta)|^2. \quad (14)$$

В случае $d = 3$ это сечение не равно нулю при угле $\theta = 0, \pi$ и монотонно убывает по θ , а если $d = 4$ — равно нулю при угле $\theta = 0$ и монотонно возрастает.

В обсуждённых выше статьях [6–8] физически важный и несомненно интересный случай тождественных частиц не рассматривался. Исследуем его и докажем, что в пределе низких энергий дифференциальное сечение $d\sigma^\pm$ рассеяния, порождённого в кулоновском поле V^c мультипольным потенциалом $V^d \sim V_d^0 r^{-d}$ с показателем $d = 3$ или $d = 4$, имеет особые угловые особенности осцилляторного типа, обусловленные только тождественностью частиц.

Заменив амплитуду f в формуле (5) её низкоэнергетической асимптотикой (11), получим явное низкоэнергетическое приближение \tilde{f}^\pm амплитуды f^\pm :

$$f^\pm \sim \tilde{f}^\pm \equiv -V_0^d |R|^{3-d} q^{2d-5} \exp[i\omega(\eta)] \gamma_d^\pm(\theta; q), \quad (15)$$

где функция γ_d^\pm зависит от угла θ и параметра q :

$$\gamma_d^\pm(\theta; q) \equiv \frac{t_d(\theta)}{[\sin(\theta/2)]^{2i\eta}} \pm \frac{t_d(\pi - \theta)}{[\cos(\theta/2)]^{2i\eta}}. \quad (16)$$

Согласно формуле (6) найденной асимптотике \tilde{f}^\pm амплитуды f^\pm отвечает асимптотика сечения $d\sigma^\pm$:

$$d\sigma^\pm(\theta; E) \sim 2\pi|V_0^d R^{3-d}|^2 q^{4d-10} |\gamma_d^\pm(\theta; q)|^2. \quad (17)$$

Здесь функция $|\gamma_d^\pm(\theta; q)|^2$ выражается явно через заданную равенством (12) или (13) функцию $t_d(\theta)$:

$$|\gamma_d^\pm(\theta; q)|^2 = |t_d^\pm(\theta)|^2 \mp 4 \{ \sin[\eta \ln \operatorname{tg}(\theta/2)] \}^2 t_d(\theta) t_d(\pi - \theta), \quad (18)$$

где по определению $t_d^\pm(\theta) \equiv t_d(\theta) \pm t_d(\pi - \theta)$.

Запишем найденную асимптотику (17) как сумму

$$d\sigma^\pm(\theta; E) \sim d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}(\theta; E) \pm 4\pi|V_0^d R^{3-d}|^2 q^{4d-10} \times \\ \times \cos\{2\eta \ln[\operatorname{tg}(\theta/2)]\} t_d(\theta) t_d(\pi - \theta) \quad (19)$$

и, таким образом, выделим из неё асимптотику $d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}$ аналога классического сечения рассеяния:

$$d\tilde{\sigma}_{\text{clas}} \equiv 2\pi \left[|\tilde{f}(\theta; q)|^2 + |\tilde{f}(\pi - \theta; q)|^2 \right] = \\ = 2\pi|V_0^d R^{3-d}|^2 q^{4d-10} [t_d^2(\theta) + t_d^2(\pi - \theta)]. \quad (20)$$

Теперь сравним асимптотики (11)–(14) амплитуд и сечений f и $d\sigma$ с соответствующими асимптотиками (15)–(20) амплитуд f^\pm и сечений $d\sigma^\pm$.

Случай $d = 3$. Так как $t_d^\pm(\theta) \neq 0$ при $\theta = 0, \pi$, то амплитуды f^\pm , в отличие от амплитуды f , имеют угловую особенность не только в точке $\theta = 0$, но и в точке $\theta = \pi$. Эта дополнительная особенность — следствие тождественности частиц. Далее, $t_3(\theta)t_3(\pi - \theta) \geq 0$ всюду. Только при $\theta = \pi/2$ функции $|t_3^\pm|^2$ имеют минимумы, но $|t_3^+|^2 \neq 0$, а $|t_3^-|^2 = 0$. Поэтому, в отличие от сечения $d\sigma$, сечения $d\sigma^+$ и $d\sigma^-$ в точке $\theta = \pi/2$ имеют локальный максимум и соответственно минимум, а их гладкая компонента $d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}$ в этой точке достигает своего минимума.

Случай $d = 4$. Теперь $t_d^\pm = \pm 4/15 \neq 0$ при $\theta = 0$, и $t_d^\pm = 4/15 \neq 0$ при $\theta = \pi$. Поэтому амплитуды f^\pm , в отличие от амплитуды f , имеют угловые особенности в точках $\theta = 0, \pi$. Обе эти особенности — следствие тождественности частиц. Далее, $t_4(\theta)t_4(\pi - \theta) \geq 0$ всегда. Только при $\theta = \pi/2$ функция $|t_d^+|^2$ максимальна, а функция $|t_d^-|^2$ — минимальна. Поэтому, в отличие от сечения $d\sigma$, сечения $d\sigma^+$ и $d\sigma^-$ в точке $\theta = \pi/2$ имеют локальный максимум и соответственно минимум, а их гладкая компонента $d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}$ в этой точке достигает своего максимального значения.

В любом из случаев $d = 3$ или $d = 4$ сечение $d\sigma$ — всюду гладкая функция угла θ , а сечения $d\sigma^\pm$ из-за множителя $\{\sin[\eta \ln \text{tg}(\theta/2)]\}^2$ быстро осциллируют на всем интервале $0 < \theta < \pi$. Положения θ_n^+ и θ_n^- соседних локальных экстремумов сечения $d\sigma^\pm$ определяются положениями соответствующих экстремума и ближайшего к нему нуля этого множителя:

$$\eta \ln \text{tg}(\theta_n^+/2) \approx -\pi n, \quad \eta \ln \text{tg}(\theta_n^-/2) \approx -\pi n + \pi/2.$$

Поэтому разность $\Delta \equiv \theta_n^+ - \theta_n^-$ не зависит от n и очень быстро убывает: $\Delta \sim 2 \exp(-\pi/2\eta)$, $q \rightarrow 0$. Сформулируем доказанное утверждение следующим образом: вследствие тождественности частиц низкоэнергетические асимптотики дифференциальных сечений $d\sigma^\pm$ в обоих случаях $d = 3$ или $d = 4$ являются всюду ограниченными, но быстро осциллирующими функциями угла рассеяния, причём разница Δ между положениями их соседних экстремумов при данной энергии постоянная.

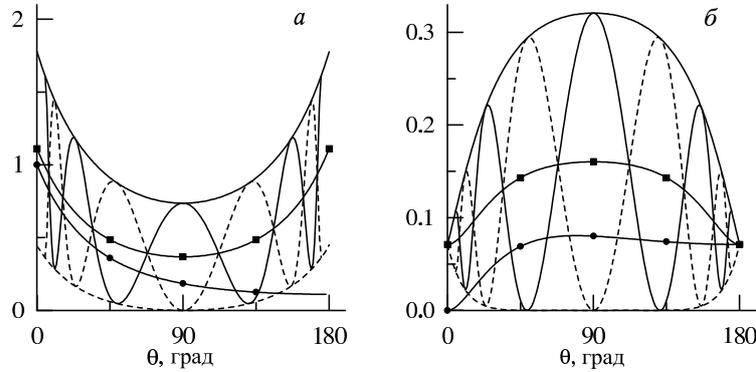


Рис. 1. Функции $t_d^2(\theta)$, $t_d^2(\theta) + t_d^2(\pi - \theta)$, $|t_d^\pm(\theta)|^2$, $|\gamma_d^\pm(\theta)|^2$ в случае (а) $d = 3$ и (б) $d = 4$

Описанную зависимость сечений $d\sigma$, $d\sigma^\pm$ и компоненты $d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}$ от угла θ при $\eta = 2$ в случаях $d = 3$ и $d = 4$ поясняет рис. 1, а и б. Сплошные кривые, помеченные символами \bullet и \blacksquare — графики функции $t_d^2(\theta)$ и $t_d^2(\theta) + t_d^2(\pi - \theta)$. Сплошные гладкая и осциллирующая кривые — графики функций $|t_d^+(\theta)|^2$ и $|\gamma_d^+(\theta)|^2$, а штриховые гладкая и осциллирующая кривые — графики функций $|t_d^-(\theta)|^2$ и $|\gamma_d^-(\theta)|^2$.

Сравним кулоновские сечения (7), (8) с соответствующими сечениями (14), (19). Если частицы нетождественные, то сечения $d\sigma^c$ и $d\sigma$ не осциллируют. Тождественность частиц порождает осциллирующие слагаемые в сечениях $d\sigma^{c\pm}$ и $d\sigma^\pm$. Эти слагаемые содержат один и тот же множитель $\cos\{2\eta \ln[\text{tg}(\theta/2)]\}$ и описывают один и тот же эффект — квантовую интерференцию. Компонента

$d\tilde{\sigma}_{\text{clas}}$ — аналог классического кулоновского сечения $d\sigma_{\text{clas}}^c$. Следовательно, осцилляции сечений $d\sigma^{\pm}$ — проявление кулон-мультипольного аналога описанного выше чисто кулоновского эффекта Мотта.

4. Заключение

Обсудим полученные и представленные выше результаты. Доказанные низкоэнергетические представления (19), (20) воспроизводят в явном виде все низкоэнергетические и угловые особенности дифференциального сечения $d\sigma^{\pm}$ рассеяния двух заряженных тождественных частиц, порождённого в их кулоновском поле квадрупольным ($d = 3$) или поляризационным ($d = 4$) взаимодействием $V^d \sim V_0^d r^{-d}$. Эти представления — довольно простые формулы, позволяющие корректно экстраполировать сечения $d\sigma^{\pm}$ в область низких энергий. В пределе низких энергий такие сечения убывают как целая степень импульса столкновения частиц и быстро осциллируют по углу рассеяния. Тождественность частиц — единственная физическая причина такой угловой особенности, названной кулон-мультипольным аналогом эффекта Мотта.

Случаи $d = 3$ и $d = 4$ были рассмотрены только в качестве простого примера. Используя полученные в работе [8] явные выражения низкоэнергетических асимптотик амплитуд рассеяния тождественных частиц, аналогичным образом несложно показать, что при любом $d > 1$ в кулон-мультипольном рассеянии двух тождественных частиц должен проявляться кулон-мультипольный аналог эффекта Мотта.

Литература

1. Тейлор Д. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1975.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Физматлит, 2002.
4. Мессиа Л. Квантовая механика. — М.: Наука, 1978. — Т. 1.
5. Пупышев В. В. Экстраполяция дифференциального сечения триплетного pp -рассеяния в область низких энергий. // Письма в ЖЭТФ. — Т. 82, № 5. — 2005. — С. 275–278.
6. Квицинский А. А., Комаров И. В., Меркурьев С. П. Особенности амплитуды рассеяния для медленно убывающих потенциалов // ЯФ. — Т. 38, вып. 1(7). — 1983. — С. 101–114.
7. Квицинский А. А. Рассеяние на дальнедействующих потенциалах при малых энергиях // ТМФ. — Т. 59, № 3. — 1984. — С. 472–478.
8. Квицинский А. А. // ТМФ. — Т. 65, № 2. — 1985. — С. 226–237.

UDC 530.145

Coulomb-Multipole Analogues of Mott Effect

V. V. Pupyshev

*Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot Curie str., 6, Dubna, Moscow Region, Russia, 141980*

It is shown that in the low-energy limit the quantum mechanical differential cross-section of two identical charged particles generated by the central multipole interaction in the Coulomb field oscillates rapidly. This angular peculiarity of the cross-section is the discussed and new phenomenon called the coulomb-multipole analogue of the Mott effect.