Математическое моделирование

УДК 519.6

О новом методе моделирования многомерных экстремальных величин на основе порогового подхода

К. М. Назаренко

Кафедра прикладной математики
ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»
Вадковский пер., 3а, Москва, Россия, 119137

В работе предложен обобщённый пороговый метод моделирования многомерных экстремальных величин, и с его использованием введено понятие многомерного обобщённого распределения Парето. Исследованы двухмерные обобщённые распределения Парето на основе представления Пикандса с различными моделями функций статистической зависимости. Проведены вычислительные эксперименты с использованием данных фондовых индексов, показавшие высокую эффективность построенных моделей и вычислительных алгоритмов.

Ключевые слова: пороговый метод, обобщённое распределение Парето, многомерные экстремальные величины, совместная функция распределения.

1. Введение

Теория многомерных экстремальных величин является одной из динамично развивающихся областей современного стохастического анализа. Особый интерес, как правило, представляет исследование структур зависимости между этими величинами [1].

В различных прикладных задачах практический интерес часто представляют модели распределений многомерных экстремальных величин. В работе [2] рассматриваются асимптотические свойства совместных распределений покомпонентных максимумов двумерных случайных векторов. Теоретическое исследование обобщённого многомерного случая можно найти в работе [3], тогда как в работе [4] изучаются их статистические приложения.

Однако по-прежнему актуальной является разработка математических моделей зависимых экстремальных величин, использующих большее число наблюдений, для повышения точности оценивания. В данной работе изучается проблема выбора модели функции распределения экстремальных величин, оценивания её параметров, а также рассматривается вопрос её применения для решения актуальных задач финансового риск-менеджмента.

2. Многомерные обобщённые распределения Парето

Пусть $\{\mathbf{X}_n, n \geqslant 1\} = \left\{\left(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)}\right), n \geqslant 1\right\}$ — независимые, одинаково распределённые d-мерные случайные векторы с функцией распределения F, а $\mathbf{M}_n$ — вектор покомпонентных максимумов. Будем считать, что частные функции распределения $F_i(x) = F(\infty, \infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty)$ лежат в областях притяжения одномерных распределений экстремальных величин.

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2007 г.

Предположим, что существуют действительные константы $u_n^{(i)}$ и $\sigma_n^{(i)} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant d$, что при $n \to \infty$

$$P\left[\frac{M_n^{(i)} - u_n^{(i)}}{\sigma_n^{(i)}} \leqslant x^{(i)}, 1 \leqslant i \leqslant d\right] = \\ = F^n\left(\sigma_n^{(1)} x^{(1)} + u_n^{(1)}, \ldots, \sigma_n^{(d)} x^{(d)} + u_n^{(d)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Назовём предел (1) многомерным распределением экстремальных величин G. Очевидно, что каждое частное распределение функции G_i является одним из трёх функций распределения экстремальных величин (Вейбулла, Фреше, Гумбеля). Если предел (1) существует, будем говорить, что F лежит в области притяжения G, и обозначим $F \in D(G)$.

Как и в одномерном случае можно показать, что предельные функции распределения максимумов для выражения (1) лежат в классе максимум-устойчивых распределений, если для любого $i = 1, \ldots, d$ и любого $t > 0$ существуют функции $\alpha^{(i)}(t) > 0$, $\beta^{(i)}(t)$ такие, что

$$G^t(\mathbf{x}) = G\left(\alpha^{(1)}(t)\, x^{(1)} + \beta^{(1)}(t), ..., \alpha^{(d)}(t)\, x^{(d)} + \beta^{(d)}(t)\right).$$

Далее нами будут использоваться поэлементные операции над векторами, которые в двухмерном случае определяются следующим образом:

$$(\alpha + \mathbf{X})^{(i)} = \alpha + X^{(i)}, \quad (\mathbf{XY})^{(i)} = X^{(i)} Y^{(i)}.$$

Операции сравнения и взятие максимума и минимума производятся покомпонентно.

Для многомерной функции распределения $F(\mathbf{x})$ введём понятие хвоста распределения, или функции выживания как $\bar{F}(\mathbf{x}) = 1 - F(\mathbf{x})$. Также будем использовать обозначение $\mathbf{x}_F = \sup\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) < 1\}$ для правой верхней точки функции распределения.

Перейдём к рассмотрению совместных распределений надпороговых значений. Условную функцию распределения надпороговых величин определим как:

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{u})}{F(\mathbf{u})}.$$

Можно показать, что если $F(\mathbf{x}) \in D(G)$, то предельным распределением для функции $F_{\mathbf{u}}$ является многомерное обобщённое распределение Парето $H_{\mathbf{x}_0}$ т. е.

$$\lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{x}_F} |F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - H_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})| = 0.$$

Для любого $\mathbf{x}_0$ из области определения G и функции $H_{\mathbf{x}_0}$ справедливо следующее соотношение

$$\bar{H}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \frac{-\log G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{-\log G(\mathbf{x}_0)},$$

при этом компоненты $\mathbf{x}_0$ связаны лишь с параметрами масштаба соответствующих частных функций распределения и не оказывают влияния на параметры формы.

Утверждение 1. *Если $F \in D(G)$, тогда существует такая точка $\mathbf{x}_0$ из области определения G, что для любого $\mathbf{x} \geqslant 0$ справедливо*

$$\frac{\bar{F}(\mathbf{u} + \mathbf{x})}{\bar{F}(\mathbf{u})} \underset{\mathbf{u}\to\mathbf{x}_F}{\longrightarrow} \frac{-\log G(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{-\log G(\mathbf{x}_0)} = \bar{H}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Область определения многомерного обобщённого распределения Парето может быть определена как для случая совместного превышения порогов (положительная область определения), так и для случая превышения порога хотя бы одним из компонентов (полная область определения).

Для дальнейшего изучения свойств многомерного обобщённого распределения Парето воспользуемся представлением многомерных максимум-устойчивых распределений, предложенным де Хааном и Резником [2] в следующем виде:

$$G(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left\{-\mu\left[-\infty, \mathbf{x}\right]^c\right\}, & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{k}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3}$$

для некоторого $\mathbf{k} \in [-\infty, \infty)^d$, и меры μ на $E = [\mathbf{k}, \infty] \setminus \{\mathbf{k}\}$, которую называют экспоненциальной. При этом мера μ в (3) должна обладать следующими свойствами:

$$\mu\left(E \setminus [-\infty, \infty)^d\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{d}\left\{\mathbf{x} \in E : x^{(i)} = \infty\right\}\right) = 0,$$

а в случае $\mathbf{k} > -\infty$ и $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{k}$ с $x^{(i)} = -\infty$ для некоторого $i \leqslant d$ мера $\mu\left([-\infty, \mathbf{x}]^c\right) = \infty$.

Поскольку одномерные распределения экстремальных величин связаны между собой функциональными преобразованиями, многомерные распределения экстремальных величин также могут быть переведены друг в друга с помощью функциональных преобразований их частных функций распределения. В силу этого предположим, что каждое частное распределение G является стандартным распределением Фреше, т. е.

$$G(\infty, \infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty) = \varPhi_1(x_i) = \exp\left(-x_i^{-1}\right), \quad x_i > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Максимум-устойчивые распределения со стандартными частными распределениями Фреше обозначим через G_*.

Определим

$$F_*(\mathbf{x}) = F\left(F_1^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{x_1}\right), \ldots, F_d^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{x_d}\right)\right), \quad \mathbf{x} > 1.$$

Может быть показано, что если $F \in D(G)$, то $F_* \in D(G_*)$. Учитывая свойства $\varPhi_1(\mathrm{x})$, условие максимум-устойчивости для $G_*(\mathbf{x})$ может быть переписано в виде

$$G_*^t(tx_1, \ldots, tx_d) = G_*(x_1, \ldots, x_d), \quad \forall\, t > 0.$$

Экспоненциальная мера $\mu_*(\cdot)$ в G_* обладает свойством однородности, т. е. для любого $t > 0$:

$$\mu_*\left([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^c\right) = t\mu_*\left([\mathbf{0}, t\mathbf{x}]^c\right) = t\mu_*\left(t\,[\mathbf{0}, \mathbf{x}]^c\right). \tag{4}$$

Класс максимум-устойчивых распределений с частными стандартными распределениями Фреше $\varPhi_1$ может быть представлен в следующем виде:

$$G_*(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\int\limits_{\aleph} \max_{i=1}^{d} \frac{a^{(i)}}{x^{(i)}} S(\mathrm{d}\mathbf{a})\right\},$$

где $S(\cdot)$ — конечная мера на единичной сфере $\aleph = \{\|\mathbf{y}\| = 1\}$ в E, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\aleph} a^{(i)} S(\mathrm{d}\mathbf{a}) = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{5}$$

Единственным требованием, накладываемым на меру $S(\cdot)$, называемую спектральной или угловой мерой, является уравнение (5). Поэтому может существовать бесконечное множество параметризаций для этого семейства распределений.

Для того, чтобы установить связь между мерами S и μ_*, перейдём к полярным координатам. Для произвольной нормы $\|\cdot\|$ определим

$$T:\mathbf{X}\to\left(\|\mathbf{X}\|,\|\mathbf{X}\|^{-1}\mathbf{X}\right)=(r,\mathbf{W}). \tag{6}$$

Выберем множество $\mathbf{B}\subset\mathbf{W}$ и определим $D(r,\mathbf{B})=\{(l,\mathbf{w}):l>r,\mathbf{w}\in\mathbf{B}\}$. Легко показать, что для $M(r)=\mu_*\left(T^{-1}(D(r,\mathbf{B}))\right)$ выражение (4) в полярных координатах будет иметь вид $M(r)=tM(rt)$. Полагая $t=r^{-1}$ и $M(1)=S(\mathbf{B})$, получим

$$M(r)=r^{-1}S(\mathbf{B}), \tag{7}$$

где S — конечная мера на $\mathbf{W}$. Из выражения (7) следует, что

$$\mu_*\left(T^{-1}(\mathrm{d}r\times\mathrm{d}\mathbf{w})\right)=r^{-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}S(\mathbf{w}). \tag{8}$$

Для предельного распределения покомпонентных максимумов можно записать

$$P\left(n^{-1}\mathbf{M}_n<x\right)=P\left(n^{-1}\mathbf{X}_j\notin A,\ j=1,2,\dots,n\right),$$

где $A=[0,\mathbf{x}]^c$.

Последняя вероятность сходится к $\exp\{-\mu_*(A)\}$, где

$$\mu_*(A)=\int\limits_A r^{-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}S(\mathbf{w})= \tag{9}$$

$$=\int\limits_{\aleph}\mathrm{d}S(\mathbf{w})\int\limits_{r>\min\limits_{i=1}^{d}(x_i/w_i)}^{\infty} r^{-2}\mathrm{d}r. \tag{10}$$

Определим теперь $r=\|\mathbf{X}\|=\sum\limits_{i=1}^{d}X_i$. В этом случае S — конечная мера на единичной сфере

$$\aleph=\left\{\mathbf{w}:\sum_{i=1}^{d}w_i=1,\ w_i\geqslant 0,\ i=1,\dots,d\right\}.$$

Экспоненциальная мера в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\mu_*(A)=\int\limits_{\aleph}\max_{i=1}^{d}(w_i/x_i)\,\mathrm{d}S(\mathbf{w}) \tag{11}$$

для некоторой меры S, удовлетворяющей условию (5).

Исходя из описанных выше представлений максимум-устойчивых распределений, введём следующее определение многомерного обобщённого распределения Парето с положительной областью определения.

Определение 1. Будем называть $H(\mathbf{x})$ — многомерным обобщённым распределением Парето, если существует конечная мера S, удовлетворяющая (5), такая что для $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}_+^d$ и $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$

$$\bar{H}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=\frac{\int\limits_{\aleph}\max\limits_{i=1}^{d}\left(\frac{a^{(i)}}{(x+x_0)^{(i)}}\right)S(\mathrm{d}\mathbf{a})}{\int\limits_{\aleph}\max\limits_{i=1}^{d}\left(\frac{a^{(i)}}{(x_0)^{(i)}}\right)S(\mathrm{d}\mathbf{a})}=\frac{\mu_*([\mathbf{0},\mathbf{x}+\mathbf{x}_0]^c)}{\mu_*([\mathbf{0},\mathbf{x}_0]^c)}. \tag{12}$$

3. Двумерные обобщённые распределения Парето

Рассмотрим более подробно двумерный случай и получим выражения для двухмерных обобщённых распределений Парето (BGPD). В работе [3] показано, что выражение для экспоненциальной меры (11) может быть записано в следующем виде

$$\mu_* \left[\mathbf{0}, (x, y)\right]^c = \int\limits_0^1 \max\left\{w, x\left(1-w\right)/y\right\} \mathrm{d}\left(\mathrm{d}w\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) A\left(\frac{x}{x+y}\right), \tag{13}$$

где

$$A\left(q\right) = \int\limits_0^1 \max\left\{w\left(1-q\right), \left(1-w\right)q\right\} S\left(\mathrm{d}w\right). \tag{14}$$

Функцию $A\left(q\right)$ называют функцией зависимости, поскольку она характеризует статистическую связь величин вне зависимости от их частных распределений. Здесь S — конечная мера на $[0;1]$. Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы

$$\int\limits_0^1 wS\left(\mathrm{d}w\right) = \int\limits_0^1 \left(1-w\right) S\left(\mathrm{d}w\right) = 1. \tag{15}$$

Для любого $w \in [0;1]$, $\max\left\{w\left(1-q\right), \left(1-w\right)q\right\}$ — выпуклая функция и, следовательно, $A\left(q\right)$ также выпуклая. Помимо этого функция $A\left(q\right)$ ограничена 1 сверху и $\max\left\{q, 1-q\right\}$ снизу.

Определение 2. Будем называть $H\left(x, y\right)$ — двумерным распределением Парето с положительной областью определения, если существует выпуклая функция на $[0,1]$, удовлетворяющая условию $A\left(0\right) = A\left(1\right) = 1$ и $\max\left\{w, 1-w\right\} \leqslant A\left(w\right) \leqslant 1$, такая, что для $\left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}_+^2$ и $\left(x, y\right) \geqslant \left(0, 0\right)$

$$\bar{H}\left(x, y\right) = \frac{\left(\frac{1}{x+x_0} + \frac{1}{y+y_0}\right) A\left(\frac{x+x_0}{x+x_0+y+y_0}\right)}{\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0}\right) A\left(\frac{x_0}{x_0+y_0}\right)}. \tag{16}$$

Таким образом, построение двухмерного обобщённого распределения Парето со стандартными частными распределениями Фреше сводится к моделированию функции зависимости.

Нами использовались следующие модели функции зависимости.

Асимметричная смешанная модель

$$A\left(w\right) = 1 - \theta w\left(1-w\right) - \varphi w\left(1-w^2\right), \quad \theta \geqslant 0, \quad \theta + 2\varphi \leqslant 1, \quad \theta + 3\varphi \geqslant 0, \tag{17}$$

которая соответствует экспоненциальной мере

$$\mu_* \left[\mathbf{0}, (x, y)\right]^c = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{\varphi + \theta}{x+y} - \frac{\varphi x}{\left(x+y\right)^2}.$$

Данная модель является обобщением симметричной смешанной модели ($\varphi = 0$), случай независимости соответствует значениям параметров $\varphi = \theta = 0$. Смешанные модели не позволяют описать случай полной зависимости случайных величин. В связи с чем, нами также была использована из класса логистических моделей.

Асимметричная логистическая модель [5]

$$\begin{gathered} A\left(w\right) = 1 - \left[\left(1-w\right)\beta + \alpha w\right] + \left(\alpha^R w^R + \beta^R \left(1-w\right)^R\right)^{\frac{1}{R}}, \\ R \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \end{gathered} \tag{18}$$

выражение экспоненциальной меры для которой имеет следующий вид:

$$\mu_* [\mathbf{0}, (x, y)]^c = \frac{1-\beta}{x} + \frac{1-\alpha}{y} + \left(\left(\frac{\beta}{x}\right)^R + \left(\frac{\alpha}{y}\right)^R \right)^{\frac{1}{R}}.$$

Данная модель является обобщением симметричной логистической модели ($\alpha = \beta = 0$), полной независимости соответствует значение параметра $R = 1$, при $R \to \infty$ модель описывает случай полной зависимости.

Обобщённая симметричная логистическая модель

$$A(w) = \left((1-w)^p + w^p + k\left((1-w)\,w\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < k \leqslant 2(p-1), \quad p \geqslant 2, \tag{19}$$

имеет экспоненциальную меру

$$\mu_* ([\mathbf{0}, (x, y)]^c) = \left(\frac{1}{x^p} + \frac{1}{y^p} + \frac{k}{(xy)^{p/2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что для $k = 2$ данная модель вырождается в логистическую с параметром $p \geqslant 2$. Случай полной зависимости соответствует значениям параметров $k = 2$ и $p \to \infty$.

Обобщённая смешанная симметричная модель

$$A(w) = 1 - \frac{k}{\left((1-w)^{-p} + w^{-p}\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < k \leqslant 1, \quad p \geqslant 0, \tag{20}$$

экспоненциальная мера которой имеет следующий вид:

$$\mu_* ([\mathbf{0}, (x, y)]^c) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - k\left(\frac{1}{x^p + y^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В этой модели случай независимости соответствует значениям параметров $k = 0$ либо $p = 0$. Полная зависимость достигается для $k = 1$ и $p \to \infty$. Любая другая смешанная модель не позволяет описать случая полной зависимости.

4. Численные эксперименты

Нами были проведены численные эксперименты по аппроксимации хвоста совместной функции распределения 4246 пар логарифмических приращений фондовых индексов Dow Jones и NASDAQ за период 01.01.1950–10.08.2005. Мы использовали двумерное обобщённое распределение Парето с положительной областью распределения для описания распределения совместных превышений пороговых значений x_0, y_0. Поскольку структура статистической зависимости рассматриваемых данных не обладала асимметрией, нами использовались симметричные модели функции зависимости. На основе обобщённой симметричной логистической модели (19) с учётом (16) может быть получено следующее представление BGPD

$$\bar{H}(x, y) = \frac{\left((x+x_0)^{-p} + (y+y_0)^{-p} + k\big((x+x_0)(y+y_0)\big)^{-p/2}\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(x_0^{-p} + y_0^{-p} + k\,(x_0 y_0)^{-p/2}\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad x, y \geqslant 0. \tag{21}$$

Соответствующее BGPD для обобщённой симметричной смешанной модели (20) имеет следующий вид:

$$\bar{H}(x, y) = \frac{\frac{1}{x+x_0} + \frac{1}{y+y_0} - \frac{k}{\left((x+x_0)^p + (y+y_0)^p\right)^{\frac{1}{p}}}}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} - \frac{k}{\left(x_0^p + y_0^p\right)^{\frac{1}{p}}}}, \quad x, y \geqslant 0. \tag{22}$$

Поскольку выражения (21) и (22) справедливы лишь в случае стандартных частных распределений Фреше, необходимо преобразовать наблюдения следующим образом:

$$\begin{aligned} x^* &= \varPhi_1^{-1}\left(1-\left(1+\frac{\gamma_1\left(x-x_0\right)}{\sigma_1}\right)^{-1/\gamma_1}\right), \\ y^* &= \varPhi_1^{-1}\left(1-\left(1+\frac{\gamma_2\left(y-y_0\right)}{\sigma_2}\right)^{-1/\gamma_2}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

где γ_1, σ_1, γ_2, σ_2 — параметры соответствующих частных обобщённых распределений Парето.

Для оценивания параметров модели нами использовался метод максимального правдоподобия. Наблюдаемые превышения порогов нами были разделены на три класса: $A = \{(x_i, y_i) : x_i \geqslant x_0, y_i \geqslant y_0\}$, $B = \{(x_i, y_i) : x_i \geqslant x_0, y_i < y_0\}$, $C = \{(x_i, y_i) : x_i < x_0, y_i \geqslant y_0\}$, для аппроксимации совместного распределения превышений из класса A нами использовалось двухмерное обобщённое распределение Парето, тогда как для классов B и C мы использовали одномерные функции распределения, поскольку имели место превышения лишь одного из порогов. Функция правдоподобия имеет следующий вид

$$L\left(\theta; x, y\right) = \prod_{i=1}^{n_A} h\left(x_i, y_i\right) \cdot \prod_{j=1}^{n_B} f_1\left(x_j\right) \cdot \prod_{k=1}^{n_C} f_2\left(y_k\right),$$

где

$$h\left(x, y\right) = -\frac{\partial^2 \bar{H}\left(x, y\right)}{\partial x \partial y}, \quad f_1\left(x\right) = -\frac{\partial \bar{H}\left(x, 0\right)}{\partial x}, \quad f_2\left(y\right) = -\frac{\partial \bar{H}\left(0, y\right)}{\partial y}.$$

Параметры функции зависимости могут быть оценены отдельно от параметров частных функций распределения. В работе [6] предлагается метод оценивания параметров функции зависимости методом наименьших квадратов по её эмпирическим значениям:

$$\hat{w}_i = \frac{x_i}{x_i + y_i}, \quad \hat{A}\left(\hat{w}_i\right) = \frac{\hat{H}\left(x_i, y_i\right)}{x_i + y_i}.$$

Пример 1. Обобщенная симметричная логистическая модель.

Нами было проведено оценивание параметров двухмерного обобщённого распределения Парето с обобщённой симметричной логистической функцией зависимости для различных значений порогов в диапазоне от $0,005$ до $0,075$. Для проверки качества приближения нами использовался критерий согласия Колмогорова–Смирнова, наиболее оптимальными значениями порогов в нашем случае являлись $(0,02,\ 0,02)$. В табл. 1 приведены значения параметров, а также значения статистик для критерия согласия.

Пример 2. Обобщённая смешанная симметричная модель.

Нами также была использована обобщённая смешанная симметричная модель функции зависимости. Результаты оценивания параметров обобщённого распределения Парето приведены в табл. 2. Случай для порогов $(0,02,\ 0,02)$ приведён на рис. 1.

С использованием модели хвоста функции распределения нами были построены квантильные линии для различных уровней значимости α, определяемые как

$$\left\{(x, y) : P\left(X > x, Y > y\right) = \alpha\right\},$$

которые могут быть использованы при описании областей инвестиционных предпочтений [7].

Таблица 1

Оценки параметров обобщённой симметричной логистической модели

x_0	y_0	σ_1	γ_1	$\widehat{K}_{1,1-\alpha}^{-1}$	σ_2	γ_2	$\widehat{K}_{2,1-\alpha}^{-1}$	k	p	$\widehat{K}_{1-\alpha}^{-1}$
$0,02$	$0,02$	$0,005$	$-0,275$	$0,65$	$0,01$	$-0,005$	$0,71$	$2,065$	$2,12$	$0,85$

Таблица 2

Оценки параметров обобщённой смешанной симметричной модели

x_0	y_0	σ_1	γ_1	$\widehat{K}_{1,1-\alpha}^{-1}$	σ_2	γ_2	$\widehat{K}_{2,1-\alpha}^{-1}$	k	p	$\widehat{K}_{1-\alpha}^{-1}$
$0,02$	$0,02$	$0,005$	$-0,275$	$0,65$	$0,01$	$-0,005$	$0,71$	$1,000$	$0,38$	$0,889$

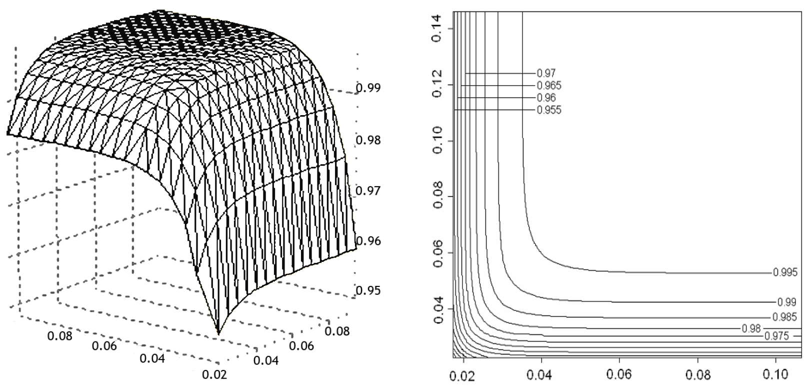

Рис. 1. Функция распределения в надпороговой области (слева), квантильные линии (справа)

5. Выводы

В работе обобщён и обоснован пороговый метод моделирования многомерных экстремальных величин. С его использованием введено понятие многомерного обобщённого распределения Парето на основе представления максимум-устойчивых распределений Резника–де Хаана. Исследованы двухмерные обобщённые распределения Парето на основе представления Пикандса с различными моделями функций зависимости.

Рассматривается применение двухмерного обобщённого распределения Парето для оценивания рисков инвестирования в условиях высокой волатильности. Нами были проведены вычислительные эксперименты по верификации и калибровке предложенных моделей на данных мировых фондовых индексов, в частности на примере индексов Dow Jones и NASDAQ, показана высокая эффективность построенных моделей и алгоритмов оценивания параметров для решения задач по оцениванию инвестиционных рисков в условиях высокой волатильности.

Литература

1. *Щетинин Е. Ю.* Методы характеризации функций распределения многомерных экстремальных величин // Сб. научных трудов МГТУ СТАНКИН. — Вып. 8. — 2005.

2. *de Haan L., Resnick S. I.* Limit theory for multivariate sample extremes // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie v. Geb. — Vol. 40. — 1977. — Pp. 317–337.
3. *Pickands J.* Multivariate extreme value distributions // Proc. 43rd Session I.S.I. — 1981. — Pp. 859–878.
4. *Coles S. G., Tawn J. A.* Modeling multivariate extreme events // J. R. Statist. Soc. — Vol. 53. — 1991. — Pp. 377–392.
5. *Tawn J. A.* Bivariate extreme value theory: Models and estimation // Biometrika. — Vol. 75. — 1988. — Pp. 397–415.
6. *Щетинин Е. Ю.* Математические модели и методы количественного анализа фондовых рынков с высокой волатильностью. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. — Тверь, 2006.
7. *Щетинин Е. Ю.* О новых подходах к управлению компаний в чрезвычайных ситуациях // Финансы и кредит. — № 30 (198). — 2005.

UDC 519.6

On New Method of Multivariate Extreme Values Modeling Based on Threshold Approach

K. M. Nazarenko

Practice Math Department
Moscow State Technological University "STANKIN"
Vadkovsky per., 3a, Moscow, Russia, 119137

We introduce generalized threshold approach for multivariate extreme values modeling. Using this approach we suggest multivariate generalized Pareto distribution definition. Bivariate generalized Pareto distribution based on Pickands' representation has been examined with different statistical dependence function models. Numerical experiments with stock indexes data have been performed showing high efficiency of suggested models and calculation algorithms.