

---

# Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

УДК 621.39

## Применение жидкостных моделей к анализу одноранговой сети

Ю. В. Гайдамака, Е. В. Бобрикова, Е. Г. Медведева

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В статье показано применение жидкостных моделей к анализу потоков в инфокоммуникационных сетях. Модели, исследованные в статье, учитывают особенности получивших широкое распространение одноранговых P2P-сетей, использующихся для обмена файлами, параллельных вычислений, IP-телефонии, передачи потокового видео и др. В статье проведён обзор основных типов P2P-сетей и связанных с ними аналитических моделей. В построенных в статье жидкостных моделях сетевой трафик описывается в терминах изменения во времени скоростей потоков данных между пользователями и числа пользователей сети. Первая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет анализировать среднее время загрузки файла. Вторая модель в виде дифференциального уравнения в частных производных является расширением первой и учитывает случайный объем данных, запрашиваемых пользователями. Она может быть использована для анализа как устойчивого состояния системы при загрузке, так и неустановившегося состояния, и подходит для исследования поведения системы при большом числе пользователей. Помимо среднего времени загрузки файла вторая модель, учитывающая состав присутствующих в сети пользователей, позволяет анализировать такие показатели эффективности сети, как число личеров и сидов в сети.

**Ключевые слова:** одноранговая сеть, жидкостная модель, личер, сид, пир, время загрузки файла

## 1. Введение

Жидкостные модели традиционно используются для анализа потоков в инфокоммуникационных сетях. Эти модели в виде систем дифференциальных уравнений описывают эволюцию потоков данных и позволяют анализировать самые разнообразные параметры системы — число узлов сети, скорости передачи данных, очереди в узлах сети, механизмы управления скоростью передачи и др. После появления в начале 2000 гг. технологии P2P (англ. peer-to-peer) и последующего широкого распространения основанных на ней одноранговых сетей жидкостные модели стали использоваться для анализа потоков в таких сетях. Для файлообменных одноранговых сетей, основанных на протоколе BitTorrent [1] (так называемых «BitTorrent-like» сетей), жидкостные модели позволяют анализировать скорость загрузки файла в зависимости от динамики числа пользователей в сети. Важным отличием жидкостных моделей от других математических моделей одноранговых сетей является возможность исследовать с их помощью поведение сети при большом числе пользователей, а также учитывать возможные резкие изменения числа пользователей сети, связанные с массовым подключением или отключением пользователей, заинтересованных в получении данных (англ. peers churn).

В статье проведён обзор основных типов P2P-сетей и связанных с ними аналитических моделей, к которым относятся модели в виде цепей Маркова, модели

---

Статья поступила в редакцию 8 сентября 2016 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 14-07-00090, 15-07-03051, 15-07-03608.

Авторы благодарят зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН проф. К.Е. Самуйлова за полезные советы при подготовке статьи.

теории массового обслуживания и жидкостные модели. В разделе 2 статьи изложены основные принципы однорангового обмена в P2P-сетях, наложенных на инфокоммуникационную сеть Интернет. Проведена классификация P2P-сетей с точки зрения механизмов обработки запроса и топологии сети. Показаны примеры моделей сетей в виде цепей Маркова, систем и сетей массового обслуживания. В разделе 3 статьи построены две жидкостные модели, в которых сетевой трафик описывается в терминах изменения во времени скоростей потоков данных между пользователями и числа пользователей сети. Первая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет анализировать среднее время загрузки файла для сети, где пользователи запрашивают файлы одинакового объёма. Во второй модели объём файла является случайной величиной с заданным распределением. В заключении статьи на основании проведённого анализа сделаны выводы о масштабируемости файлообменного механизма.

## 2. Основные принципы однорангового обмена

Концепция P2P возникла из необходимости преодоления некоторых ограничений классических методов обмена ресурсами, основанных на принципе клиент/сервер. Сеть, устроенная по принципу P2P — это распределённая система без или с минимальным централизованным управлением и с разной вычислительной мощностью каждой машины в сети. Применения P2P-сетей разнообразны, в качестве примера можно привести мультикаст-приложения, параллельные вычисления, обмен файлами, IP-телефония, обмен мгновенными сообщениями, поисковые системы и др. Этот тип сети характеризуется, как правило, хорошей масштабируемостью и очень высокой динамичностью (приход абонентов в сеть/уход абонентов из сети), [2].

P2P-сети получили беспрецедентное развитие, что сопровождалось значительным ростом их сложности. Большой интерес в связи с этим представляют аналитические модели, которые позволяют за короткое время рассчитывать характеристики сети, оценивать её производительность и дают хорошее представление о работе системы при низких затратах на проведение исследований по сравнению с другими методами оценки производительности P2P-сетей, такими как измерения и имитационный подход. Основными моделями, используемыми исследователями при изучении P2P-сетей, являются модели теории вероятностей [3], теории случайных процессов, в частности, цепи Маркова [4–8], не так давно стали применяться модели теории массового обслуживания [9, 10].

P2P-сети предоставляют возможности большому числу (сотням тысяч) узлов сотрудничать в целях обмена ресурсами. Узлы сети являются равноправными, и никакой из узлов не осуществляет специальное управление и не выполняет административные функции. Поскольку обслуживание распространяется на все участвующие узлы, то сеть должна хорошо масштабироваться даже при очень больших её размерах. Технология P2P, обладающая возможностью обходить узкие места и хорошей отказоустойчивостью, предназначена для использования в крупномасштабных распределённых средах, где пользователи, определяющие узлы сети, называемые также пирами (англ. peer) могут делиться своими ресурсами (например, вычислительной мощностью, ёмкостью, пропускной способностью) автономно и децентрализованно. Принцип P2P достаточно успешно реализуется в таких областях, как, например, общий доступ к файлам, совместное использование вычислительных мощностей, обмен мгновенными сообщениями. Пир может играть роль клиента, когда он потребляет ресурсы, роль сервера, когда он предлагает ресурсы, роль маршрутизатора, когда он распространяет запросы, полученные от других узлов сети, и роль узла-источника данных при обмене данными с другими пирами. Существует множество типов P2P-сетей, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Они различаются как механизмом обработки запроса, так и логической топологией, поэтому можно выделить три семейства P2P-сетей: централизованные сети, децентрализованные (структурированные и неструктурированные) сети и смешанные сети.

Централизованная сеть включает в себя единственный сервер, который напрямую связывает всех подключённых пиров и идентифицирует файлы, предлагаемые другими клиентами. Преимущество этой методики заключается в централизованной индексации всех каталогов и названий общих файлов, содержащихся у пользователей сети. Клиент отправляет запрос на сервер, и тот возвращает список пиров, подключённых в данный момент и имеющих нужные файлы. Передача файлов будет осуществляться между конечными пользователями без участия сервера. При таких условиях файлы можно считать хранящимися на центральном сервере. Централизованные сети такого вида плохо масштабируются и содержат единственную точку отказа (англ. a single point of failure). Примером такой сети является Napster [11].

Децентрализованные неструктурированные сети называются также чистыми P2P-сетями, в которых все узлы равноправны: нет сервера, нет привилегированных узлов, каждый узел имеет высокую степень автономности. Узлы упорядочены произвольно (случайным образом) по отношению к обнаружению желаемого контента. Для поиска требуемого ресурса запрос будет пересылаться от одного пира к другому до тех пор, пока не достигнет клиента, имеющего желаемый ресурс. Чтобы избежать слишком долгого блуждания по сети в поисках ресурса, система идентифицирует каждый запрос со значением таймера TTL (Time To Live), это значение обычно равно 7 (как в http). При достижении таймером значения 0 запрос не возвращается. Главный недостаток этого механизма связан с ограничением времени поиска из-за истечения времени таймера, так что поиск ресурса прекращается, хотя необходимый файл доступен в P2P-сети. Как правило, эти сети плохо масштабируются из-за высокого объёма сигнального трафика. С другой стороны, такие сети предоставляют пользователям очень высокий уровень анонимности. Наиболее известные примеры таких сетей Gnutella [12] и FreeNet [13].

Из-за проблемы, связанной с обменом большого числа сообщений в неструктурированных P2P-сетях, возникли структурированные P2P-сети. Здесь расположение узлов представляет собой строгую геометрическую структуру и используется вариант технологии распределённой хэш-таблицы (Distributed Hash Table (DHT)). Такие P2P-сети строятся как структурированное наложение, где каждый узел содержит определённый набор контента (или набор указателей на расположение контента). Эти сведения часто используются для выбора направления маршрутизации запросов/сообщений в системе. Поэтому поиск контента детерминирован и эффективен. В качестве примеров таких систем можно назвать Chord, HPM [14].

Смешанная P2P-сеть сложнее в реализации, так как она сочетает в себе элементы централизованной и децентрализованной (распределённой) сетей. В основе смешанной сети лежит набор серверов, управляющий группой пользователей согласно централизованной архитектуре. Каждый сервер в свою очередь связан с другими серверами посредством распределённой архитектуры. Таким образом, если пользователь ищет файл, который не индексируется сервером, к которому этот пользователь прикреплен, то запрос пересылается на другой сервер. Это архитектура помогает улучшить пропускную способность наряду с сокращением трафика запросов.

### 3. Жидкостные модели

Аналитические модели для прогнозирования поведения сети строятся с учётом типа P2P-сети. На этапе проектирования сети применяются как методы имитационного моделирования, так и построение математических моделей. Последнее безусловно является более дешёвым и эффективным вариантом.

Для изучения ёмкости (англ. capacity) файлообменной P2P-сети типа BitTorrent в неустойчивом состоянии используется однородный ветвящийся процесс; в устойчивом состоянии простейшая марковская модель [4]. Оказывается, в неустойчивом состоянии ёмкость сети растёт экспоненциально и стабилизируется в устойчивом состоянии. Разделение контента на части и параллельная их раздача, организованные

оптимальным образом, помогают улучшить производительность P2P-сети, что особенно важно для случая, когда пиры интенсивно покидают сеть. Марковская модель, предложенная в [4], служит основой для построения простой детерминированной жидкостной модели, рассматриваемой в [5, 15, 16]. Жидкостная модель используется для изучения изменения числа пиров в сети, а также для анализа среднего времени загрузки в файлообменных сетях типа BitTorrent [15]. В модели учитывается состав пользователей сети, а именно личеры и сиды. В файлообменных сетях личером называется пользователь, который не имеет полной копии файла. Это либо вновь пришедший пользователь, который только начинает загружать файл, либо пользователь, одновременно загружающий отсутствующие у него части файла и раздающий имеющиеся части, но не имеющий файл целиком. Как только личер полностью загрузил себе файл, он становится сидом, то есть пользователем, который уже имеет весь файл целиком и раздаёт части этого файла личерам. Построим базовую модель [15] в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Итак, пусть  $x(t)$  — число личеров в сети и  $y(t)$  — число сидов в сети в момент  $t > 0$ ,  $\lambda$  — интенсивность поступления личеров в сеть и  $\mu$  — интенсивность раздачи данных пользователем любого типа (личером или сидом). Будем считать, что все пользователи сети имеют одинаковую интенсивность раздачи, и обозначим  $C > \mu$  — интенсивность загрузки данных пользователем любого типа. Личеры могут прервать или отменить процесс загрузки файла, например, если файл долго загружается, и пользователь не хочет ждать завершения загрузки,  $\theta$  — интенсивность отмены личером процесса загрузки. Личер, который успешно загрузил все части файла, может сразу покинуть сеть или остаться в ней в качестве сида на некоторое случайное время,  $\gamma$  — интенсивность ухода сидов из сети. Кроме того, возможно, что не все личеры участвуют в процессе раздачи данных — некоторые только закачивают данные и не раздают их,  $\eta$  — эффективность обмена файлами, которая соответствует доле личеров, участвующих в процессе раздачи данных,  $\eta \in [0, 1]$ .

Изменение числа пользователей  $x(t)$  и  $y(t)$  файлообменной P2P-сети описывается простейшей жидкостной моделью, которая является системой ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - (\min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} + \theta x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} - \gamma y(t). \end{cases} \quad (1)$$

Проанализируем некоторые характеристики системы (1). Предположим, что в некоторый момент в сети установилось постоянное число пользователей, т.е. выполняются условия

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

Тогда из (1) имеем

$$\begin{cases} 0 = \lambda - \theta \bar{x} - \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\}, \\ 0 = \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\} - \gamma \bar{y}, \end{cases}$$

где  $(\bar{x}, \bar{y})$  — точка покоя или положение равновесия системы (1). В [5] показано, что точка покоя  $(\bar{x}, \bar{y})$  системы (1) асимптотически устойчива.

Рассматривая случай, когда суммарная интенсивность загрузки не превосходит суммарной интенсивности раздачи, т.е.  $C\bar{x} \geq \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})$ , и противоположный случай,

получаем следующие соотношения для  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\lambda}{\beta(1 + \theta/\beta)}, \\ \bar{y} = \frac{\lambda}{\gamma(1 + \theta/\beta)}, \end{cases}$$

где  $\frac{1}{\beta} := \max \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right) \right\}$ . Формула Литтла в данном случае имеет вид:

$$\frac{\lambda - \theta\bar{x}}{\lambda} \bar{x} = (\lambda - \theta\bar{x})T,$$

где  $T$  — среднее время загрузки файла, а  $\lambda - \theta\bar{x}$  представляет собой интенсивность успешного окончания загрузки. Используя здесь полученные соотношения для  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , находим, что среднее время загрузки файла имеет вид

$$T = \frac{1}{\theta + \beta}. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет сделать следующие выводы:

- среднее время загрузки  $T$  не зависит от интенсивности  $\lambda$  поступления личеров, поэтому файлообменные сети хорошо масштабируются;
- при увеличении доли  $\eta$  раздающих личеров время  $T$  загрузки файла уменьшается;
- при увеличении интенсивности  $\gamma$  ухода сидов время  $T$  загрузки файла увеличивается, поскольку уменьшается число раздающих пользователей и, как следствие, обеспечиваемая ими скорость раздачи;
- при увеличении интенсивности  $C$  загрузки время  $T$  загрузки уменьшается, однако, с достижением интенсивностью  $C$  значения, при котором выполняется неравенство

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right),$$

дальнейшее увеличение интенсивности  $C$  не приводит к уменьшению времени  $T$ , время  $T$  остаётся постоянным.

Обратим внимание на случай, когда интенсивность  $C$  загрузки пользователей больше, чем интенсивность раздачи  $\mu$ . Это ограничение возникает, например, при передаче данных по широко распространённой технологии асимметричной цифровой абонентской линии (англ. Asymmetric Digital Subscriber Line, ADSL), когда доступная полоса пропускания канала распределена между исходящим и входящим трафиком асимметрично.

Из формулы для  $\beta$  следует, что, если интенсивность  $\gamma$  ухода сидов из системы меньше интенсивности раздачи  $\mu$ , то интенсивность  $C$  загрузки определяет производительность сети, т.е.  $\beta = C$ .

Прокомментируем случай  $\eta = 0$ , когда личеры не участвуют в процессе раздачи данных, а только загружают данные от сидов. Если  $\gamma < \mu$ , выше сделанные выводы для случая  $\eta > 0$  остаются в силе, и  $T = 1/C$ . В противном случае, если  $\gamma > \mu$ , из системы (1) следует, что

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq (\mu - \gamma)y(t).$$

Это означает, что число сидов  $\gamma(t)$  уменьшается, по крайней мере, экспоненциально. Таким образом, при  $\gamma > \mu$  число сидов будет экспоненциально стремиться к нулю, и система прекратит функционирование. Отметим, что при  $\eta > 0$  система

достигнет стационарного состояния независимо от значения интенсивности  $\gamma$  ухода сидов из системы. Поэтому в файлообменных P2P сетях важно, чтобы личеры раздавали друг другу данные. Даже если файлообмен не является эффективным (т.е.  $\eta \rightarrow 0$ ), участие личеров в процессе раздачи играет важную роль в поддержании функционирования системы.

В [5] обсуждаются другие особенности сетей типа BitTorrent, такие как эффективность загрузки и стимулирующие механизмы.

Отметим, что модель в [5] позволяет получить в явном виде условия равновесия системы и его устойчивости. Модель в [5] является прямой предшественницей обобщения в виде представленной далее модели на основе дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП).

В данном разделе построена жидкостная модель, описывающая динамику числа и состава пользователей (личеры и сиды) и особенности процесса загрузки частей файла в P2P-сети [17]. Модель является расширением ранее построенных моделей, в частности [4, 5, 15], и представляет собой ДУЧП. Построенная модель может быть использована для анализа как устойчивого состояния системы, когда число и состав пользователей не изменяются, так и неустановившегося состояния. Отметим также, что указанная модель подходит для описания обычного поведения системы при большом числе пользователей.

Рассмотрим P2P-сеть [4], где поступление новых пиров в сеть представляет собой пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ . Каждый пир  $n$  требует некоторого количества контента  $\sigma_n$  которое будем считать случайным с сопряжённой интегральной функцией распределения  $H(\sigma) := P(\sigma_n > \sigma)$ . Будем считать, что  $H$  является нормированной, такой что  $E[\sigma_n] = \int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma = 1$ . Пример  $H(\sigma)$  в экспоненциальном случае:  $H(\sigma) = e^{-\sigma}$  и в детерминированном случае:  $H(\sigma) = 1_{[0,1)}(\sigma)$ , где все пиры требуют одинаковый объем контента. Обозначим через  $x(t)$  общее количество личеров, присутствующих в системе в момент времени  $t$ .

Предположим, что общее число сидов в системе фиксировано и равно  $y_0$ , личеры после окончания загрузки полного файла немедленно покидают систему. Это идеализация довольно распространённой на практике ситуации, когда торренты в основном полагаются на группу постоянно присутствующих в системе сидов. Предполагается, что все действующие пиры участвуют в раздаче одинаково, пропускную способность раздачи каждого пира обозначим через  $\mu$  (количество контента в секунду).

Состояние системы определяется объёмом контента, который осталось загрузить каждому присутствующему в сети пиру, чтобы иметь полную копию запрошенного файла. Пусть  $F(t, \sigma)$  число личеров, у которых в момент  $t$  остаточная нагрузка больше чем  $\sigma$ . Если размер системы большой, мы можем считать функцию  $F(t, \sigma)$  жидкостной (действительной) переменной. Если личеры обслуживаются со скоростью  $r$  (возможно зависящей от общего числа пиров), то эволюционное уравнение для  $F(t, \sigma)$  имеет вид:

$$F(t + dt, \sigma) = F(t, \sigma + rdt) + \lambda H(\sigma) dt.$$

Первое слагаемое в правой части равенства определяет загрузку контента, второе слагаемое отвечает за вновь прибывших пиров.

Вычитая  $F(t, \sigma)$  из обеих частей данного равенства, деля на  $dt$ , и устремляя  $dt$  к нулю, мы приходим к следующему уравнению (ДУЧП) состояния системы:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda H(\sigma) + r \frac{\partial F}{\partial \sigma}.$$

Чтобы полностью задать модель, нужно выбрать подходящую функцию  $r = r(F, y, \sigma)$ . Введём следующие предположения, которые соответствуют принципам обмена данными в BitTorrent-like системах:

1) для обмена данными используется общая пропускная способность раздачи всех пользователей, личеров и сидов, т.е.  $\bar{R}_{up} = \mu(x + y_0)$ ;

2) полоса пропускания распределяется равномерно между всеми загружающими пирами независимо от состояния их процесса загрузки, т.е. в системе используется дисциплина равномерного разделения процессора (англ. Processor Sharing, PS).

В этих предположениях скорость загрузки данного личера при числе личеров  $x$  определяется равенством  $r = \mu \left( \frac{x+y_0}{x} \right)$  и, следовательно, динамика системы описывается следующим ДУЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda H(\sigma) + \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

где  $x(t) := F(t, 0)$  — число личеров в сети и  $F(t, \infty) = 0$  — граничное условие для любого  $t$ .

В качестве примера рассмотрим случай экспоненциальной функции распределения  $H(\sigma) = e^{-\sigma}$ . В этом случае решение можно искать разделением переменных, т.е. в виде  $F(t, \sigma) = x(t)e^{-\sigma}$ . Подставляя указанную функцию в уравнение (3), после преобразований получаем

$$\dot{x}(t) = \lambda - \mu(x(t) + y_0). \quad (4)$$

Это ОДУ рассмотрено в [15], т.е. представляет собой первое уравнение системы (1) с учётом введённых выше предположений. Уравнение (4) описывает случай фиксированного числа сидов. Предположение об экспоненциальной функции распределения  $H(\sigma)$  объёма запрашиваемого контента соответствует случаю, когда контент представляет собой набор файлов, и пиры могут быть заинтересованы в разных его частях, поэтому объём запрашиваемого контента может быть случайной величиной с заданным распределением. На практике более интересен случай, когда все пиры требуют один и тот же контент (файл или набор файлов фиксированного размера), так что функция распределения детерминированная и имеет вид  $H(\sigma) = 1_{[0,1]}(\sigma)$ . В данном случае уравнение (3) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda + \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (5)$$

для  $0 \leq \sigma \leq 1$  с граничным условием  $F(t, 1) = 0$  для любого  $t$ . В [17] показано аналитически и подтверждено имитационным моделированием, что ДУЧП (5) описывает динамику системы точнее, чем ОДУ (4).

Проанализируем равновесие динамического уравнения (3). Значения параметров системы в положении равновесия будем обозначать символами со звёздочкой \*. Полагая  $\partial F / \partial t = 0$  и интегрируя на положительной вещественной полуоси, получаем

$$\lambda \int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma + \mu \left( \frac{x^* + y_0}{x^*} \right) \int_0^{\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} d\sigma = 0.$$

Из условия нормировки  $\int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma = 1$  и из условий для  $F$  имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} d\sigma = -F^*(0) = -x^*.$$

Итак, в положении равновесия число личеров должно удовлетворять следующему условию:

$$\lambda - \mu(x^* + y_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию  $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ , которая является аналогом предложенной нагрузки на систему, здесь  $\frac{1}{\mu}$  — среднее время загрузки файла. Если  $\rho < y_0$ , сиды могут справляться с нагрузкой без помощи личеров, и мы имеем систему, поддерживаемую сидами. В данном случае, не существует равновесия при положительном  $x^*$  и решение ДУЧП приближается к 0 при  $t \rightarrow \infty$ .

Наиболее важным является случай, когда  $\rho > y_0$ . Здесь сиды в одиночку не могут справиться с нагрузкой, и система может быть стабилизирована только с помощью вклада личеров. Вводя функцию  $\bar{H} = \int_0^{\infty} H(s) ds$ , связанную с распределением остаточного времени жизни из теории восстановления, используя граничное условие  $F^*(\infty) = 0$ , условие равновесия примет вид

$$F^*(\sigma) = (\rho - y_0)\bar{H}(\sigma). \quad (6)$$

Поэтому в положении равновесия в системе присутствуют  $x^* = \rho - y_0$  личеров, при этом суммарный объем контента, который осталось загрузить всем присутствующим в сети личерам, имеет распределение остаточного времени жизни  $\bar{H}$ . Для случая детерминированного распределения  $H(\sigma) = 1_{[0,1)}(\sigma)$  имеем  $\bar{H}(\sigma) = 1 - \sigma$  для  $\sigma \in [0, 1]$ . Из (6) следует, что в этом случае в положении равновесия и сиды, и личеры участвуют в процессе загрузки.

Для анализа локальной устойчивости равновесия (6) вводим дополнительные переменные  $\delta x$ ,  $f$ , такие что  $x = x^* + \delta x$  и  $F = F^* + f$ , и возмущающую функцию  $n(t)$  в поступления пиров. Тогда (3) принимает вид

$$\frac{\partial(F^* + f)}{\partial t} = (\lambda + n(t))H(\sigma) + (r^* + \delta r)\frac{\partial(F^* + f)}{\partial \sigma}.$$

Используя условие равновесия и отбрасывая слагаемые высшего порядка, можно получить линейризованное уравнение. Далее, используя методы теории управления с обратной связью, можно установить локальную устойчивость системы около положения равновесия и оценить отклонение от равновесия.

Рассмотрим случай, когда отсутствует поступление личеров в сеть, следовательно, спустя конечное время система опустошится вследствие того, что все имеющиеся в сети личеры закончили загрузку. Оценим время до окончания загрузки. В уравнении (3) исключим слагаемое, отвечающее за поступление личеров в сеть:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma}.$$

Предполагаем, что  $F(0, \sigma) = \varphi(\sigma)$  — строго убывающая дифференцируемая функция  $\sigma$ , причём  $x_0 := \varphi(0)$  — начальное число личеров и  $\varphi(\infty) = 0$ .

**Утверждение.** Время, необходимое для того, чтобы P2P-система с  $y_0$  пирами при начальном условии  $\varphi(\sigma)$  с дисциплиной обслуживания PS полностью опустошилась (время до окончания загрузки), определяется по формуле

$$T = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\varphi(\sigma) + y_0} d\sigma.$$



**Следствие.** В случае детерминированного распределения время до окончания загрузки  $T$  удовлетворяет неравенству

$$T \leq \frac{1}{\mu} \frac{x_0}{x_0 + y_0}. \quad (7)$$

При этом равенство в приведённом выше выражении достигается, когда начальное условие  $\varphi$  приближается к функции  $x_0 1_{[0,1)}(\sigma)$ .

Заметим, в частности, что  $T$  ограничена сверху величиной  $\frac{1}{\mu}$ , т.е. время до окончания конечно и не превышает среднего времени загрузки  $\frac{1}{\mu}$  — времени передачи копии файла. Эта единое ограничение сохраняется и не зависит от первоначального числа личеров. Это свидетельствует о хорошей масштабируемости файлообменного механизма P2P: если спрос большой, предложение изменяется в соответствии с ним.

Сравним выводы утверждения и следствия из него с аналогичными выводами для модели (4) на основе ОДУ, в которой не учитывается процесс загрузки. При отсутствии поступления личеров в сеть уравнение (4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = -\mu(x(t) + y_0), \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае время до окончания загрузки определяется по формуле

$$T' = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} \frac{1}{x + y_0} dx = \frac{1}{\mu} \log \left( 1 + \frac{x_0}{y_0} \right). \quad (8)$$

Итак, модель (4) даёт  $T' \rightarrow \infty$  при  $x_0 \rightarrow \infty$  только логарифмически. Имитационный эксперимент, выполненный с использованием сетевого симулятора ns2, показал, что оценка времени до окончания загрузки с помощью формулы (7) даёт лучшее приближение, чем оценка (8) для модели (4).

## 4. Заключение

Анализ построенных жидкостных моделей и проведённое имитационное моделирование подчёркивают хорошую масштабируемость P2P-сети. Исследование показало, что построенная в виде системы ОДУ модель (4), в которой не различаются требования к объёму файлов в процессе загрузки, не позволяет провести анализ этой важной характеристики сети. В таком анализе решающую роль играет информация об объёме файлов, запрашиваемых пользователями, учитывающаяся в построенной в виде ДУЧП модели (3).

В дальнейших исследованиях планируется рассмотреть обобщённую модель ДУЧП для случая присутствия в системе нескольких классов пиров с неоднородной пропускной способностью раздачи, а также для случая переменного числа сидов. В указанных случаях можно получить результаты, аналогичные приведённым выше, и также проверить их, используя имитацию пакетного уровня.

## Литература

1. The BitTorrent Protocol Specification. — [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003).
2. Amad M., Meddahi A., Aissani D. P2P Networks Management Survey // International Journal of Computer Sciences Issues (IJCSI). — 2012. — Vol. 9(1), No 3. — Pp. 143–148.

3. *Адаму А., Гайдамака Ю. В.* Аппроксимация нормальным законом вероятностных характеристик модели сети P2P TV // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 3. — С. 63–68.
4. *Yang X., de Veciana G.* Service Capacity of Peer to Peer Networks // Proceedings of IEEE INFOCOM. — Vol. 4. — 2004. — Pp. 2242–2252.
5. *Qiu D., Srikanth R.* Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks // Proceedings of ACM SIGCOMM. — Vol. 34, No 4. — 2004. — Pp. 367–378.
6. *Clevenot F., Nain P.* A Simple Model for the Analysis of the Squirrel Peer-to-Peer Caching System // Proceedings of IEEE INFOCOM. — 2004.
7. *Адаму А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К.* Построение и анализ модели воспроизведения каналов вещательного телевидения в P2P сети // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 3 (1). — С. 47–53.
8. *Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К.* Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // Т-Comm: Телекоммуникации и Транспорт. — 2013. — № 11. — С. 77–81.
9. *Ramachandran K. K., Sikdar B.* A Queuing Model for Evaluating the Transfer Latency of Peer-to-Peer Systems // Proceedings of IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems. — Vol. 21, No 3. — 2010. — Pp. 367–378.
10. *Mordji Z., Amad M., Aissani D.* A Derived Queuing Network Model for Structured P2P Architectures // VECoS 2014. — 2014. — Pp. 76–84.
11. Napster company info. — <http://us.napster.com/availability>.
12. The Gnutella Protocol Specification v0.4. — <https://gnunet.org/node/147>.
13. What is Freenet? Freenet company info. — <https://freenetproject.org>.
14. HPM: A Novel Hierarchical Peer-to-Peer Model for Lookup Acceleration with Provision of Physical Proximity / M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, Z. Zhangb // Journal of Network and Computer Applications. — 2012. — Vol. 35, No 6. — Pp. 1818–1830.
15. *Самуйлов К. Е., Бобрикова Е. В.* Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2012. — № 7. — С. 180–184.
16. *Бобрикова Е. В., Литвин А. А.* Динамика изменения числа пользователей файлообменной P2P-сети // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» 23–27 апреля 2012. — 2012. — С. 67–68.
17. *Ferragut A., Paganini F.* Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks // IEEE Trans. on Control of Network Systems. — Vol. 3(1). — 2016. — Pp. 34–45.

UDC 621.39

## The Application of Fluid Models to the Analysis of Peer-to-Peer Network

**Y. V. Gaidamaka, E. V. Bobrikova, E. G. Medvedeva**

*RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

The application of the fluid models to the analysis of the streams in information and communication networks is presented. The models, considered in the paper, take into account the specificities of widespread P2P networks (peer-to-peer), used for file-sharing, parallel computing, IP telephony, video streaming, etc. The review of the main types of P2P networks and their associated analytical models are presented in the paper. The fluid models, presented in the paper, describe network traffic in terms of the changes over time data stream rates between users and in terms of the number of network users. The first model is a system of ordinary differential equations and allows to analyze the average file download time. The second model is the extension of the first model and is represented in the form of partial differential equation. It takes

into account a random amount of data requested by users. It can be used to analyze both the transient state and steady state during the download. This model is suitable to study the behavior of the system with a large number of users. In addition to the average download time the second model, taking into account the population in the network, allows to analyze such parameters of the network performance as the number of leechers and seeders in the network.

**Key words and phrases:** peer-to-peer network (P2P), fluid model, leecher, seeder, peer, latency

## References

1. The BitTorrent Protocol Specification.  
URL [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003)
2. M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, P2P Networks Management Survey, International Journal of Computer Sciences Issues (IJCSI) 9(1) (3) (2012) 143–148.
3. A. Adamu, Y. V. Gaidamaka, Approximation of a Universal Streaming Probability with the Normal Distribution, Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Informatics. Physics” (3) (2011) 63–68, in Russian.
4. X. Yang, G. de Veciana, Service Capacity of Peer to Peer Networks, in: Proceedings of IEEE INFOCOM, Vol. 4, 2004, pp. 2242–2252.
5. D. Qiu, R. Srikant, Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks, in: Proceedings of ACM SIGCOMM, Vol. 34, 2004, pp. 367–378.
6. F. Clevenot, P. Nain, A Simple Model for the Analysis of the Squirrel Peer-to-Peer Caching System, in: Proceedings of IEEE INFOCOM, 2004.
7. A. Adamu, Y. V. Gaidamaka, A. K. Samuilov, Playback Model for Broadcast Television Channels in P2P Networks, Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Informatics. Physics” 3 (1) (2010) 47–53, in Russian.
8. Y. V. Gaidamaka, A. K. Samuilov, Analysis of Playback Continuity for Video Streaming in Peer-to-Peer Networks with Data Transfer Delays, T-Comm: Telecommunications and Transport (11) (2013) 77–81, in Russian.
9. K. K. Ramachandran, B. Sikdar, A Queuing Model for Evaluating the Transfer Latency of Peer-to-Peer Systems, in: Proceedings of IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems, Vol. 21, 2010, pp. 367–378.
10. Z. Mordji, M. Amad, D. Aissani, A Derived Queuing Network Model for Structured P2P Architectures, in: VECoS 2014, 2014, pp. 76–84.
11. Napster company info.  
URL <http://us.napster.com/availability>
12. The Gnutella Protocol Specification v0.4.  
URL <https://gnunet.org/node/147>
13. What is Freenet? Freenet company info.  
URL <https://freenetproject.org>
14. M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, Z. Zhangb, HPM: A Novel Hierarchical Peer-to-Peer Model for Lookup Acceleration with Provision of Physical Proximity, Journal of Network and Computer Applications 35 (6) (2012) 1818–1830.
15. K. E. Samouylov, E. V. Bobrikova, A Simple Fluid Model of P2P File Sharing Network, T-Comm: Telecommunications and Transport (7) (2012) 180–184, in Russian.
16. E. V. Bobrikova, A. A. Litvin, The Evolution of the Number of Peers in a P2P File Sharing System, in: Proceedings of All-Russian Conference with International Participation Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of IT-systems 23–27 April 2012, 2012, pp. 67–68, in Russian.
17. A. Ferragut, F. Paganini, Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks, Vol. 3(1), 2016, pp. 34–45.