О КОМПЬЮТЕРНЫХ РАСЧЕТАХ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Е.И. Исмагилова

Кафедра общенаучных дисциплин
Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики
пр. Вернадского, 78, Москва, Россия, 119454

В статье обосновывается педагогическая целесообразность изучения линейных пространств графов в курсе линейной алгебры с точки зрения применения этих пространств в компьютерных методах расчета электрических цепей.

В последнее время в связи с развитием техники, усложнением применяемых в этой области устройств и повышением требований к их точности, для анализа работы и расчета характеристик этих устройств в современной электротехнической литературе большое внимание стали уделять компьютерным методам расчета. К таким методам в первую очередь относятся матрично-топологические методы, благодаря которым процедура формирования математических моделей линейных электрических цепей в виде матричных уравнений наиболее наглядна проста и согласована с последующим их численным решением при помощи стандартных программ или универсальных математических пакетов (MathCAD, MathLAB и др.). Строгое математическое обоснование этих компьютерных методов можно найти в литературе [1; 2]. Оно опирается на разделы из теории графов, которые изучают построение и свойства линейного пространства графа и двух его подпространств: контуров и сечений. Но этот теоретический материал не включен ни в курс дискретной математики, ни в курс электротехники, ни в последующие специальные курсы, читаемые в техническом вузе. Кроме того, недостаток знаний о пространствах графов трудно восполнить самостоятельно, так как подходящая литература издавалась в основном в 1960—1970 гг. В результате студенты, изучающие курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), плохо понимают матрично-топологические методы и, как следствие, имеют недостаточные навыки их применения при компьютерных расчетах электрических цепей.

Удельный вес матрично-топологических методов в последние годы продолжает возрастать, поэтому мы считаем, что курс математики в техническом вузе должен учитывать эти современные тенденции и включать необходимые теоретические концепции прикладной математики. Чтобы ликвидировать данный пробел в математическом образовании электро- и радиоинженеров, важно в курсе линейной алгебры при изучении темы «Линейные пространства» рассмотреть в качестве примера построение линейных пространств графов. Так как этот материал предназначен студентам первого курса, для простоты достаточно дать определения только связных планарных графов и их остовных подграфов. Кроме остовных подграфов, другие типы подграфов не вводятся, поэтому слово «остовные» в дальнейших рассуждениях опустим. Чтобы не было расхождения с терминологией, которая используется в электротехнической литературе, определения и обозначения берем из учебников по ТОЭ.

Пусть $G = (V, E)$ — граф с пронумерованным множеством ветвей $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $n \geq 1$ и множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Множество всех подмножеств E' множества E, включая и пустое множество $\varnothing$, обозначим через $E(G) = \{E_k'\}$. Множество всех подграфов $G' = (V, E')$ графа $G = (V, E)$, включая нулевой граф и сам граф G, обозначим $W(G) = \{G_k'\}$. Множеством всех строк $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ длины n с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ из поля $GF(2)$ вычетов по модулю два обозначим K^n.

Между множествами $W(G)$ и $E(G)$ существует взаимно однозначное соответствие, так как каждому подграфу $G_k = (V, E_k')$ графа G соответствует единственное подмножество E_k' множества $E(G)$ и наоборот. Отнеся каждому подграфу G_k' строку чисел $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, в которой

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in E_k', \\ 0, & \text{если } e_i \notin E_k', \end{cases}$$

$(i = 1, 2, ..., n)$, тем самым определим взаимно однозначное соответствие между множеством $W(G)$ и множеством K^n. Следовательно, между множествами $W(G)$, $E(G)$ и K^n существует взаимно однозначное соответствие.

Введем операции сложения на множествах $W(G)$, $E(G)$ и K^n.

Сложение	
K^n	$\forall \overline{a}, \overline{b} \in K^n$, где $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ имеем $\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$. Сумма $\overline{a} + \overline{b}$ есть строка длины n с компонентами из поля $GF(2)$, поэтому $\overline{a} + \overline{b} \in K^n$ и множество K^n замкнуто относительно операции сложения
$E(G)$	$\forall E_i, E_j \in E(G)$ имеем $E_i + E_j = (E_i \cup E_j) \setminus (E_i \cap E_j) = (E_i \setminus E_j) \cup (E_j \setminus E_i)$. Сумма $E_i + E_j$ означает, что элемент e_k принадлежит $E_i + E_j$ тогда и только тогда, когда он принадлежит либо только E_i, либо только E_j (берется объединение этих двух множеств, но элементы, которые при этом встречаются дважды, выбрасываются), поэтому $E_i + E_j$ будет подмножеством множества E, т.е. $E_i + E_j \in E(G)$. Это означает, что $E(G)$ — замкнутое множество относительно операции сложения

$W(G)$	$\forall G_i, G_j \in W(G)$, где $G_i = (V, E_i)$ и $G_j = (V, E_j)$ имеем $G_i + G_j = (V, E_i + E_j)$. Так как $E_i + E_j$ подмножество множества E, $G_i + G_j = (V, E_i + E_j)$ подграф графа G, т.е. $G_i + G_j \in W(G)$, и операция сложения замкнута в множестве $W(G)$.

На рис. 1 приведен пример графа $G = (V, E)$ с множеством узлов $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и ветвей $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

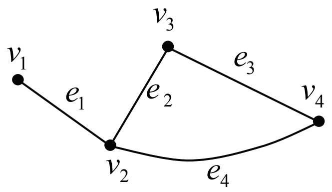

Рис. 1

Ему соответствуют множества $W(G)$, $E(G)$, K^4, взаимно однозначное соответствие между которыми зададим таблицей.

Таблица

$W(G)$		$E(G)$		K^4
$G_0 = (V, E_0)$	$\leftrightarrow$	$E_0 = \varnothing$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_0} = (0\ 0\ 0\ 0)$
$G_1 = (V, E_1)$	$\leftrightarrow$	$E_1 = \{e_1\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_1} = (1\ 0\ 0\ 0)$
$G_2 = (V, E_2)$	$\leftrightarrow$	$E_2 = \{e_2\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_2} = (0\ 1\ 0\ 0)$
$G_3 = (V, E_3)$	$\leftrightarrow$	$E_3 = \{e_3\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_3} = (0\ 0\ 1\ 0)$
$G_4 = (V, E_4)$	$\leftrightarrow$	$E_4 = \{e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_4} = (0\ 0\ 0\ 1)$
$G_5 = (V, E_5)$	$\leftrightarrow$	$E_5 = \{e_1, e_2\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_5} = (1\ 1\ 0\ 0)$
$G_6 = (V, E_6)$	$\leftrightarrow$	$E_6 = \{e_1, e_3\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_6} = (1\ 0\ 1\ 0)$
$G_7 = (V, E_7)$	$\leftrightarrow$	$E_7 = \{e_1, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_7} = (1\ 0\ 0\ 1)$
$G_8 = (V, E_8)$	$\leftrightarrow$	$E_8 = \{e_2, e_3\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_8} = (0\ 1\ 1\ 0)$
$G_9 = (V, E_9)$	$\leftrightarrow$	$E_9 = \{e_2, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_9} = (0\ 1\ 0\ 1)$
$G_{10} = (V, E_{10})$	$\leftrightarrow$	$E_{10} = \{e_3, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{10}} = (0\ 0\ 1\ 1)$
$G_{11} = (V, E_{11})$	$\leftrightarrow$	$E_{11} = \{e_1, e_2, e_3\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{11}} = (1\ 1\ 1\ 0)$
$G_{12} = (V, E_{12})$	$\leftrightarrow$	$E_{12} = \{e_1, e_2, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{12}} = (1\ 1\ 0\ 1)$
$G_{13} = (V, E_{13})$	$\leftrightarrow$	$E_{13} = \{e_1, e_3, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{13}} = (1\ 0\ 1\ 1)$
$G_{14} = (V, E_{14})$	$\leftrightarrow$	$E_{14} = \{e_2, e_3, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{14}} = (0\ 1\ 1\ 1)$
$G_{15} = (V, E_{15})$	$\leftrightarrow$	$E_{15} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$	$\leftrightarrow$	$\overline{a_{15}} = (1\ 1\ 1\ 1)$

Приведем примеры операций сложения для некоторых элементов из этой таблицы:

$$G_6=(V,E_6)\ \leftrightarrow\ E_6=\{e_1,e_3\}\ \leftrightarrow\ \overline{a_6}=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0),$$

$$G_{14}=(V,E_{14})\ \leftrightarrow\ E_{14}=\{e_2,e_3,e_4\}\ \leftrightarrow\ \overline{a_{14}}=(0\ \ 1\ \ 1\ \ 1);$$

<u>в K^4</u> $\quad \overline{a_6}+\overline{a_{14}}=(1\ 0\ 1\ 0)+(0\ 1\ 1\ 1)=(1\ 1\ 0\ 1)=\overline{a_{12}}$;

<u>в $E(G)$</u> $\quad E_6+E_{14}=\left(E_6\bigcup E_{14}\right)\setminus\left(E_6\bigcap E_{14}\right)=\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\}\setminus\left\{e_3\right\}=\left\{e_1,e_2,e_4\right\}=E_{12}$;

<u>в $W(G)$</u> $\quad G_6+G_{14}=(V,E_6+E_{14})=(V,E_{12})=G_{12}$.

Последнее равенство вытекает из равенства, полученного для множеств E_6+E_{14}. Сумма подграфов G_6+G_{14} изображена на рис. 2.

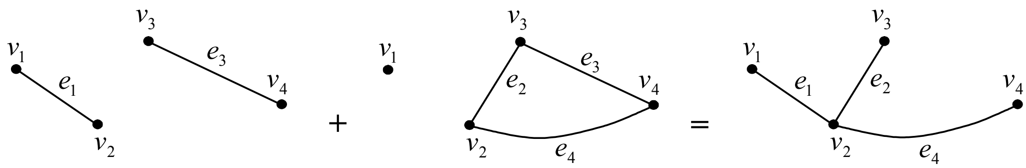

Рис. 2

Относительно введенных операций множества $W(G)$, $E(G)$ и K^n образуют коммутативные группы. В качестве упражнения, студентам предлагается доказать этот факт самостоятельно.

Докажем изоморфизм групп $W(G)$ и K^n. Пусть G_1, $G_2\in W(G)$, $\overline{a}$, $\overline{b}\in K^n$ и $G_1=(V,\ E_1')\leftrightarrow\overline{a}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$, $G_2=(V,\ E_2')\ \leftrightarrow\ \overline{b}=(\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_n)$, тогда $G_1+G_2=(V,\ E_1'+\ E_2')\ \leftrightarrow\ \overline{a}+\overline{b}$, так как

$$\alpha_i+\beta_i=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \left(e_i\in E_1',\ e_i\notin E_2'\right)\ \text{или}\ \left(e_i\notin E_1',\ e_i\in E_2'\right),\\ 0,\ \text{если}\ e_i\in E_1',\ e_i\in E_2'.\end{cases}$$

Еще одной коммутативной группой изоморфной группе $W(G)$ будет $E(G)$. Действительно, если G_1, $G_2\in W(G)$, E_1, $E_2\in E(G)$ и $G_1=(V,E_1)\leftrightarrow E_1$, $G_2=(V,E_2)\leftrightarrow E_2$, то $G_1+G_2=(V,E_1+E_2)\leftrightarrow E_1+E_2$.

Мы не будем различать между собой эти три группы и обозначим их одним и тем же символом $W(G)$. Введенную группу $W(G)$ удобно рассматривать как линейное пространство над полем $GF(2)$ со сложением по модулю два и обычным умножением ($0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$). Линейная зависимость системы элементов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m\in W(G)$ $(m\geq 1)$ означает существование такой непустой подсистемы, которая в сумме дает нулевой элемент $\overline{0}$. Так как элементы $\overline{e}_1=(1,\ 0,\ ...,\ 0)$, $\overline{e}_2=(0,\ 1,\ ...,\ 0)$, ..., $\overline{e}_n=(0,\ 0,\ ...,\ 1)$ (однореберные подграфы) линейно независимы, а любой подграф через них линейно выражается как

$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{e}_n$, то эти n подграфов образуют базис пространства $W(G)$, в силу чего его размерность dim $W(G) = n$. Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема. Для графа G пространство $W(G)$ является n-мерным линейным пространством над полем *GF(2)*.

Решение стандартных задач из курса линейной алгебры в пространстве $W(G)$ над полем $GF(2)$ вначале сильно удивляет первокурсников технического вуза. Для них становится настоящим открытием тот факт, что знакомые алгебраические понятия, такие как линейная зависимость, ранг матрицы, обращение матриц и т.д., справедливы в любом поле и особенно они применимы к полю $GF(2)$. Отметим, что этот учебный материал является необходимым теоретическим фундаментом для решения профессионально ориентированных задач, в том числе и из теории кодирования информации. Например, стандартная задача на нахождение координат вектора при переходе от одного базиса к другому в теории кодирования связана с перекодировкой (в равномерном алфавитном двоичном кодировании смена базиса приводит к перекодированию всех векторов, координаты которых можно представлять некими кодовыми словами).

В пространстве $W(G)$ можно ввести скалярное произведение векторов так же как и в арифметическом, а затем обсудить вопрос о линейной зависимости системы векторов, используя матрицу Грама, и решить задачи на нахождение базисов пространства, содержащих известные подсистемы векторов. В пространстве $W(G)$ нельзя дать определение ортогональности, имеющее смысл. Поэтому для подпространств понятие ортогонального дополнения не вводится.

В электротехнике, при расчете цепей матрично-топологическими методами, цепь заменяют ориентированным графом L, который является топологической моделью схемы электрической цепи. Далее для графа L строится линейное пространство $W(L)$ по схеме, аналогичной для пространств неориентированных графов. Отличие только в том, что взаимно однозначное соответствие вводится между множеством ориентированных подграфов $W(L)$ и $\Omega(R^n)$, множеством всех подмножеств множества R^n (множество строк длины n с компонентами из поля действительных чисел R), а именно: каждому подграфу $L_k{}' = (V,\ E_k{}')$ ставится в соответствие множество строк $A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ ...,\ \alpha_n) / \alpha_i \in R,\ i = 1, ..., n\} \in \Omega(R_n)$, у которого каждая строка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ ...,\ \alpha_n)$ имеет вид: $\alpha_i \neq 0$, если $e_i \in E'_k$, и $\alpha_i = 0$, если $e_i \notin E'_k$. В качестве упражнения студентам предлагается самостоятельно сначала проверить, что $\Omega(R^n)$ является линейным пространством над полем $GF(2)$, а затем доказать изоморфизм пространств $W(L)$ и $\Omega(R^n)$. Эти пространства не различают и обозначают одним и тем же символом $W(L)$.

Необходимо акцентировать внимание студентов на том, что, грубо говоря, ориентированный подграф из $W(L)$ — это *множество* строк с элементами из поля R, а неориентированный подграф из $W(G)$ — это *одна* строка с элементами из поля $GF(2)$.

Скалярное произведение векторов в пространстве $W(L)$ определяется так же, как и в R^n, поэтому имеют смысл и понятие ортогональности, и понятие ортогонального дополнения.

Для решения задач электротехники матрично-топологическими методами необходимо уметь строить в пространстве $W(L)$ два важных для расчетов подпространства: контуров и сечений, которые фактически определяют пространства напряжений и токов электрической цепи. Изучение этих подпространств требует дополнительного времени, поэтому включить необходимый теоретический материал в курс линейной алгебры не удается. В настоящее время разработан и читается спецкурс, на котором не только изучаются подпространства контуров и сечений, но и решаются задачи электротехники матрично-топологическими методами при помощи специализированного математического пакета Mathcad. Спецкурс ведется по следующему плану.

Основные понятия. Вводятся понятия дерева, хорды, цикломатического числа графа, ранга графа.

Эйлеров граф. Дается определение эйлерова контура и доказываются два утверждения: а) связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда каждый его узел имеет четную степень; б) граф G называется графом Эйлера тогда и только тогда, когда G есть объединение простых контуров, причем не существует двух контуров, имеющих общую ветвь.

Подпространство W_C контуров неориентированного графа. Рассматривается множество W_C подграфов неориентированного графа G со всеми четными вершинами, а именно, эйлеровых подграфов, и доказывается, что W_C является подпространством линейного пространства $W(G)$, которое называется подпространством контуров неориентированного графа.

Подпространство W_C' контуров ориентированного графа L. Вводится понятие циклического маршрута. Подпространство W_C' строится при помощи циклических маршрутов: при обходе маршрута ветвь e_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ проходится r_i^+ раз в направлении ее ориентации и r_i^- раз в противоположном направлении; тогда данному маршруту сопоставим строку $(r_1^+ - r_1^+, r_2^+ - r_2^+, ...,\ r_n^+ - r_n^+)$, которая принадлежит некоторому ориентированному подграфу $L' \in W(L)$. В результате получается соответствие между всевозможным циклическим маршрутам в графе L и некоторым подмножеством W_C' ориентированных подграфов в $W(L)$. Так как W_C' — множество эйлеровых подграфов, то из теоремы, доказанной выше, следует, что W_C' является подпространством пространства $W(L)$.

Подпространство W_S сечений неориентированного графа. Вводятся понятия сечения и простого сечения, как подграфов графа G, и доказывается, что множество W_S всевозможных сечений является подпространством линейного пространства $W(G)$. При этом понадобится вспомогательная теорема о том, что контур и простое сечение связного графа имеют четное число общих ветвей.

Подпространство W_S называется подпространством сечений неориентированного графа.

Подпространство W_S' сечений ориентированного графа L. Это подпространство строится при помощи простых сечений. Каждому простому сечению $S = (V, E')$ графа L приписывается ориентация и ставится в соответствие строка $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ ..., \alpha_n)$, у которой $\alpha_i = 0$, если $e_i \notin E'$; $\alpha_i = 1$, если $e_i \in E'$ и ветвь ориентирована так же, как сечение; $\alpha_i = -1$, если $e_i \in E'$ и ветвь ориентирована противоположно сечению. Множество строк, соответствующих простым сечениям, порождает подмножество W_S' ориентированных подграфов в $W(L)$. По построению W_S' — множество простых сечений, поэтому по теореме, доказанной в предыдущем пункте, оно является подпространством пространства $W(L)$.

Главные контуры и главные сечения. Размерности подпространств контуров и сечений. Для неориентированного графа G вводятся понятия главных контуров и сечений; доказывается, что система главных контуров (главных сечений) графа G относительно дерева T образует базис подпространства W_C (W_S) и что размерность подпространства контуров (сечений) равна цикломатическому числу (рангу) графа G. Доказательство теоремы дает алгоритм построения базисов в подпространствах W_C и W_S. Построенные таким образом базисы обычно используются при изучении электрических цепей.

Узловая матрица A, контурная матрица B и матрица сечений Q. Связь между матрицами A, Q и B. Ортогональность подпространств W_C и W_S. Вводятся матрицы A, Q и B и устанавливаются некоторые свойства этих матриц, которые помогают раскрыть структуру графа. Матрицы A, Q и B используются при исследовании электрических цепей; эти матрицы входят в качестве коэффициентов в уравнения Кирхгофа, описывающие цепь. Поэтому свойства этих матриц и другие связанные с ними результаты широко используются в компьютерных методах расчета электрических цепей.

Топология электрических цепей. Законы электрических цепей в матричной форме. Матричные уравнения метода контурных токов и метода узловых потенциалов. Примеры решения задач электротехники матрично-топологическими методами с использованием математического пакета Mathcad. Кратко излагаются основы матрично-топологических методов. Этот материал иллюстрируется примерами расчетов из курса «Теоретические основы электротехники».

Основная цель этого спецкурса состоит в том, чтобы на начальном этапе в простой и доступной форме дать математическое обоснование компьютерных методов расчета электрических цепей, объяснить многие обычные положения и операции, используемые при анализе цепей. Отметим, что в последнее время алгебраическими методами выполнено большое количество работ, посвященных не только анализу, но и синтезу электрических цепей. Знание линейных пространств графов значительно облегчает решение задач синтеза, поэтому данный материал способствует качественной подготовке будущих электро- и радиоинженеров.

Таким образом, изучение линейных пространств графов в курсе алгебры усиливает фундаментальную подготовку будущих специалистов и приводит программу и характер курса в соответствие с современными тенденциями в приложениях математики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Сешу С., Рид М.Б.* Линейные графы и электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1971.
[2] *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. — М.: Наука, 1973.
[3] *Зыков А.А.* Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.

COMPUTER CALCULATIONS OF SOME PROBLEMS OF ELECTRICAL ENGINEERING BY MEANS OF LINEAR ALGEBRA METHODS

E.I. Ismagilova

Moscow institute of radio engineering, electronics and automation
Vernadsky's pr., 78, Moscow, Russia, 119454

This article proves educational expediency of learning linear spaces of graphs in linear algebra course from the standpoint of using these spaces in computer-based methods of electric circuit calculation.