

ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА ПОДДЕРЖКИ ОБУЧЕНИЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ WOLFRAMALPHA ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Д.А. Власов¹, А.В. Синчуков²,
Г.А. Качалова¹

¹Кафедра точных и естественных наук
Московский государственный гуманитарный
университет им. М.А. Шолохова
Верхняя Радищевская ул., 16-18, Москва, Россия, 109240

²Кафедра высшей математики
Московский государственный университет экономики,
статистики и информатики
Краснопрудная ул., 14, Москва, Россия, 107140

Рассмотрены особенности использования WolframAlpha — нового математического онлайн-процессора, позволяющего при условии методически целесообразного использования в учебном процессе существенно повысить качество математической и методической подготовки будущего учителя математики и информатики в системе бакалавриата и магистратуры.

Ключевые слова: WolframAlpha, задачи с параметрами, подготовка будущего учителя математики и информатики, информационные технологии, информатизация.

В условиях математизации и информатизации всех отраслей знаний и деятельности рынок труда предъявляет повышенные требования к информационной и математической подготовке выпускников (как в общекультурном, методологическом аспектах, так и в аспекте инструментальной компетентности), что должно находить отражение в системе подготовки будущих учителей математики в бакалавриате и магистратуре.

На кафедре точных и естественных наук МГГУ им. М.А. Шолохова к настоящему времени накоплен богатый педагогический опыт интеграции информационных и педагогических технологий на основе использования нового математического онлайн-процессора WolframAlpha и специально создано новое методико-технологическое обеспечение нескольких учебных дисциплин математической

и методической подготовки бакалавров (направление 050100 «Педагогическое образование», профили «Математическое образование» и «Информатика и ИКТ в образовании») и магистров (050100 «Педагогическое образование»).

В рамках данной статьи на трех конкретных примерах будут рассмотрены особенности использования WolframAlpha в учебном процессе на примере элективного курса «Задачи с параметрами», специально созданного для усиления интегративной и прикладной подготовки будущего учителя математики и информатики.

Отметим, что параметр (от греч. *parametreō* меряю, сопоставляя) — величина, входящая в математическую формулу и сохраняющая постоянное значение в пределах одного явления или для данной частной задачи, но при переходе к другому явлению, к другой задаче меняющая свое значение. Другими словами, *параметром* называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи. Задачи с такими особыми величинами принято называть *задачами с параметрами (параметрическими задачами)*. Особый класс задач — задачи с параметрами, присутствующий в ГИА и ЕГЭ, традиционно считается сложным, трудным для большинства школьников, студентов, молодых учителей. Причины этого нам представляются в разнообразии типов задач с параметрами и методов их решения, нетрадиционности формулировок самих заданий, искусственной изолированности содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» в системе содержательно-методических линий школьного и вузовского курсов математики.

В связи с широким внедрением информационных технологий в учебный процесс особую актуальность приобретает вопрос: насколько они способны помочь школьнику, студенту, учителю математики? В контексте содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» вопрос звучит так: позволяют ли ИТ полностью решить задачу с параметром, более глубоко проникнуть в суть задач с параметром, интерпретировать полученный результат, делать обобщения и формулировать выводы?

Далее представим читателю и проанализируем три типовые задачи с параметром, на основе которых можно сформировать представление о дидактических и инструментальных возможностях WolframAlpha.

Задача 1. Решить уравнение $a^2x = a(x + 2) - 2$ при всех значениях параметра a .

Решение. Обратим внимание, что данное уравнение линейно относительно переменной x . После группировки по степеням x , получим: $a(a - 1)x = 2a - 2$. Далее выделим 3 принципиальных случая.

$$1. \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases}, x = \frac{2}{a}.$$

$$2. a = 0, 0 \cdot x = -2, x \in \emptyset.$$

$$3. a = 1, 0 \cdot x = 0, x \in R.$$

Комментарий 1. Выделение WolframAlpha двух случаев решения задачи 1, представленных на рис. 1, подразумевает их несовместность. Мы видим, что значение параметра $a = 1$ выделено в отдельный случай, следовательно, в первом случае можно дописать $a \neq 1$. Обратим внимание, что некоторые значения параметра a не включены в результат выданный WolframAlpha, — это $a = 0$. Другими словами, при $a = 0$ решений нет. Последний случай имеет наглядную геометрическую интерпретацию — ветви гиперболы приближаются к оси x (рис. 1).

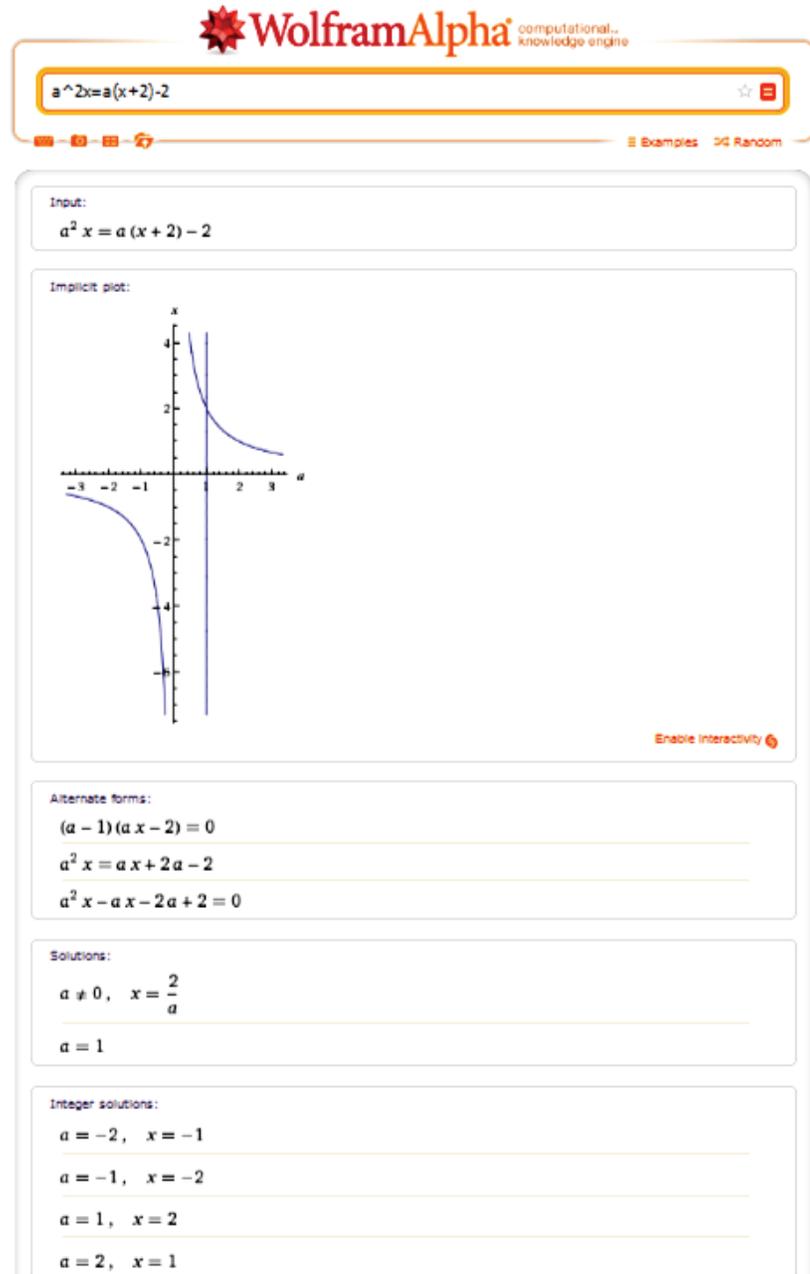


Рис. 1. Решение задачи 1 в WolframAlpha

Задача 2. Решить уравнение $x^2 - 2x - a = 0$ при всех значениях параметра a .

Решение. Следуя логике решения квадратных уравнений, определим дискриминант: $D = 1 + a$. Рассмотрим три традиционных для решения квадратных уравнений случая.

1. $D > 0$; $1 + a > 0$; $a > -1$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}$ — уравнение имеет два корня.
2. $D = 0$; $1 + a = 0$; $a = -1$; $x = 1$ — уравнение имеет один корень (два совпадающих корня).
3. $D < 0$; $1 + a < 0$; $a < -1$ — уравнение не имеет действительных корней.

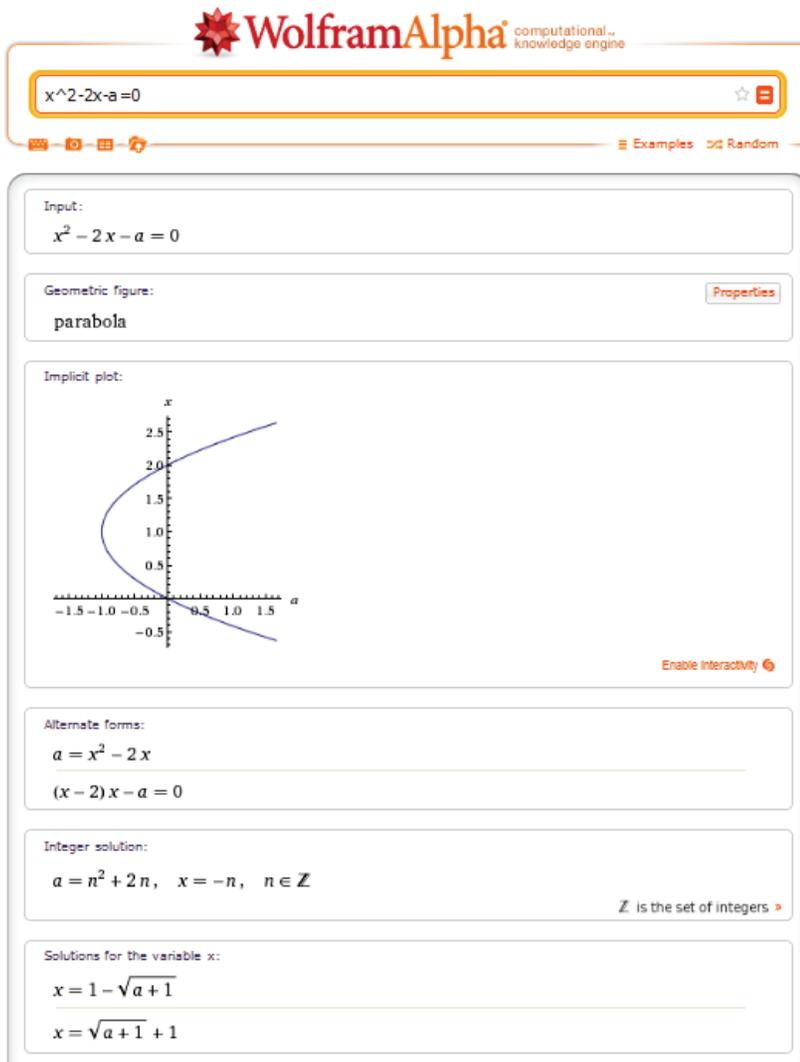


Рис. 2. Решение задачи 2 в WolframAlpha

Комментарий 2. Обратимся к графику, представленному на рис. 2.

1. Учитывая область определения представленной на рис. 2 функции, видим, что при $a < -1$ уравнение не имеет решений.

2. При $a = -1$ уравнение имеет единственное решение $x = 1$.

3. При $a > -1$, проводя перпендикулярные прямые к оси параметра a , мы получаем пары решений $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}$ (следствие свойства симметрии параболы). Заметим, что именно эти пары решений аналитически представлены в *Wolfram-Alpha*.

Перейдем к рассмотрению третьей задачи — линейного неравенства с параметром.

Задача 3. Решить неравенство $\frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6}$ для каждого значения

параметра a .

Решение. После приведения неравенства к общему знаменателю, приведения подобных слагаемых и группировки слагаемых по степеням x , получаем:

$$(a^2 - 9)x < a + 3; (a - 3)(a + 3)x < a + 3.$$

Представим далее распределение знаков для коэффициента стоящего при x и решим неравенство относительно x :



Учитывая правила преобразования неравенств, выделим следующие случаи.

1-й случай

Если $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, тогда $x < \frac{1}{a-3}$. (1)

2-й случай

Если $a \in (-3; 3)$, тогда $x > \frac{1}{a-3}$. (2)

3-й случай

Если $a = -3$, тогда $0 \cdot x < 0$, $x \in \emptyset$. (3)

4-й случай

Если $a = 3$, тогда $0 \cdot x < 6$, $x \in R$. (4)

Комментарий 3. В данной статье ограничимся анализом случая $a \in (3; +\infty)$ — правая область рис. 3. Проводя прямые перпендикулярные оси параметра a заметим, что все точки $(a; x)$ располагаются ниже гиперболы, уравнение которой $x = \frac{1}{a-3}$. Остальные три случая также наглядно интерпретированы на рис. 3.

Еще раз отметим, что компьютер не выдает результат в тех случаях, когда решений нет. Для рассматриваемой задачи это 3-й случай. Если $a = 3$, то переменная x принимает любое значение, так как никаких ограничений на x не наложено — случай (4). Решения (1) и (2) полностью совпали с решениями выданными *WolframAlpha*.

WolframAlpha computational knowledge engine

$(a^2x+1)/2 - (a^2x+3)/3 < (a+9x)/6$

Input:
 $\frac{1}{2}(a^2x+1) - \frac{1}{3}(a^2x+3) < \frac{1}{6}(a+9x)$

Inequality plot:

Alternate forms: [More](#)
 $a^2x < a + 9x + 3$
 $(a-3)(a+3)x < a+3$
 $\frac{1}{6}(a^2x-3) < \frac{1}{6}(a+9x)$

Alternate form assuming a and x are positive:
 $(a-3)x < 1$

Expanded form: [Step-by-step solution](#)
 $\frac{a^2x}{6} - \frac{1}{2} < \frac{a}{6} + \frac{3x}{2}$

Solutions:
 $a > 3, \quad x < \frac{1}{a-3}$
 $-3 < a < 3, \quad x > \frac{1}{a-3}$
 $a < -3, \quad x < \frac{1}{a-3}$

Solution:
 $a = 3$

Computed by Wolfram|Mathematics [Download page](#)

Рис. 3. Решение задачи 3 в WolframAlpha

Вывод 1. Возможности WolframAlpha не ограничиваются типами и уровнями сложности трех рассматриваемых задач, а в контексте задач с параметрами достаточно широки и включают в себя следующие направления:

- 1) линейное уравнение и линейная функция (задача 1);
- 2) квадратное уравнение и квадратичная функция (задача 2);

3) многочлены. Целые уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств (задача 3);

4) дробно-рациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

5) иррациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

6) показательные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

7) логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

8) тригонометрические уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

9) комбинированные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств;

10) производные элементарных функций и их применение.

Вывод 2. С целью эффективного использования технологий *WolframAlpha* следует обратить внимание на логику выстраивания последовательности задач с параметром по уровню их сложности.

Первый уровень традиционно должны составлять «элементарные» (репродуктивные) задачи. В основе их решений «элементарные» алгоритмы, применяемые для решения задач без параметров, так называемые «элементарные» задачи.

Второй уровень — «базовые» или «опорные» задачи. Такие задачи иллюстрируют определенный прием решения. В частности, к «базовым» задачам нужно отнести задачи, связанные с существованием корней квадратного трехчлена, их взаимным отношением, расположением корней на числовой прямой.

Третий уровень — уровень творческих или «нестандартных» задач, опирающихся на идеи и методы, представленные в первых двух уровнях, а также собственные теоретические находки обучающегося. Третий уровень задач с параметром имеет важное прикладное значение в контексте моделирования реальных проблем и ситуаций.

Вывод 3. При раскрытии содержания темы «Задачи с параметрами» *WolframAlpha* обеспечивает поддержку всех методов решения задач с параметрами:

1) аналитический метод;

2) функциональный метод;

3) графический метод.

Посредством реализации возможностей визуализации и аналитики (вычислений), позволяет представить наводящие соображения, ориентиры решения, глубже проникнуть в суть метода решения, важно, что *WolframAlpha* выступает не как «универсальный решатель», а как инструмент для исследования.

Вывод 4. Вне зависимости от дисциплинарных границ применения, *WolframAlpha* достойно проявляет себя в качестве «процессора знаний» (система математических правил, формул, алгоритмов, мощный калькулятор и справочник), который, ориентируясь на запросы пользователей, предоставляет искомую анали-

тическую и графическую информацию. Нельзя не отметить простоту *WolframAlpha*. В большинстве элементарных ситуаций работа студентов с *WolframAlpha* не вызывает затруднений: достаточно грамотно ввести соответствующий запрос в поисковое поле и после нажатия кнопки **Enter** получить результат.

Вывод 5. Не менее важной нам представляется доступность *WolframAlpha*, предоставляющего бесплатный и неограниченный доступ к базе знаний, включающей огромное количество сведений об окружающем мире в математическом контексте (на языке количественных отношений и пространственных форм). Как показывает опыт работы со студентами бакалавриата и магистратуры, *WolframAlpha* становится незаменимым компонентом учебного процесса, позволяет по-новому математическими методами исследовать проблемы и ситуации в области экономики, финансов, управления, менеджмента, психологии, социологии, политологии, демографии, лингвистики, физики, биологии, экологии, химии.

WolframAlpha является мощным исследовательским инструментом, существенно облегчающим и ускоряющим процесс исследования. При этом в учебном процессе появляется возможность уделять больше внимания понимаемой ситуации, интерпретации полученных результатов, формулированию выводов и практических рекомендаций, расширяется класс модельных прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Власов Д.А. Информационные технологии в системе математической подготовки бакалавров: опыт МГГУ им. М.А. Шолохова // Информатика и образование. — 2012. — № 3. — С. 93—94.
- [2] Качалова Г.А., Власов Д.А. Проблемы подготовки будущего учителя математики к реализации содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» // Российский научный журнал. — 2011. — № 2 (21). — С. 86—91.
- [3] Качалова Г.А. Задачи с параметрами как средство развития математической культуры будущего учителя математики // Наука и школа. — 2013. — № 3. — С. 27—30.
- [4] Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. — М.: Экзамен, 2009.
- [5] Jesse Russell Wolfram Alpha. — М.: Print-on-Demand, 2012.

LITERATURA

- [1] Vlasov D.A. Informacionnye tehnologii v sisteme matematicheskoy podgotovki bakalavrov: opyt MGGU im. M.A. Sholohova // Informatika i obrazovanie. — 2012. — № 3. — S. 93—94.
- [2] Kachalova G.A., Vlasov D.A. Problemy podgotovki budushhego uchitelja matematiki k realizacii sodержatel'no-metodicheskoy linii «Zadachi s parametrami» // Rossijskij nauchnyj zhurnal. — 2011. — № 2 (21). — S. 86—91.
- [3] Kachalova G.A. Zadachi s parametrami kak sredstvo razvitija matematicheskoy kul'tury budushhego uchitelja matematiki // Nauka i shkola. — 2013. — № 3. — S. 27—30.
- [4] Miroshin V.V. Reshenie zadach s parametrami. Teorija i praktika. — M.: Jekzamen, 2009.
- [5] Jesse Russell Wolfram Alpha. — M.: Print-on-Demand, 2012.

WOLFRAMALPHA USE WHEN TRAINING IN THE SOLUTION OF TASKS WITH PARAMETERS

**D.A. Vlasov¹, A.V. Sinchukov²,
G.A. Kachalova¹**

¹Chair of exact and natural sciences

The Moscow state humanitarian university named after M.A. Sholokhov
Verkhnyaya Radishchevskaya str., 16-18, Moscow, Russia, 109240

²Chair of the higher mathematics

Moscow state university of economy, statisticians and informatics
Krasnoprudnaya str., 14, Moscow, Russia, 107140

In the center of attention of this article WolframAlpha — quality of mathematical and methodical preparation of future mathematics teacher and informatics in bachelor degree and magistracy system is essential to raise the new mathematical online-processor allowing on condition of methodically expedient use in educational process.

Key words: WolframAlpha, tasks with parameters, preparation of future mathematics teacher and informatics, information technologies, informatization.