Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Researches

2021;22(3):270–282

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282
УДК 03.01

Научная статья / Research article

Обоснование введения дискретно-непрерывной топологии в интересах алгоритмизации сложных процессов функционирования

Н.Л. Малинина

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
malinina806@gmail.com

История статьи
Поступила в редакцию: 22 марта 2021 г.
Доработана: 12 сентября 2021 г.
Принята к публикации: 27 сентября 2021 г.

Ключевые слова:
сложный процесс, дискретно-непрерывная топология, модель, теория графов

Аннотация. Цель исследования – показать и доказать необходимость введения новой, дискретно-непрерывной топологической структуры для описания сложных систем и процессов их функционирования. В настоящее время существуют две топологические структуры: непрерывная и дискретная. Также имеются функциональные подходы к описанию сложных систем и процессов их функционирования, основанные на непрерывной топологии. До сих пор не удалось построить полный функционал для систем проектирования сложных технических объектов, по этой причине функциональный подход не в полной мере соответствуют усложняющимся задачам современности. И поэтому введение дискретно-непрерывной топологии важно для исследования и моделирования сложных систем и процессов функционирования. В качестве доказательства описываются свойства сложных процессов на примерах процесса полета и процесса проектирования. Изучение этих процессов как самых сложных показывает, что они, при условии введения новой дискретно-непрерывной топологии, могут быть представлены в виде ориентированного графа. Обосновываются топологические инварианты сложных систем и процессов функционирования. Представление сложных процессов в виде ориентированного графа позволяет более основательно перейти к их алгоритмизации и программированию, что необходимо для существующей практики. Кроме того, представление сложного процесса как ориентированного графа позволит применить для этих целей аппарат теории графов, что позволит значительно расширить возможности программистов.

Для цитирования
Малинина Н.Л. Обоснование введения дискретно-непрерывной топологии в интересах алгоритмизации сложных процессов функционирования // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 270–282. http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282

Argumentation of introducing a discrete-continuous topology in the interests of algorithmization of complex functioning processes

Natalia L. Malinina

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

malinina806@gmail.com

Article history
Received: March 22, 2021
Revised: September 12, 2021
Accepted: September 27, 2021

Keywords:
complicated process, discrete-continuous topology, model, graph theory

Abstract. The main aim of the research is to show and prove the necessity of introducing a new, discrete-continuous topological structure to describe complicated systems and processes of their functioning. Currently, there are two topological structures: continuous and discrete. At the same time, there are functional approaches in order to describe complicated systems and processes of their functioning, based on continuous topology. Until now, it has not been possible to build full functionality for the design of complicated technical objects. Therefore, the functional approach does not fully correspond to the increasingly complicated tasks of our time. The introduction of discrete-continuous topology is especially important for the exploring and modeling of complicated systems and processes of their functioning. In order to prove this fact, the present study describes the properties of complicated processes using examples of the flight process and the design process. The examination of these processes, as the most complicated, proves that the complicated systems and processes are topological spaces with metric, so they can be represented in the form of an oriented progressively bounded graph. Also, it proves the topological invariants of complicated systems and the processes of functioning. Presentation of the complicated processes in the form of a directed graph allows getting shorter path to their algorithmicization and programming, which is necessary for existing practice. In addition, the presentation of a complicated process as a directed graph will allow using the apparatus of graph theory for such purpose and will significantly expand the capabilities of programmers.

For citation
Malinina NL. Argumentation of introducing a discrete-continuous topology in the interests of algorithmization of complex functioning processes. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):270–282. http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-270-282

Введение

Для описания мира и построения моделей различных объектов топологи применяют исключительно две топологии: антидискретную или дискретную [1–3]. Однако в современном мире существуют сложные системы, и процессы их функционирования тоже сложные. Невозможно представить самолет, вертолет, автомобиль или подводную лодку с помощью непрерывной топологии (структуры). Мы не можем смять самолет, как глину, и слепить из него вертолет или подводную лодку одним непрерывным и взаимно-однозначным преобразованием. Аналогично мы не можем разобрать сложный объект на элементы и создать из этих элементов новый объект, тоже при условии соблюдения требования взаимно-однозначного преобразования [1–3].

Поэтому жизненно необходимо ввести еще одну топологическую структуру, которая поможет справиться с проблемами, возникающими при создании сложных систем и процессов, а именно дискретно-непрерывную топологию. О ней примерно 20 лет тому назад было написано В. Коруховым [4; 5], но в этих книгах она была описана в терминах философии.

Попробуем обосновать введение подобной абстракции с позиций практической жизни на некоторых конкретных примерах и посмотрим, что это может дать для возможностей моделирования сложных процессов и систем.

1. Сложный процесс как объект моделирования

Понятие сложного процесса, как и понятие сложной системы, не является строго определенным. В технике под словом «система» определяется главным образом организованно действующее целое, некоторая совокупность объектов, объединенных некоторой взаимной зависимостью [6]. Особенностью сложных систем в настоящее время являются информационные процессы, которые направлены на обеспечение оптимального управления [7]. Поэтому под сложным процессом следует понимать процесс функционирования сложной системы. Примерами подобных сложных процессов являются:

– строительство, ремонт, эксплуатация сложной техники;

– обработка деталей, сборка агрегатов или машин;

– управление войсками и боевыми средствами;

– полеты летательных аппаратов;

– управление транспортными системами;

– реализация программ на ЭВМ, математическое моделирование;

– функционирование конечных автоматов;

– государственное управление.

Любой сложный процесс состоит из набора последовательных или параллельных операций (по существу, технологических, конструкторских, в том числе и творческих), а также моментов начала и окончания указанных операций или моментов перехода от одних операций к другим. Попробуем дать определения таким элементам.

Элементы первого подмножества – это операции, протекающие во времени и требующие для своего осуществления затрат энергии (элементарные операции). Это могут быть сигналы, которые определяют возможность (или необходимость) начала или окончания элементарных операций. В совокупности они составляют физическое содержание исследуемого процесса.

Элементы второго подмножества – это моменты начала и моменты окончания операций или моменты перехода от одних операций к другим. Они также могут включать связи между операциями и логические условия перехода от одних операций к другим. Элементы этого подмножества практически не требуют ни времени, ни затрат энергии для своей реализации. Они представляют собой логическую структуру сложного процесса.

Очевидно, что любой из перечисленных процессов может быть представлен в виде дизъюнктивной суммы указанных подмножеств элементов. Физически весь такой процесс в целом может быть представлен как непрерывный, но с дискретными переходами от одних элементов процесса к другим. Иными словами, мы имеем физически непрерывный процесс с дискретной логической структурой.

Однако при различных попытках автоматизации сложных процессов многие исследователи определяют их как функционал, применяя к ним антидискретную структуру. К сожалению, до сих пор не удалось разработать функционал сложного процесса, который бы описывал весь процесс, а не только его крошечную часть.

2. Анализ сложного процесса

Рассмотрим сложный процесс на примере процесса полета (или проектирования) летательного аппарата, чтобы сделать обобщения на другие сложные процессы.

К элементам полета для самолета могут быть отнесены, например, разбег, набор высоты, горизонтальный полет, отдельные фигуры пилотажа, атака в воздушном бою и т. д. Сложность процесса полета современных летательных аппаратов и необходимость его более детального изучения приводят к тому, что исследованию подвергаются все более и более мелкие элементы полета. При этом такие элементы могут относиться уже не только к летательному аппарату в целом, но также и к отдельным его агрегатам, системам и составным частям, включая и экипаж. Основным фактом является то, что любой сложный процесс можно разделить на элементы, в каждом из которых решаются некоторые частные задачи общей задачи сложного процесса.

Особенность процесса проектирования состоит в разработке и создании новых, ранее не существовавших объектов, процессов или систем. Здесь творчество человека тесно переплетается с инженерным синтезом, который в настоящее время осуществляется только человеком [8; 9]. Определение проектирования как сложного дискретно-непрерывного процесса ни в коей мере не противоречит творческим аспектам проектирования [10; 11].

Составными частями сложного процесса, обычно называемыми его элементами, считают относительно ограниченные по времени и достаточно однородные по физическому содержанию операции, которые могут быть описаны сравнительно небольшим числом математических выражений. Взаимосвязи элементов более сложны и не всегда очевидны из простого их перечисления. Многие элементы сложного процесса, в частности полета, особенно очень мелкие, часто должны выполняться одновременно.

Практическое применение понятия «элемент полета» в исследованиях и летной практике позволяет сделать некоторые общие выводы:

1) каждый элемент полета (сложного процесса) может иметь математическое описание или математическую модель, в которую входят те или иные параметры самолета (объекта, подвергнутого действию процесса);

2) каждый элемент полета (сложного процесса) имеет такие характеристики, как время выполнения, вероятность успешного выполнения и т. д.;

3) каждый элемент реального полета (сложного процесса) имеет вполне определенные моменты начала и окончания.

В качестве элемента полета (сложного процесса) могут служить такие простейшие операции, которые, особенно при необходимости детального исследования, могут рассматриваться отдельно от других.

Все то же самое можно перенести как на процесс проектирования, так и на другие сложные процессы функционирования. В итоге анализ любого сложного процесса предшествует разработке модели сложного процесса и включает определение:

– элементов процесса;

– перечня элементов сложного процесса, входящих в каждый исследуемый этап сложного процесса;

– основных параметров и характеристик для каждого элемента процесса, в том числе временных и вероятностных;

– системы связей и отношений между элементами процесса, или системы бинарных отношений на множестве этих элементов.

Человеческий фактор, неизменно присутствуя в разработке, создании или реализации любого сложного процесса [8; 9], тесно переплетается с его синтезом, который, попадая в разряд NP-полных задач[1], в настоящее время осуществляется практически только человеком. Нет иной возможности проверить правильность тех или иных творческих решений, как «собрав» из частей всю сложную систему и проверив на практике соответствие процесса ее функционирования заданному критерию эффективности [10; 12].

Следовательно, любой сложный процесс включает в себя ряд последовательных и параллельных операций (технологических, конструкторских, в том числе и творческих), а также моменты начала и окончания указанных операций или моменты перехода от одних операций к другим. Каждый раз, когда создается программное обеспечение для автоматизации управления сложным процессом, считается, что сложный процесс состоит из большого количества элементарных операций. У элементарных операций есть общие свойства, но одновременно они могут быть и уникальными. Постараемся дать более точное определение понятию элемента процесса.

Элементами или элементарными операциями сложного процесса называются ограниченные по времени и однородные по своему физическому содержанию и функциональному назначению участки сложного процесса.

Каждая подобная операция имеет вполне определенное начало – вход (момент начала) и вполне определенное окончание – выход (момент окончания). Входы и выходы элементов сложного процесса составляют второе из подмножеств элементов сложного процесса, о которых упоминалось ранее. Посредством соединения входов и выходов различные элементарные операции сложного процесса объединяются в единый сложный процесс. Каждый из элементов может быть соединен со всем процессом только посредством входа и выхода.

Поэтому в основу деления любого сложного процесса на этапы и элементы следует положить функционально-логический принцип, согласно которому каждый этап сложного процесса будет представлять систему элементов, направленную на решение одной из частных задач сложного процесса и оцененную соответствующим частным критерием эффективности для данного сложного процесса. При этом частная задача, решаемая на данном этапе сложного процесса, является на этом этапе главной функциональной задачей, от решения которой зависит также и исход сложного процесса в целом. Реализация всей совокупности элементов сложного процесса, составляющих

[1] Имеется в виду сложность $n!$ Относится к переборным задачам комбинаторики.

данный этап, должна быть подчинена главной функциональной задаче сложного процесса.

Очевидно, что любой сложный процесс, включает в себя не только элементарные операции и их совокупности (этапы), но также и моменты начала и окончания элементов (этапов) сложного процесса и моменты перехода от одних операций (элементов, этапов) к другим.

Основываясь на понятиях элемента и этапа сложного процесса, которые соответствуют содержанию и целям данного исследования, примем следующее, предварительное определение сложного процесса: сложный процесс является дискретно-непрерывным, протекающим во времени и пространстве процессом. Он включает в себя отдельные взаимосвязанные элементы (этапы) этого процесса, а также моменты начала, окончания и переходов между ними.

Итак, множество элементов сложного процесса состоит из двух подмножеств, связанных между собой, и поэтому может быть представлено как система, объединяющая эти два подмножества: $H_0 = Q_0 \times V_0$.

Процесс обычно реализуется с помощью какого-либо средства или сложной системы. Рассмотрим эти положения на примере анализа полета самолета или его проектирования.

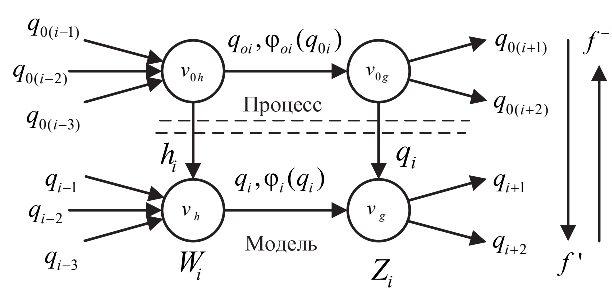
3. Физическое и структурное подобие сложного процесса и модели

В основе моделирования как метода исследований лежит теория подобия. Можно утверждать, что моделирование имеет место лишь тогда, когда имеется подобие.

Однако часто исследователи, имея в виду физическое или механическое подобие, ограничиваются только критериями физического подобия, поскольку далеко не всегда понятно, как установить логическое и структурное подобие. Это происходит потому, что до сих пор в топологии существует только два варианта структуры: антидискретная и дискретная. В обе эти структуры сложные процессы не вписываются и остаются за бортом изучения с помощью топологических и комбинаторных средств, хотя частично они и употребляются в виде блок-схем или граф-схем.

Вопросы физического подобия модели и процесса достаточно хорошо изучены, однако следует обратить внимание на вопросы связи структурного и физического подобия. Из понятия структурного подобия следует, что каждому элементу сложного процесса должен быть поставлен во взаимно однозначное соответствие элемент модели этого процесса при помощи некоторого отображения f. Физическое подобие элементов модели и сложного процесса также непосредственно связано с отображением f [2].

Рассмотрим прямоугольную диаграмму WZ (рисунок). На этой диаграмме стрелкой q_{0i} обозначен элемент реального процесса, которому, посредством отображения f поставлен во взаимно однозначное соответствие элемент модели q_i. Начало реализации элемента q_{0i} обозначено вершиной v_{0h}, в которую входят концы стрелок (окончания элементов) $q_{0(i-1)}$, $q_{0(i-2)}$ и т. д. Окончание реализации элемента q_{0i} обозначено вершиной v_{0g}, в которой начинаются стрелки (начала реализаций элементов) $q_{0(i+1)}$, $q_{0(i+2)}$ и т. д. В модели этим вершинам соответствуют вершины v_h и v_g, которыми обозначены начало и конец реализации элемента модели q_i.



Прямоугольная диаграмма WZ

Примечание: W_{0i} – множество параметров на входе элемента q_{0i}; Z_{0i} – множество параметров на выходе элемента q_{0i}; W_i – множество параметров на входе элемента q_i; Z_i – множество параметров на выходе элемента q_i; $\varphi_{0i}(q_{0i}) = \varphi_{0i}$: $W_{0i} \rightarrow Z_{0i}$ – преобразование (отображение) параметров входа в параметры выхода, осуществляемое при реализации элемента реального сложного процесса q_{0i}; $\varphi_i(q_i) = \varphi_i$: $W_i \rightarrow Z_i$ – преобразование (отображение) параметров входа в параметры выхода, осуществляемое при моделировании элемента сложного процесса q_i; h_i: $W_{0i} \rightarrow W_i$ – «масштабный коэффициент» между входами элементов процесса и модели; q_i: $Z_{0i} \rightarrow Z_i$ – «масштабный коэффициент» между выходами элементов процесса и модели.

В силу структурного подобия:

$$q_i = f^1(q_{0i}) \text{ и } q_{0i} = f^{-1}(q_i). \qquad (1)$$

Обозначим: $k_{0i} = \{k_{0j}\}_i$ – множество критериев физического подобия для элемента q_{0i}; $j = 1,2, \dots$ – индексы критериев; $k_i = \{k_{0j}\}_i$ – множество критериев физического подобия для элемента q_i; $j = 1,2, \dots$ – индексы критериев.

При моделировании критерии физического подобия реального сложного процесса и его модели должны быть равны:

$$k_{oi} = k_i \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n_Q. \qquad (2)$$

Для обеспечения физического подобия элементов q_{0i} и q_i отображения φ_{0i}, φ_i, h_i, g_i должны отвечать условию

$$\left.\begin{aligned} h_i \circ \varphi_i \circ g_i^{-1} \circ \varphi_{0i}^{-1} \equiv \text{idem.} \\ \varphi_{0i} \circ g_i \circ \varphi_i^{-1} \circ h_i^{-1} \equiv \text{idem.} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Это возможно только тогда, когда отображения φ_{0i}, φ_i, h_i, g_i являются взаимно однозначными. Из равенств (3) следует, что:

$$\left.\begin{aligned} h_i \circ \varphi_i \equiv \varphi_{0i} \circ g_i. \\ h_i^{-1} \circ \varphi_{0i} \equiv \varphi_i \circ g_i^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Это означает, что диаграмма WZ – бикоммутативна [2]. Следовательно, при соблюдении структурного и физического подобия между элементами процесса и модели:

– параметры входа элемента процесса однозначно определяют параметры выхода элемента модели и наоборот;

– параметры входа элемента модели однозначно определяют параметры выхода элемента процесса и наоборот;

Поскольку

$$h_i^{-1} \circ \varphi_{0i} \equiv \varphi_i \circ g_i^{-1},$$

$$\text{то } \varphi_i \equiv h_i^{-1} \circ \varphi_{0i} \circ g_i. \qquad (5)$$

Выражение (5) означает, что отображение φ_i определяется не только отображением φ_{0i}, но и отображениями h_i^{-1} и g_i. Последние являются частными значениями отображения f, которое отражает структурное подобие реального сложного процесса и его модели (систем H_0 и H). Таким образом, если отображение φ_{0i} представляет собой преобразование реальных физических характеристик элемента процесса q_{0i}, то модель этого преобразования φ_i определяется не только преобразованием φ_{0i}, но зависит также и от «масштабных коэффициентов» h_i и g_i, зависящих, в свою очередь, от структурного подобия процесса и его модели.

Следовательно, выражение (5) устанавливает в самом общем виде связь между структурным и физическим подобием процесса и модели. В частном случае, когда коэффициенты h_i и g_i представляют собой тождественные преобразования (масштаб 1:1), имеем

$$\varphi_i \equiv \varphi_{0i}. \qquad (6)$$

Отсюда следует формула (1).

Рассмотрим процесс полета, а в его представлении любой сложный процесс как топологическое пространство F. Изучение элементов и взаимосвязей между ними в сложных процессах на примерах процессов полета и проектирования показывает, что сложные процессы отвечают трем условиям, которые называются аксиомами топологической структуры [3], поэтому сложный процесс является топологическим пространством. Кроме того, сложный процесс, рассматриваемый как система $H_0 = Q_0 \times V_0$, является метрическим. Метрика этого пространства задается временной программой или порядком выполнения процесса.

Любая модель сложного процесса должна формироваться как некоторая математическая структура. Эта математическая структура превращается в модель в случае, когда элементам модели дается некоторая физическая интерпретация. Вопрос о подобии или эквивалентности сложного процесса и его модели упирается в проблему подобия или эквивалентности их структур. Поэтому следует установить их топологическое подобие и найти систему топологических инвариантов, чтобы иметь возможности для точного сравнения.

Если говорить о процессе полета любого летательного аппарата, то для формирования его модели совершенно недостаточно описать динамику его полета. Любой полет характеризуется еще и временной программой или графиком полета, процессами формирования не только управляющих сигналов, но и моментами их реализации и т. д. Если исходить из требований подобия, то следует рассматривать и это, причем весьма большое, множество характеристик и свойств полета.

Если говорить о процессе проектирования, то для формирования его модели недостаточно создать календарный план процесса. В процессе проектирования могут возникнуть новые технические решения (и не только), которые могут в корне изменить весь процесс.

В результате становится необходимым рассматривать не только физическое подобие элементов сложного процесса и элементов его модели, но также и структурное подобие процесса и его модели. Попробуем рассмотреть топологические инварианты сложного процесса, применяя в качестве примера два таких сложных процесса, как проектирование и процесс полета самолета, и найти у них общие свойства и характеристики.

4. Топологические инварианты сложного процесса и его модели

Введение дискретно-непрерывной топологии на множествах Q_0 и V_0 позволяет описать свойства этих множеств с помощью топологических инвариантов.

Каждое из множеств Q_0 и V_0 конечно. Поэтому одним из инвариантов системы $H_0 = Q_0 \times V_0$ является конечность множеств, которая численно выражается их мощностью:

– n_{0Q} – мощность множества Q_0;

– n_{0V} – мощность множества V_0.

Из этих двух величин мощность n_{0Q} множества Q_0 является топологическим инвариантом системы H_0, а мощность n_{0V} множества V_0 – не является, так как она вполне определяется через мощность n_{0Q} множества Q_0 и его порядковый тип R_0.

Одним из основных топологических свойств выступает свойство компактности. В применении к сложному процессу оно означает, что любая последовательность элементов имеет по крайней мере одну предельную точку, за которой не может быть ни одного элемента процесса. Свойство компактности эквивалентно свойству множества быть замкнутым и ограниченным. Действительно, процесс полета проектирования как множество H_0 включает в себя граничные точки (замкнутость), кроме того, никакая последовательность ни процесса полета, ни процесса проектирования не может устремиться в бесконечность.

Все элементы сложного процесса имеют вполне определенную ориентацию во времени и пространстве. Каждый элементарный процесс может реализовываться только в одном направлении: от начала к концу, поскольку течение времени необратимо.

Перечисленные свойства системы $H_0 = Q_0 \times V_0$: конечность, замкнутость, ограниченность и направленность позволяют представлять модель процесса проектирования в виде конечного, прогрессивно-ограниченного, ориентированного графа $H = Q \times V$. Граф $H = Q \times V$ имеет конечное число дуг (ориентированных ребер) и вершин, может иметь циклы, но не имеет контуров. Реальный сложный процесс (проектирования или полета) невозможно представить состоящим из совершенно независимых, несвязанных между собой элементов. Это означает, что и соответствующий ему граф не может состоять из несвязанных между собой компонент, то есть граф $H = Q \times V$ имеет одну компоненту связности.

Итак, установлены следующие топологические свойства множества H_0 как системы множеств Q_0 и V_0:

– конечность;

– ограниченность;

– замкнутость;

– связность.

Следовательно, и модель сложного процесса тоже может быть представлена в виде графа $H = Q \times V$. Графы, кроме указанных свойств и числа, входящих в них элементов, могут иметь и различные характеристические числа. Особый интерес при этом представляет собой цикломатическое число графа $H = Q \times V$, которое определяется следующей формулой:

$$\nu(H) = m_H - n_H + 1, \tag{7}$$

где m_H – число дуг; n_H – число вершин графа H.

Цикломатическое число равно наибольшему числу независимых циклов графа [13; 14] и определяет сложность структуры графа, а следовательно, определяет сложность как процесса (системы), так и его модели. Цикломатическое число является очень важным инвариантом системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$.

Изучение свойств порядка, определенного на множествах Q_0 и V_0 показывает, что эти множества линейно упорядочены, индуктивны и всегда могут быть упорядочены, то есть могут иметь порядковые типы, поэтому могут быть пронумерованы.

При этом оказывается, что порядковый тип F_0 множества V_0 вполне определяется порядковым типом R_0 множества Q_0. Это означает, что способ упорядочения множества V_0 вполне определяется способом упорядочения множества Q_0.

Таким образом, для обеспечения подобия сложного процесса и его модели необходимо, чтобы были равны порядковый тип R_0, заданный на множестве Q_0 элементов сложного процесса, и порядковый тип R, определенный на множестве дуг графа $H(V, Q)$, то есть $R_0 = R$. Равенство $F_0 = F$ обеспечивается при этом автоматически.

Теоремы, доказывающие топологические свойства, а именно: конечность, замкнутость, ограниченность и связность, приведены далее.

Свойства множеств Q_0, V_0 и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$

Теорема 1. Множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ конечно [11].

Доказательство. Каждый элемент $q_{0i} \in Q_0$ имеет конечное время реализации $(0 < \Delta t_i < \infty)$. Если число одновременно выполняемых элементов процесса не превышает конечного числа возможных исполнителей (в процессе проектирования программного продукта это могут быть системы, программы, агрегаты, люди), то общее время протекания всего процесса в целом также конечно. Теорема доказана.

Мощность множества $Q_0 = \{q_{0i}\}$ равна числу n_{0Q} элементов q_{0i}.

Теорема 2. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ конечно [11].

Доказательство. Множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ конечно, а каждому элементу $q_{0i} \in Q_0$ могут быть поставлены в соответствие в точности два элемента $v_{0h} \in V_0$. Обозначим их $v_h^{(+)}(q_{0i})$ и $v_h^{(-)}(q_{0i})$ соответственно. Имеем $V_0 = \left\{v_h^{(+)}(q_{0i})\right\} \cup \left\{v_h^{(-)}(q_{0i})\right\}$. Очевидно, что $\overline{\left\{v_h^{(+)}(q_{0i})\right\} \cup \left\{v_h^{(-)}(q_{0i})\right\}} = \emptyset$ и, следовательно, V_0 конечно. Теорема доказана.

Мощность множества V_0 равна числу n_{0V} элементов v_{0h}.

Из доказанных теорем следует, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ конечно.

Теорема 3. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ является метрическим пространством [11].

Доказательство. Так как $v_{0h} \in V_0$ – суть точки на оси времени (числовой оси), то каждой паре (v_{0x}, v_{0y}) можно поставить в соответствие число $\rho(v_{0x}, v_{0y}) > 0$, называемое интервалом (расстоянием) и удовлетворяющее аксиомам метрики:

1) $\rho(v_{0x}, v_{0y}) \geq 0$;
2) $\rho(v_{0x}, v_{0y}) = 0$;
3) $\rho(v_{0x}, v_{0y}) = 0 \leftrightarrow x = y$;
4) $|\rho(v_{0x}, v_{0y})| = |\rho(v_{0y}, v_{0x})|$ – симметрия;
5) $|\rho(v_{0x}, v_{0z})| \leq |\rho(v_{0x}, v_{0y})| +$ $+|\rho(v_{0y}, v_{0z})|$ – правило треугольника.

Теорема доказана.

Следствие 1. Метрика на множестве Q_0 является следствием метрики на множестве V_0.

Следствие 2. Множества $V_0 = \{v_{0h}\}$, $Q_0 = \{q_{0i}\}$ и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ являются топологическими пространствами [1–3]. Введение топологии на множестве $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ позволяет рассматривать вопрос о топологических инвариантах системы H_0.

Одним из основных топологических свойств пространства является свойство компактности. Докажем это.

Теорема 4. Если $Q_0 = \{q_{0i}\}$ – множество элементов процесса, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ – множество моментов их начала и окончания, то множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ компактно [11].

Для доказательства теоремы 4 покажем вначале, что компактны множества Q_0 и V_0. В качестве первой части доказательства используем достижения теоремы 6.1 Н. Стинрода и У. Чинна [15] и введем лемму.

Лемма 4.1. Любой замкнутый элемент $\Delta v_{0h} \in V_0$ компактен. Доказательство леммы приведено в [15]. Результат доказательства: элемент Δv_{0h} компактен. Для дальнейших рассуждений воспользуемся теоремой 6.4 Стинрода и У. Чинна [15] и снова введем лемму.

Лемма 4.2. Пусть X – компактное пространство, а функция $f: X \to Y$ непрерывна, тогда образ f_x компактен [15]. Доказательство леммы приведено в [15].

Из лемм 4.1 и 4.2 с очевидностью вытекает, что любой замкнутый элемент сложного процесса $q_{0i} \in Q_0$ компактен. Следовательно, множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ компактно.

Перейдем к доказательству второй части теоремы, что множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ компактно. Для этого составим множество $V_0^* = \left\{v_h^{(+)}(q_{0i}); v_h^{(-)}(q_{0i})\right\}$. Очевидно, что V_0^* конечно и вполне покрывает множество, то есть V_0^* – конечное покрытие V_0. Следовательно, V_0 компактно. Так как Q_0 компактно и V_0 компактно, очевидно, что $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ компактно [11]. Теорема доказана.

Поскольку топологическое пространство $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ является метрическим и компактным, то оно компактно в себе. В применении к процессу проектирования (а также к любому сложному процессу, протекающему во времени) это означает, что предельные точки процесса принадлежат самому процессу. Свойство компактности эквивалентно свойствам множества быть замкнутым и ограниченным.

Определение. Множество $X = R^m$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором, достаточно большом шаре, то есть если существуют такие точки x_0 и число $r > 0$, что $X \subset N(x_0, r)$ [15].

Определение. Пусть X – множество в R^m. Подмножество $A \subset X$ называется замкнутым в X, если его дополнение в X является открытым множеством в X. Короче, A замкнуто в X, если $X - A$ открыто в X [15].

Теорема 5. Компактное множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ ограничено и замкнуто [12].

В качестве леммы 4.1 была использована первая часть теоремы 6.1 из [15].

Полностью теорема гласит: каждое компактное подмножество R^m ограничено и замкнуто в R^m. Из этой теоремы следует справедливость теоремы 5. Таким образом, $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ – замкнутое и ограниченное множество. Теорема доказана.

В применении к рассматриваемому сложному процессу полета или проектирования свойство ограниченности означает, что никакая последовательность элементов процесса не может устремиться в бесконечность. Замкнутость, в свою очередь, означает, что сложный процесс как множество включает и все свои граничные точки (замыкание множества). Ограниченность и замкнутость множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ являются топологическими инвариантами сложного процесса и позволяют установить некоторые свойства ориентированного графа, с помощью которого может быть представлена модель такого сложного процесса, как проектирование.

Покажем далее, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ как математический объект представляет собой граф.

Определение. Граф есть пара, состоящая из множества X и отображения $\Gamma: X \to X$, или, что то же самое, пара $G(X, \Gamma)$ – суть граф, в котором X – множество вершин, а Γ: X → X – множество ребер.

Теорема 6. Если $Q_0 = \{q_{0i}\}$ – множество элементов сложного процесса, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ – множество моментов их начала и окончания, то пара $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ – суть граф [11].

Доказательство. Очевидно, что каждому $q_{0i} \in Q_0$ соответствует пара $\left(v_h^{(+)}(q_{0i});\ v_h^{(-)}(q_{0i})\right)$ и, если $V_0^* = \left\{v_h^{(+)}(q_{0i});\ v_h^{(-)}(q_{0i})\right\}$ – множество всех таких пар, то $\overline{V_0^*} = \overline{\left\{v_h^{(+)}(q_{0\iota}); v_h^{(-)}(q_{0\iota})\right\}} = \emptyset$.

Следовательно, $V_0^* \equiv f(Q_0)$ и существует однозначное отображение $\Gamma_V: V_0 \to V_0$, такое, что все $q_{0i} \in \Gamma_V(v_{0h})$, а также существует f – однозначное отображение множества Q_0 на множество V_0, такое, что все $f_{q_{0i}} \in V_0$.

Тогда по определению $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ – суть граф, в котором V_0 – множество вершин, а Q_0 – суть множество ребер. Теорема доказана.

Свойства графа $H_0(V_0, Q_0)$ определяются, в частности, тем, что множество $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ замкнуто и ограничено.

Определение. Граф называется прогрессивно-ограниченным в вершине v_{0h}, если существует такое целое число m, что длина каждого пути, начинающегося в вершине v_{0h}, не превосходит m; граф, прогрессивно-ограниченный в каждой своей точке, прогрессивно ограничен [13].

Значит, кроме того, что граф $H_0(V_0, Q_0)$ – прогрессивно-ограниченный, он является еще и прогрессивно-конечным, хотя обратное утверждение неверно [13]. Все элементы процесса проектирования (или полета) имеют вполне определенную ориентацию во времени и пространстве. Отсюда следует, что $H_0(V_0, Q_0)$ – ориентированный граф. Ребра ориентированного графа называются дугами.

Перейдем к рассмотрению вопроса о связности графа.

Определение. Топологическое пространство (X, Y) называется связным тогда и только тогда, когда множество нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств [1; 3].

Реальный сложный процесс (полет или проектирование) отличается от произвольного набора его элементов, прежде всего, взаимной зависимостью его отдельных элементов и участков между собой. Сложный процесс (полет или проектирование) невозможно представить себе в виде совершенно независимых участков, несмотря на то что при изучении сложного процесса и формировании его модели никогда нельзя утверждать, что нам известны все связи элементов сложного процесса между собой.

Процесс проектирования или полета всегда состоит из одной и только одной компоненты связности, а это, в свою очередь, означает, что граф $H_0(V_0, Q_0)$ должен быть всегда связным. Данные рассуждения можно применить к любому сложному процессу, модель которого мы хотим построить для его изучения.

Определение. Граф $H_0(V_0, Q_0)$ называется полным, если $(v_{0y}; v_{0x}) \notin Q_0 \Rightarrow (v_{0x}, v_{0y}) \in Q_0$, то есть если любые две вершины соединены хотя бы в одном направлении [13; 14].

Определение. Граф $H_0(V_0, Q_0)$ называется сильно связным, когда для любых двух вершин v_{0x} и v_{0y} $(v_{0x} \neq v_{0y})$ существует путь, идущий из v_{0x} в v_{0y} (или обратно) [13; 14].

Теорема 7. Граф $H_0(V_0, Q_0)$, в котором $V_0 = \{v_{0h}\}$ – множество моментов начала и окончания элементов процесса проектирования, а Q_0 – множество всех пар $(v_{0x}; v_{0y})$, таких, что $v_{0x} < v_{0y}$ (в том числе и по транзитивности), сильно связен [11].

Доказательство.

По определению. Процесс проектирования (или полета), точнее, его модель, может включать в качестве элементов не все пары $(v_{0x}; v_{0y})$, такие, что $v_{0x} < v_{0y}$, а только необходимую их часть, которая обеспечивает связность графа H_0.

Определение. Частичным графом графа $H_0'(V_0', Q_0') = H_0'(V_0', \Gamma)$ называется граф $H_0(V_0, Q_0) = H_0(V_0, \Delta)$, где $v_{0h} = \Gamma_{v_{0h}}$ при всех $v_{0h} \in V_0$ [16].

Из теоремы 7 и приведенного выше определения следует, что граф $H_0(V_0, Q_0)$ является частичным графом графа $H_0'(V_0', Q_0')$.

Очевидно, что в рассматриваемом частичном графе $H_0(V_0, Q_0)$ не обязательно все $(v_{0h}; v_{0g}) \in Q_0$, то есть если граф $H_0'(V_0', Q_0')$ связен, то из этого еще не следует, что связен граф $H_0(V_0, Q_0)$. Однако, имея в виду определение, принятое для всюду плотных и всюду не плотных элементов процесса проектирования, мы можем дополнить множество Q_0 таким числом всюду не плотных элементов $(v_{0x}; v_{0y}) \in Q_0$, чтобы граф $H_0(V_0, Q_0)$ был всегда связен [11].

Рассмотрим условия, необходимые для обеспечения связности графа $H_0(V_0, Q_0)$**.**

Максимально возможное число дуг в связном графе без петель определяется теоремой 2.2.4. Оре [14]:

$$N_Q(n_V, 1) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * n,$$

где n_V – число вершин в графе.

Из теоремы 2.2.5 [14] следует, что если в графе с n_V вершинами дуг больше, чем $N_Q(n_V, 1) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * (n_V - 2)$, то граф связен. Таким образом, имеет место следующая теорема [11].

Теорема 8. Для того чтобы граф $H_0(V_0, Q_0)$, в котором $Q_0 = \{q_{0i}\}$ – множество всюду плотных элементов процесса проектирования, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ – множество моментов их начала и окончания, был связен, достаточно дополнить множество Q_0 всюду не плотными элементами процесса проектирования так, чтобы соблюдалось условие

$$N_q(n_V, 1) \geq n_{0Q} + \Delta N_Q(v_{0x}, v_{0y}) \geq N_Q(n_V, 2),$$

где n_{0Q} – число элементов процесса проектирования (всюду плотных) или мощность множества Q_0; $\Delta N_Q(v_{0x}, v_{0y})$ – дополнительное число всюду не плотных элементов процесса проектирования; n_V – число моментов начала и окончания элементов сложного процесса [11].

Следствие 8.1. Минимально необходимое число дополнительных всюду не плотных элементов процесса проектирования, обеспечивающих связность графа $H_0(V_0, Q_0)$ не превышает

$$N_{Q_{\min}}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * (n_V - 2) - n_{0Q}.$$

Следствие 8.2. Максимально-возможное дополнение графа $H_0(V_0, Q_0)$ всюду не плотными элементами процесса проектирования (полета) определится формулой

$$N_{Q_{\min}}(v_{0x}; v_{0y}) = \frac{1}{2}(n_V - 1) * n_V - n_{0Q}.$$

Следствие 8.3. Условие связности графа $H_0(V_0, Q_0)$, определенное теоремой 10, всегда может быть выполнено [11]. Действительно,

$$N_{Q_{\max}}(v_{0x}; v_{0y}) - N_{Q_{\min}}(v_{0x}; v_{0y}) = n_V - 1 > 0.$$

Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 9. Проектирование как дискретно-непрерывный процесс, рассматриваемый в виде системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$, всегда может быть представлено связным графом $H_0(V_0, Q_0)$ [11].

Итак, если проектирование (или полет) как дискретно-непрерывный процесс рассматривается в виде множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$, где $Q_0 = \{q_{0i}\}$ –

множество элементов процесса, а $V_0 = \{v_{0h}\}$ – множество моментов их начала и окончания, то множество H_0 конечно, ограничено и замкнуто и всегда может быть представлено в виде связного прогрессивно-ограниченного, ориентированного графа.

Свойства системы отношений, определенных на множествах $\boldsymbol{Q_0}$, $\boldsymbol{V_0}$ и $\boldsymbol{H_0 = Q_0 \oplus V_0}$

На множествах Q_0, V_0 и $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ определены бинарные отношения вида $a_x \le a_y$. Рассмотрим свойства этих отношений (отношений порядка).

Определение. Отношение типа $a_x \le a_y$ называется частичным упорядочением или отношением включения, при наличии следующих свойств [1; 3]:

1) $a_x \le a_y$ – рефлексивность;

2) если $a_x \le a_y$ и $a_y \le a_x$, то $a_x = a_y$ – антисимметричность;

3) если $a_x \le a_y$ и $a_y \le a_z$ – транзитивность.

Определение. Отношение $a_x \le a_y$ называется отношением строгого упорядочения или строгого включения, если оно удовлетворяет двум условиям [1; 3]:

1) $a_x < a_y$ и $a_y < a_x$ не имеют место одновременно;

2) транзитивность.

Отношение строгого упорядочения называют также линейным упорядочением. Линейно упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если любое непустое подмножество в множестве X имеет первый элемент.

Далее будет приведен ряд теорем, которые позволят (с учетом того обстоятельства, что сложный процесс может быть представлен ориентированным графом $H_0(V_0, Q_0)$) установить следующие свойства множеств Q_0 и V_0 системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ и их порядка:

1) множество V_0 может быть определено в том и только в том случае, если задано множество Q_0 и отношение порядка на множестве Q_0;

2) способ упорядочения (нумерации элементов) множества V_0 вполне определяется способом упорядочения (нумерации элементов) множества Q_0;

3) для того чтобы множество V_0 было линейно упорядочено, необходимо и достаточно, чтобы было линейно упорядоченным множество Q_0. Отсюда следует, что если множество V_0 линейно упорядочено, то и множество Q_0 линейно упорядочено.

Реальный процесс проектирования в действительности всегда, так или иначе, организован, то есть упорядочен. Из этого следует теорема 10.

Теорема 10. Множество V_0 линейно упорядочено.

Доказательство теоремы приведено в [11].

Из сказанного выше и теоремы 10 получаем, что множество Q_0 также линейно упорядочено. Это, в частности, означает, что в ориентированном графе $H_0(V_0, Q_0)$ не должно быть (и не может быть) контуров. В реальном процессе проектирования (или полета) возможное наличие контуров означает, что может иметь место последовательное выполнение одинаково обозначенных элементов, однако это не означает повторения одних и тех же элементов.

Действительно, если во время проектирования (полета) или другого сложного процесса некоторые элементы повторяются, то такое повторение, по сути, является выполнением нового элемента, так как при этом неминуемо меняется по крайней мере интервал времени реализации и область пространства, в которых производится «повторное» выполнение элемента. Подобное содержание имеют контуры в итерационных вычислительных процессах и системах с обратной связью, реализующих дискретно-непрерывные процессы. Представление такого «повторения» в виде графа с контурами позволяет существенно сократить размерность графического или матричного представления графа.

Поскольку множества Q_0 и V_0 линейно упорядочены, то каждое из них может иметь порядковые типы [2]. Порядковый тип множества Q_0 может быть определен как множество вариантов упорядочения на множестве Q_0 или множество вариантов процесса проектирования.

Введем обозначения: R_0 – порядковый тип множества Q_0, F_0 – порядковый тип множества V_0. Способ задания порядковых типов может быть различным. Удобно задавать порядковые типы в матричной форме с помощью матриц смежности или матриц отношения следования. Рассмотрим вопросы вполне упорядочения множеств Q_0 и V_0.

На основании теоремы Цермело [14] справедливо утверждение: множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ может быть вполне упорядочено. Следовательно, множество Q_0 имеет минимальный элемент, а любое подмножество X_0 множества Q_0 имеет первый элемент. Действительно, процесс проектирования (или полета) в целом и любой его участок или этап имеют минимальный или первый элемент. Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется порядковым числом [2].

Введем обозначение Ω_0 – порядковое число множества Q_0.

Наличие порядкового числа Ω_0 означает, что элементы $q_{0i} \in Q_0$ можно перенумеровать, притом несколькими способами. Все элементы любого конкретного процесса полета (проектирования) можно перенумеровать, к тому же в нескольких вариантах, в соответствии с реализацией конкретного сложного процесса.

Теорема 11. Множество $Q_0 = \{q_{0i}\}$ индуктивно.

Доказательство теоремы приведено в [11].

На основании леммы Цорна [2; 13] или принципа максимальности Хаусдорфа – Куратовского [2], множество Q_0 имеет максимальный элемент, а на основании теоремы Цорна, любое непустое подмножество множества Q_0 имеет по крайней мере один максимальный элемент. Для реального сложного процесса всегда можно указать элемент, определяющий начало процесса, и элементы, определяющие начало и окончание любого участка сложного процесса.

Поскольку множество V_0 линейно упорядочено, то на множестве V_0 определены отношения антисимметрии и транзитивности. Как и множество Q_0, множество V_0 может быть вполне упорядочено, следовательно, множество V_0 имеет минимальный элемент. Любое подмножество Y_0 множества V_0 имеет первый элемент. Множество V_0 имеет порядковое число. Элементы множества V_0 можно перенумеровать, притом несколькими способами, однако способ нумерации элементов множества V_0 определяется способом нумерации элементов множества Q_0. Обозначим порядковое число множества V_0 через Λ_0.

Теорема 12. Множество $V_0 = \{v_{0h}\}$ индуктивно.

Доказательство теоремы приведено в [11].

Из вышеприведенных теорем следует, что отношения порядка на множествах Q_0 и V_0, которые определяются порядковыми типами R_0 и F_0, не могут быть независимыми. Это означает, что порядковый тип $F_0 = V_0 \times V_0$ не может быть задан независимо от множества Q_0 и его порядкового типа $R_0 = Q_0 \times Q_0$.

Заключение

Основной результат исследования – показать, что промежуточная, дискретно-непрерывная структура необходима. Только с введением такой топологической структуры получается доказать, что сложный процесс или система, а также модель представляют собой прогрессивно-ограниченный ориентированный граф.

Таким образом, мы получаем возможность перевести исследование сложных процессов в область комбинаторики и воспользоваться достижениями теории графов, топологии и т. п., чтобы установить топологические инварианты или критерии структурного подобия для возможности сравнения между собой как различных сложных процессов, так и созданных для их реализации продуктов.

Сложные процессы как дискретно-непрерывные процессы и их модели имеют следующие топологические инварианты или критерии структурного подобия:

1) мощность множеств Q_0 и Q. Обозначим их соответственно n_{0Q} и n_Q;

2) замкнутость множеств Q_0 и Q. Это свойство не имеет численной характеристики, однако показывает, что все граничные точки сложного процесса принадлежат этому процессу. Каждой граничной точке сложного процесса взаимнооднозначно соответствует одна из граничных точек графа $H(V, Q)$, представляющего собой модель сложного процесса;

3) ограниченность множеств Q_0 и V_0 накладывает на граф $H(V, Q)$ требование отсутствия контуров;

4) связность множества $H_0 = Q_0 \oplus V_0$ требует, чтобы граф $H(V, Q)$ также был связным, то есть состоял из единственной компоненты;

5) порядковый тип множества Q_0. Сложный процесс и его модель будут только тогда подобны, когда равны порядковые типы множеств элементов Q_0 и Q, то есть $R_0 = R$:

а) временная программа сложного процесса есть не что иное, как вариант порядкового типа F_0 множества V_0. Поскольку F_0 зависит от R_0, то невозможно формирование временной программы независимо от порядкового типа R_0. Таким образом, наличие логической структуры сложного процесса, определяющей порядковый тип $R_0 = Q_0 \times Q_0$, является необходимым условием формирования временной программы сложного процесса;

б) поскольку порядковый тип F_0 вполне определяется порядковым типом R_0 при заданном Q_0, то должно существовать однозначное соответствие f, такое, что $f: R_0 \to F_0$. Следовательно, для формирования временной программы сложного процесса при известных Q_0 и R_0 могут быть определены и заданы формализованные в полном виде правила (алгоритмы), допускающие автоматизированное применение;

в) если порядковый тип R_0 не задан, то формирование временной программы процесса проектирования, то есть определение F_0 возможно только при одновременном определении R_0 и, следовательно, не может выполняться по правилам, формализованным в конечном виде, а потребует применения каких-либо итерационных методов.

Цикломатическое число системы $H_0 = Q_0 \oplus V_0$, представленной на модели в виде графа $H(V, Q)$, определяется формулой $\nu(H) = m_H - n_H + 1$. Этот инвариант является особым. Требование равенства цикломатических чисел сложного процесса и модели не всегда обязательно.

Список литературы

1. *Kelley D.L.* General topology. New York, Toronto, London: D. van Nostrand Company, Inc., 1955. 298 p.
2. *Куратовский К., Мостовский А.* Топология. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. *Viro O.Ya., Ivanov O.A., Netsvetaev N.Yu., Kharlamov V.M.* Elementary topology. Problem textbook. AMS, 2008. 400 p.
4. *Корухов В.В.* Модель дискретно-непрерывного пространства-времени // Философия науки. 2001. № 2 (10). С. 4.
5. *Корухов В.В., Шарыпов О.В.* Структура пространства-времени и проблема физического вакуума: состояние и перспективы // Философия науки. 2006. № 1 (28). С. 20–36.
6. *Chorafas D.N.* Systems and simulation. 1st ed. Academic Press, 1965. 503 p.
7. *Quade E.S.* Analysis for military decisions. Santa Monica: RAND Corporation, 1964. 389 p.
8. *Малинина Н.Л.* Математические аспекты процесса проектирования // Прикладная геометрия, инженерная графика, компьютерный дизайн. 2006. № 3 (5). С. 12–18.
9. *Hill P.H.* The science of engeneering design. New York: Tufts University; Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970. 264 p.
10. *Моисеев Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 223 с.
11. *Малинина Н.Л., Малинин Л.И.* Топологические свойства процесса проектирования // Труды МАИ. 2008. № 30. С. 3.
12. *Малинин Л.И., Малинина Н.Л.* Изоморфизм графов в теоремах и алгоритмах. М.: URSS, 2009. 249 с.
13. *Berge C.* The theory of graphs and its applications. London: Methuen; New York: Wiley, 1962. 247 p.
14. *Ore O.* Theory of graphs. Providence: American Mathematical Society, 1962. 270 p.
15. *Chinn W.G., Steenrod N.E.* First concepts of topology: the geometry of mappings of segments, curves, circles, and disks. Washington: Mathematical Association of America, 1966. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859339
16. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгоритмов. М.: Наука, 1984. 282 с.

Сведения об авторе

Малинина Наталия Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 604, Аэрокосмический факультет, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0003-0116-5889, eLIBRARY AuthorID: 502378. E-mail: malinina806@gmail.com