УДК 622.692

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТРУБОПРОВОДЕ С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

Е.К. Синиченко, Ф.В. Рекач

Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия 117923

Рассматривается задача определения частот свободных колебаний в трубопроводе при наличии упругого элемента.

Ключевые слова: частота свободных колебаний, упругий элемент.

Практика эксплуатации магистральных трубопроводов систем водоснабжения и напорных сетей канализации показывает, что пульсации давления и расхода, возникающие на выходе нагнетательных установок и затем передающиеся в магистраль, а также возмущения ударного характера, имеющие место при пуске и выключении нагнетательных установок, срабатывании запорных элементов, являются причиной воздействия на трубопровод динамических нагрузок, которые могут вызывать аварии и катастрофы с тяжелыми последствиями, человеческими жертвами.

Одним из эффективных средств гашения волновых процессов в трубопроводных системах являются стабилизаторы давления. Принцип их работы основан на распределенном по длине трубопровода диссипативном и упругодемпфирующем воздействии на пульсирующий поток перекачиваемой среды. Наибольший эффект гашения достигается при диссипации энергии пульсаций на перфорационных отверстиях, равномерно распределенных по длине стабилизатора, а также вследствии демпфирования, обусловленного податливостью упругих элементов стабилизатора, выполняемых в виде газовой подушки, камер и сильфонов со стенками из пружинистых и эластичных материалов.

Однако наличие в трубопроводной системе стабилизатора давления может привести к значительному изменению параметров, в том числе и собственных частот водопроводной или напорной канализационной схемы. Это необходимо учитывать, так как при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой системы возникает резонанс колебаний, ведущий к выходу из строя отдельных агрегатов водоснабжения или напорной канализации. Этой проблеме и посвящена данная работа.

Неустановившееся движением несжимаемой жидкости в трубопроводе без учета трения описывается уравнениями движения и неразрывности следующего вида:

$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{F}\frac{\partial G(x,t)}{\partial t},\quad -\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\frac{a^2}{F}\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}, \tag{1}$$

где $p(x, t)$ — давление в трубопроводе, [Н/м^2]; $G = \rho vF$ — массовый расход жидкости в магистрали, [кг/сек]; ρ — плотность жидкости в трубопроводе; F — площадь поперечного сечения магистрали; a — скорость распространения волн давления; v — скорость движения жидкости.

Дифференцируя первое уравнение (1) по x, второе — по t, после преобразований получим:

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Общее решение системы (2) в форме Д'Аламбера для участка $x_1 = 0 \div l_1$ (рис. 1) записывается в виде суммы двух волн — прямой и обратной:

$$G_1(x_1,t) = -F\cdot\left[f_1\left(t-\frac{x_1}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{x_1}{a}\right)\right], \tag{3}$$

$$p_1(x_1,t) = -a\cdot\left[f_1\left(t-\frac{x_1}{a}\right)-f_2\left(t+\frac{x_1}{a}\right)\right],\ [f_i] = \frac{\text{кг}}{\text{сек}\cdot\text{м}^2}. \tag{4}$$

Волновое уравнение для участка $x_2 = 0 \div l_2$ имеет следующий вид:

$$G_2(x_2,t) = -F\cdot\left[f_3\left(t-\frac{x_2}{a}\right)+f_4\left(t+\frac{x_2}{a}\right)\right], \tag{5}$$

$$p_2(x_2,t) = -a\cdot\left[f_3\left(t-\frac{x_2}{a}\right)-f_4\left(t+\frac{x_2}{a}\right)\right]. \tag{6}$$

Волновое уравнение для участка $x_3 = 0 \div l_3$ имеет следующий вид:

$$G_3(\varphi, x_3, t) = -F\cdot\left[f_5\left(t-\left(\frac{\varphi}{\omega}+\frac{x_3}{a}\right)\right)+f_6\left(t+\left(\frac{\varphi}{\omega}+\frac{x_3}{a}\right)\right)\right], \tag{7}$$

$$p_3(\varphi, x_3, t) = -a\cdot\left[f_5\left(t-\left(\frac{\varphi}{\omega}+\frac{x_3}{a}\right)\right)-f_6\left(t+\left(\frac{\varphi}{\omega}+\frac{x_3}{a}\right)\right)\right], \tag{8}$$

где ω — круговая частота собственных колебаний; φ — фазовый угол упругого элемента [2], который равен:

$$\varphi = -\mathrm{arctg}\left((\rho F_0 a)/(c/\omega - m\omega)\right) - k\pi,\ \ k = 1, 2, 3; \tag{9}$$

ρ — плотность жидкости в трубопроводе, c — жесткость пружины в упругом элементе, [Н/м], F_0 — площадь поперечного сечения упругого элемента, m — масса поршня упругого элемента.

Рассмотрим систему, открытую с двух сторон при $l_3 = 0$. Тогда *краевые условия* примут вид:

$$p_1(0,t) = 0,\ \ x_1 = 0, \tag{10}$$

$$p_2(0,t) = 0,\ \ x_2 = 0, \tag{11}$$

$$G_3(0,0,t) = 0,\ \ \varphi = 0,\ \ l_3 = 0. \tag{12}$$

В узле ① (рис. 1) запишем условия равенства расходов и давлений:

$$G_1(l_1,t)+G_2(l_2,t)+G_3(\varphi,0,t)=0, \qquad (13)$$

$$p_1(l_1,t)=p_2(l_2,t), \qquad (14)$$

$$p_1(l_1,t)=p_3(\varphi,0,t). \qquad (15)$$

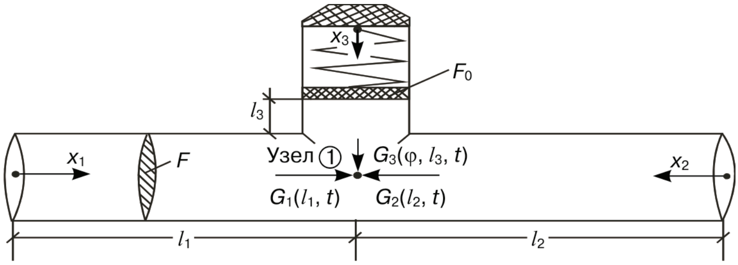

Рис. 1. Движение жидкости в трубопроводе

Подставляя (12) в (6), получим: $-a\cdot\left[f_1(t-0)-f_2(t+0)\right]=0$, т.е. $f_1(t)=$ $=f_2(t)=f_7(t)$.

Аналогично, подставляя (11) в (6), получим:

$$f_3(t)=f_4(t)=f_8(t). \qquad (16)$$

Подставляя (12) в (7), получим: $f_5(t)=-f_6(t)=f_9(t)$.

Подставляя (16) в (3)—(8), получим:

$$\begin{aligned}
G_1(x_1,t)&=-F\cdot\left[f_7\left(t-\frac{x_1}{a}\right)+f_7\left(t+\frac{x_1}{a}\right)\right],\\
p_1(x_1,t)&=-a\cdot\left[f_7\left(t-\frac{x_1}{a}\right)-f_7\left(t+\frac{x_1}{a}\right)\right],\\
G_2(x_2,t)&=-F\cdot\left[f_8\left(t-\frac{x_2}{a}\right)+f_8\left(t+\frac{x_2}{a}\right)\right],\\
p_2(x_2,t)&=-a\cdot\left[f_8\left(t-\frac{x_2}{a}\right)-f_8\left(t+\frac{x_2}{a}\right)\right],\\
G_3(\varphi,0,t)&=-F\cdot\left[f_9\left(t-\frac{\varphi}{\omega}\right)-f_9\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right],\\
p_3(\varphi,0,t)&=-a\cdot\left[f_9\left(t-\frac{\varphi}{\omega}\right)+f_9\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right].
\end{aligned} \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (13)—(15), получим:

$$\begin{aligned}
&f_7(t-\tau_1)+f_7(t+\tau_1)+f_8(t-\tau_2)+f_8(t+\tau_2)+f_9(t-\overline{\varphi})-f_9(t+\overline{\varphi})=0,\\
&f_7(t-\tau_1)-f_7(t+\tau_1)=f_8(t-\tau_2)-f_8(t+\tau_2),\\
&f_7(t-\tau_1)-f_7(t+\tau_1)=f_9(t-\overline{\varphi})+f_9(t+\overline{\varphi}),
\end{aligned} \qquad (18)$$

где $\tau_1=\frac{l_1}{a},\ \tau_2=\frac{l_2}{a},\ \overline{\varphi}=\frac{\varphi}{\omega}.$

Зададим вид функции

$$f_i(t) = A_i \cos\omega t + B_i \sin\omega t. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим:

$$A_7 \cos\omega(t-\tau_1) + B_7 \sin\omega(t-\tau_1) - A_7 \cos\omega(t+\tau_1) - B_7 \sin\omega(t+\tau_1) =$$
$$= A_8 \cos\omega(t-\tau_2) + B_8 \sin\omega(t-\tau_2) - A_8 \cos\omega(t+\tau_2) - B_8 \sin\omega(t+\tau_2).$$
$$A_7 \cos\omega(t-\tau_1) + B_7 \sin\omega(t-\tau_1) - A_7 \cos\omega(t+\tau_1) - B_7 \sin\omega(t+\tau_1) =$$
$$= A_9 \cos\omega(t-\overline{\varphi}) + B_9 \sin\omega(t-\overline{\varphi}) + A_9 \cos\omega(t+\overline{\varphi}) + B_9 \sin\omega(t+\overline{\varphi}).$$

Преобразовав последние выражения по формулам тригонометрии, получим:

$$\cos\omega t \cdot (A_7 \cos\omega\tau_1 + A_8 \cos\omega\tau_2 - B_9 \sin\varphi) +$$
$$+ \sin\omega t \cdot (B_7 \cos\omega\tau_1 + B_8 \cos\omega\tau_2 + A_9 \sin\varphi) = 0,$$
$$\cos\omega t \cdot (-B_7 \sin\omega\tau_1 + B_8 \sin\omega\tau_2) + \sin\omega t \cdot (A_7 \sin\omega\tau_1 - A_8 \sin\omega\tau_2) = 0,$$
$$\cos\omega t \cdot (-B_7 \sin\omega\tau_1 - A_9 \cos\varphi) + \sin\omega t \cdot (A_7 \sin\omega\tau_1 - B_9 \cos\varphi) = 0.$$

Приравнивая выражения при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ к нулю, мы получаем систему из шести однородных линейных уравнений относительно A_7, B_7, A_8, B_8, A_9, B_9, которая разбивается на две эквивалентные системы:

$$\begin{cases} A_7 \cos\omega\tau_1 + A_8 \cos\omega\tau_2 - B_9 \sin\varphi = 0 \\ A_7 \sin\omega\tau_1 - A_8 \sin\omega\tau_2 = 0 \\ A_7 \sin\omega\tau_1 - B_9 \cos\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} B_7 \cos\omega\tau_1 + B_8 \cos\omega\tau_2 + A_9 \sin\varphi = 0 \\ -B_7 \sin\omega\tau_1 + B_8 \sin\omega\tau_2 = 0 \\ -B_7 \sin\omega\tau_1 - A_9 \cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Решая одну из систем, получим зависимость между ω, τ_1, τ_2, φ:

$$\operatorname{ctg}\omega\tau_1 + \operatorname{ctg}\omega\tau_2 + \operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{20}$$

Заменяя условие (9) на условие $G_2(0, t) = 0$ и выполняя аналогичные выкладки, получим решение для трубопроводной системы с открытым (в сечении $x_1 = 0$) и закрытым (в сечении $x_2 = 0$) концами:

$$\operatorname{ctg}\omega\tau_1 - \operatorname{tg}\omega\tau_2 + \operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{21}$$

Пример. Исходные данные: $\rho = 1000$ кг/м^3, $F_0 = F = 0{,}7854$ м^2 (диаметр трубы $\varnothing = 1$ м), $a = 1500$ м/с, $c = 3{,}14 \cdot 10^7 - 3{,}14 \cdot 10^8$ Н/м, $m = 1500$ кг, $l_1 = 50$ м, $l_2 = 50$ м, $l_3 = 0$.

На рис. 2 показаны три первые круговые частоты ω_1, ω_2, ω_3 для трубопроводной системы с открытыми концами (сплошные линии) и с открытым и закрытым концами (пунктирные линии) в зависимости от жесткости пружины c.

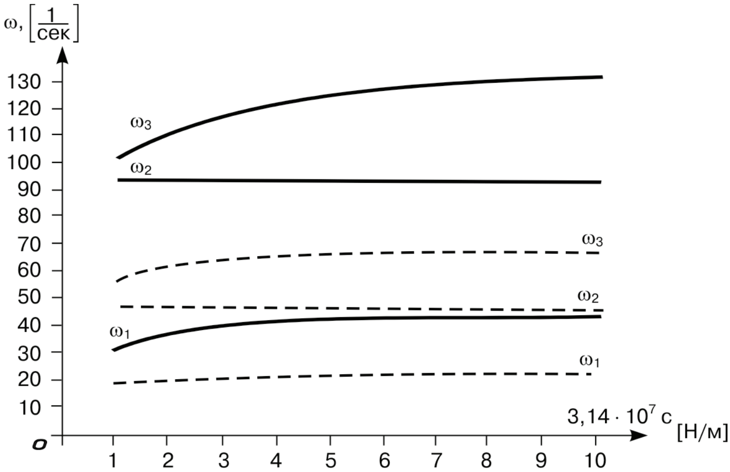

Рис. 2. Круговые частоты для трубопроводной системы

Следовательно, при расчете систем водоснабжения и напорной канализации важно определять спектр собственных частот трубопроводов, особенно при наличии стабилизаторов давления, включающих упругие элементы, способные значительно повлиять на общие параметры системы. В данной работе рассмотрен элемент трубопровода водоснабжения (или канализации), который может быть включен в общую схему. Методика подобного расчета подробно описана в работе [2]. Авторы рекомендуют не пренебрегать анализом вышеперечисленных факторов и в случае совпадения (или приближения) собственной частоты системы к частоте вынужденных колебаний воспользоваться методами ее изменения, описанными в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гидроупругие колебания и методы их устранения в закрытых трубопроводных системах / Под ред. Х.Н. Низамова. — Красноярск: ВНИИГИМ, 1983.

[2] *Махин В.А., Присняков В.Ф., Белик Н.П.* Динамика жидкостных ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1969.

[3] *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975.

DETERMINATION OF FREE OSCILLATIONS FREQUENCIES IN WATER LINES WITH ELASTIC ELEMENT

E.K. Sinichenko, F.V. Rekach

Peoples' Friendship University of Russia
Mikluho-Maklaja str., 6, Moscow, Russia, 117198

Pressure oscillations in water lines with elastic element are considered. D'Alamber method is used. Problem of determination of free oscillation frequencies is investigated.

Key words: free oscillation frequencies, elastic element.