УДК 681.511.48

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

С.Ф. Шершнев

Кафедра кибернетики
Московский государственный институт электроники и математики
(Технический университет)
Б. Трехсвятительский пер. 1-3/12, стр. 8, Москва, Россия, 109028

В статье рассматривается задача робастного управления неопределенной нелинейной системой в условиях неполной информации о ее параметрах. Находятся необходимые условия существования терминального робастного управления и асимптотической устойчивости системы первого приближения.

В настоящее время основу теории робастного управления составляют методы анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов. При этом исследуется не одна заданная линейная система, а устойчивость целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии неопределенности. Задачи управления, как правило, сводятся к задачам стабилизации или оптимального управления при не заданном времени окончания переходного процесса. Это позволяет использовать частотные методы, разработанные в теории автоматического регулирования [1]. Использование этих методов для синтеза управляющих воздействий для нестационарных систем при заданном интервале управления невозможно.

Модель объекта управления. Пусть нестационарный управляемый динамический объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, u, \alpha(t)),\ x \in R^n,\ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

$$y(t) = C(x(t)),\ \ y \in R^m,\ m \le n. \tag{2}$$

Начальное состояние $x(t_0)$ объекта (1) принадлежит ограниченному множеству X_0, также условия на правом конце:

$$g(x(T)) = 0,$$

где $g(x(T))$ — скалярная функция.

В уравнении (1) $\alpha(t) \in \Pi$ — параметры объекта, Π — замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^P. Предполагается, что управление $u(t) \in U$ почти всюду, U — замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^r.

Задан некоторый функционал, оценивающий эффективность управления объектом.

Пусть $\alpha(t) = \alpha(t_0, t) \in \Pi$, $t \in [t_0, T]$ — возможная траектория изменения параметров объекта (1). Тогда решения дифференциального уравнения (1) принадлежат некоторому дифференциальному включению

$$\frac{d}{dt}x(t) \subset f(x, u, \alpha(t)), x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

При известных траекториях изменения параметров для каждого управляемого объекта из множества (3) можно синтезировать $u^0(t) \in U$ [3], при котором функционал принимает минимальное значение. Однако оптимальное управление для какой-либо известной траектории параметров объекта может оказаться далеко не оптимальным при другой траектории параметров. Более того, управление может и не обеспечить даже устойчивости системы «объект—регулятор» при траекториях параметров, отличных от той, которая использовалась при синтезе оптимального управления.

Нахождение оптимального управления

Будем искать управление $u(t) \in \mathrm{U}$ как функцию состояния объекта (1):

$$u(t) = Kx(t). \tag{4}$$

Тогда правая часть уравнения (1) с управлением (4) будет иметь вид

$$f(x, \mathrm{u}, \mathrm{a}(t)) = f^*(x, \mathrm{a}(t)).$$

Допущение 1.

1) $f_{\mathrm{i}}^*(x, \mathrm{a}(t))$, $i = 1, ..., n$ — элементы вектора $f^*(x, \mathrm{a}(t))$ непрерывны относительно $x(t)$ и t;

2) $\dfrac{\partial f_i^*(x(t), t)}{\partial x_k(t)}, \dfrac{\partial f_i^*(x(t), t)}{\partial t}$ непрерывны по $x(t)$ и t для $i, k = 1, ..., n.$

Это допущение позволяет представить [3] исходное уравнение объекта в окрестности точки $x = 0$ в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha(t)\right]x(t) + \left[B + \beta(t)\right]Kx(t) + \Im(x(\mathrm{t})), \tag{5}$$

где $\Im(x(t)) \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ — остаточный член разложения, при чем $\Im(x) = 0$ при $x(0) = 0.$

Пусть начальное состояние объекта принадлежит области замыкания множества начальных состояний $x_0^* \in \partial X_0$, при которых условия выполнения поставленной задачи являются «наихудшими». Тогда при условии успешного выполнения задачи управления матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и вектор $\Im(x)$ будут иметь интервальный характер неопределенности.

Конкретизируем вид функционала качества. Пусть функционал качества имеет вид

$$J(x, u) = \frac{1}{2}\left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^{\mathrm{T}}\left\{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right\}dt\right], \tag{6}$$

где T — время окончания переходного процесса, задано.

Пусть Ω — множество возможных траекторий $\alpha(t_0, \mathrm{T})$ и $\beta(t_0, T)$, т.е. $\alpha(t),\ \beta(t) \in \Omega$ и α^*, β^* — «наихудшие» значения матриц, лежащих на границе замыкания множества возможных значений параметрических возмущений, т.е. $\alpha^*,\ \beta^* \in \partial\Omega$, при которых удается выполнить поставленную задачу управления объектом (5).

Синтез регулятора, т.е. поиск матрицы K будем осуществлять с использованием линейной модели объекта, которая имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_M(t) = [A + \alpha^*] x_M(t) + \left[B + \beta^*\right] u^*(t),\ x_M(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Если назначить матрицу F в первом слагаемом функционала (6) в виде $F = S$, где положительно определенная матрица S есть решение уравнения Риккати—Лурье

$$S\left[A + \alpha^*\right] + \left[A + \alpha^*\right]^T S - S\left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^T S + Q = 0, \tag{8}$$

то оптимальное управление для модели (7) с функционалом качества (6), в котором вместо $x(t)$ подставим $x_{\mathrm{M}}(t)$, будет имеет вид [3]

$$u^*(t) = -R^{-1}\left[B + \beta^*\right]^T S x_{\mathrm{M}}(t). \tag{9}$$

Отметим, что в этом случае матрица $S(t) = \mathrm{const},\ t \in \left[0, T\right]$.

Нетрудно убедиться, что синтезированное управление (9) обеспечивает отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_{\mathrm{M}}(t) = \left\{A + \alpha^* - \left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S\right\} x_{\mathrm{M}}(t),$$

что является необходимым и достаточным условиями ее асимптотической устойчивости [1].

Используем структуру управления (9) для построения управлением объектом (5):

$$u(t) = -R^{-1}\left[B + \beta^*\right] S x(t). \tag{10}$$

Таким образом, система «объект (5) — регулятор (10)» является стационарной в первом приближении.

Следует отметить, что использование управления (10), синтезированного на линейной модели (7), для нелинейного объекта (5) не изменяет качественной картины расположении траекторий системы «объект (5) — регулятор (10)» в начале координат [3].

Условия существования терминального робастного управления

Найдем необходимые условия, предъявляемые к нелинейной вектор функции $\Im(x(t))$, при выполнении которых управление вида (10) будет стабилизировать объект (5).

Отметим, что при сделанных предположениях о нелинейной вектор-функции $\Im(x(\tau))$ рассматриваемый объект с управлением вида (10) имеет устойчивое состояние покоя при $x = 0$.

Найдем условия асимптотического перехода системы из заданного начального состояния в состояние покоя.

Решение уравнения (5) с управлением (10) имеет вид

$$x(T) = \left[\exp(\mathcal{T}\, T)\right]\left\{x^*(0) + \int_0^T \left[\exp(-\mathcal{T}\,\tau)\right]\Im(x(\tau))\,d\tau\right\},$$

или

$$x(T) = \left[\exp(\mathcal{T}\, T)\right]\left\{x^*(0) + \int_0^T \left[\exp(-\mathcal{T}\,\tau)\right]\Im(x(\tau))\,d\tau\right\}, \qquad (11)$$

где $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right] R^{-1}\left[B_1 + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S = \mathrm{const}.$

Уравнение (11) перепишем в виде

$$\|x(T)\| = \left\|\left[\exp\left(\mathcal{T}\, T\right)\right]\left\{x^*(0) + \int_0^T \left[\exp\left(-\mathcal{T}\,\tau\right)\right]\Im\left(x(\tau)\right)d\tau\right\}\right\|.$$

Если управление (10) стабилизирует объект (5), то при $T \to \infty$ должно выполняться условие:

$$\left\|x^*(0) + \int_0^T \left\{\exp\left(-\mathcal{T}\tau\right)\right\}\Im(\sigma)\,d\tau\right\| \to 0 \text{ при } T \to \infty$$

или

$$\left\|x^*(0)\right\| - \left\|\int_0^T \left\{\exp(-\mathcal{T}\ \tau)\right\}\ \Im\left(x(\tau)\right)d\tau\right\| \to 0 \text{ при } T \to \infty. \qquad (12)$$

Так как первое слагаемое имеет конечное значение, то и второе слагаемое при управлении, стабилизирующим объект, должно иметь конечное значение при $T \to \infty$. Последнее выполняется в том случае, если подынтегральное выражение будет убывать. Потребуем, чтобы положительно определенное подынтегральное выражение убывало монотонно. Это условие будет выполняться, если производная по времени от положительно определенной формы

$$\left\|\left\{\exp(-\mathcal{T}\ )\right\}\Im(x(t))\right\| > 0 \quad x \neq 0 \qquad (13)$$

будет отрицательной, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left\|\left\{\exp(-\mathcal{T}\ )\right\}\Im\left(x(t)\right)\right\| < 0, \quad x \neq 0. \qquad (14)$$

Таким образом, условие монотонного убывания подынтегрального выражения (12) имеет вид

$$\left\|\mathcal{T}\left\{\exp\left[-\mathcal{T}\, t\right]\right\}\ \Im\left(x(t)\right)\right\| > \left\|\left\{\exp\ [-\mathcal{T}\, t]\right\}\left\{\frac{d\,\Im(x(t))}{d\,t}\right\}\right\|, \ x \neq 0. \qquad (15)$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-\mathcal{T}\, t\right]\right\} = -\mathcal{T}\left\{\exp\left[-\mathcal{T}\, t\right]\right\} = -\left\{\exp\left[-\mathcal{T}\, t\right]\right\}\mathcal{T},$$

из условия (15) можно получить условие на изменение во времени нелинейной функции $\Im(x(t))$:

$$\left\| \frac{d\,\Im\left(x(t)\right)}{d\,t} \right\| < \left\| \mathcal{T}\, \Im\left(x(t)\right) \right\|,\ t \ge 0 \tag{16}$$

или, учитывая, что $\left\| \mathcal{T}\, \Im\left(x(t)\right) \right\| \ge \left\| \mathcal{T} \right\| \left\| \Im\left(x(t)\right) \right\|$,

$$\frac{\left\| \dfrac{d\,\Im(x(t))}{d\,t} \right\|}{\left\| \Im(x(t)) \right\|} < \left\| \mathcal{T} \right\|,\ t \ge 0\,. \tag{17}$$

Так как при выполнении условия (16) обеспечивается монотонное убывание нормы подынтегрального выражения (12), то система «объект (5)—управление (10)» в этом случае асимптотически устойчива.

Отметим, что матрица $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right] R^{-1} \left[B_1 + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S$, содержащая постоянные параметры, зависит от ряда параметров, существенным из которых для выполнения условий задачи стабилизации системы «объект (5)—регулятор(10)» является положительно определенная матрица S, которая является решением уравнения (8). Можно сказать, что $S = S(Q, R)$. Назначая соответствующим образом матрицы Q и R, при заданном начальном состоянии объекта $x(0)$ и известной нелинейной функции $\Im(x, t)$ можно получить решение уравнения (8) таким, что будут выполняться условие

$$\left\| \frac{d\Im(x,t)}{dt} \right\| < \left\| A + \alpha^* - \left[B_1 + \beta^*\right] R^{-1} \left[B_1 + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S\left(Q, R\right) \Im(x,t) \right\|,\ t \ge 0\,. \tag{18}$$

Из неравенства (16), определяющего условия монотонной асимптотической сходимости подынтегрального выражения в уравнении (12), при заданной матрице $\mathcal{T}$ и известной нелинейности $\Im\left(x(t)\right)$ можно определить условия для начального состояния объекта, при которых стабилизирующее управление вида (10) будет существовать. Начальные условия объекта должны отвечать следующему неравенству:

$$\left\| \frac{d\,\Im(x(t))}{d\,t} \right\| < \left\| \mathcal{T}\, \Im(x(t)) \right\|,\ x = x(0),\ t = 0\,. \tag{19}$$

Несколько иное условие устойчивости можно получить, рассмотрев подынтегральное выражение (12) и умножив его слева на $\Im^T\left(x(t)\right)$, т.е.

$$\Im^T\left(x(t)\right) \left\{\exp(-\mathcal{T} t)\right\} \Im\left(x(t)\right) > 0,\ \ x(t) \ne 0\,. \tag{20}$$

Условие асимптотической устойчивости буде иметь место, если производная по времени выражения (20) будет иметь отрицательна при $x(t) \ne 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\Im^T\left(x(t)\right)\left\{\exp(-\mathcal{T} t)\right\}\Im\left(x(t)\right)\right] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im^T\left(x(t)\right)\right]\left\{\exp(-\mathcal{T} t)\right\}\Im\left(x(t)\right) +$$

$$+ \Im^T\left(x(t)\right)\left\{\exp(-\mathcal{T} t)\right\}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im\left(x(t)\right)\right] - \Im^T\left(x(t)\right)\mathcal{T}\left\{\exp(-\mathcal{T} t)\right\}\Im\left(x(t)\right) \le 0$$

или, учитывая коммутативные свойства, $\{\exp(-\mathcal{T}t)\}$, будем иметь

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im^T\left(x(t)\right)\right]\Im\left(x(t)\right)+\Im^T\left(x(t)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im\left(x(t)\right)\right]-\Im^T\left(x(t)\right)\mathcal{T}\,\Im\left(x(t)\right)\le 0. \qquad (21)$$

Таким образом, система (5) с начальными условиями, при которых выполняется условие

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im^T\left(x(0)\right)\right]\Im\left(x(0)\right)+\Im^T\left(x(0)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im\left(x(0)\right)\right]-\Im^T\left(x(0)\right)\mathcal{T}\,\Im\left(x(0)\right)\le 0, \qquad (22)$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим вопрос о существовании управления вида (10) при движении нелинейной нестационарной системы в заданном интервале времени из любого начального состояния, принадлежащего заданному множеству, в заданную область.

Очевидно, что область начальных условий X_0^*, при которых задача робастного управления будет выполнена, зависит от значений параметров матриц $A(t)=A+a(t), B(t)=B+\beta(t),$ периода управления, значений весовых матриц функционала Q, R (и таким образом от управления $u^*\left(t_0,T\right)$), от задания области конечных значений состояния объекта, т.е. область возможных начальных условий определяется выражением

$$X_0^*=\left\{\alpha(t),\beta(t)\in\Omega, u^*(t_0,T):x(t)=\right.$$
$$\left.=A(t)+\alpha(t)]x(t)+[B(t)+\beta(t)]u(t), \left\|x(T)\right\|\le d\right\}.$$

Решение дифференциального уравнения (7) запишется в виде

$$\left|x^*(T)\right|=\left|\left\{\left[\exp(\mathcal{T}(T-t_0))\right]\right\}x^*(t_0)-\int_{t_0}^{T}\left[\exp\left(\mathcal{T}(T-\tau)\right)\right]\Im\left(x^*(\tau)\right)d\tau\right|\le d$$

или

$$\left|\left[\exp\left(-\mathcal{T}t_0\right)\right]x^*(t_0)-\int_{t_0}^{T}\left[\exp\left(-\mathcal{T}\tau\right)\right]\Im\left(x^*(\tau)\right)d\tau\right|\le\left|\left[\exp\left(-\mathcal{T}T\right)\right]\left(\frac{1}{n}Id\right)\right|,$$

где I — единичная матрица $n\times n$ и $\left|\left[\exp\left(-\mathcal{T}T\right)\right]\frac{1}{n}Id\right|=d^*$.

Условие успешного d-робастного управления будет иметь вид

$$\left\|x^*(T)\right\|=\left\|\left[\exp\left(-\mathcal{T}t_0\right)\right]x^*(t_0)+\int_{t_0}^{T}\left[\exp\left(-\mathcal{T}\tau\right)\right]\Im\left(x(\tau)\right)d\tau\right\|\le d. \qquad (23)$$

Так как $\left\|x^*(T)\right\|\ge\left\|x(T)\right\|$, выполнение неравенства (23) гарантирует успешное выполнение задачи терминального управления неопределенным объектом (5) с функционалом качества (6).

Если условие (23) не выполняется, то это означает, что для объекта

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left\{A+\alpha(x,t)+\left[B+\beta(x,t)\right]K\right\}x(t)+\Im(x(t))$$

с начальным условием $x(0)\in X_0$ и заданным периодом управления $[0,T]$ в общем случае не существует управления вида $u(t)=Kx(t)=-R^{-1}\left[B+\beta^*\right]Sx(t)$ с постоянной положительно определенной матрицей S, определяемой решением Риккати—Лурье

$$S\left[A+\alpha^*\right]+\left[A+\alpha^*\right]^T S-S\left[B_1+\beta^*\right]R^{-1}\left[B_1+\beta^*\right]^T S+Q=0,$$

которое может обеспечить заданный показатель робастности d.

Три причины «неуспешного» d-робастного управления:

1) $z(t_0)\notin X_0^*\subset X_0\subset Z_0$, т.е. начальные условия не принадлежат области допустимых начальных условий, при которых успешно выполняется задача d-робастного управления;

2) матрицы Q, R в функционале качества таковы, что не существует управлений вида $u(t)=-R^{-1}(B^*)^T Sx(t)$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати—Лурье, при котором успешно выполняется задача d-робастного управления;

3) интервал управления $[t_0,T]$ таков, что при заданной области конечных значений и заданном управлении задача d-робастного управления выполнена быть не может.

Изменяя те или иные условия задачи, можно добиться выполнения неравенства (23) и тем самым обеспечить успешное выполнения задачи d-робастного управления.

Выводы

Условие d-робастности для объекта

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left\{A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]\mathrm{R}^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S\right\}x(t)+\Im\left(x(t)\right)$$

имеет вид

$$\left\|x^*(T)\right\|=\left\|\left[\exp\left(-\mathcal{T}t_0\right)\right]x^*(t_0)+\int_{t_0}^{T}\left[\exp\left(-\mathcal{T}\tau\right)\right]\Im\left(x(\tau)\right)d\tau\right\|\le d\,.$$

Откуда

$$\left\|\left[\exp\left(-\mathcal{T}t_0\right)\right]x^*(t_0)\right\|-d\le\int_{t_0}^{T}\left\|\left[\exp\left(-\mathcal{T}\tau\right)\right]\Im\left(x(\tau)\right)d\tau\right\|.$$

Выполнение условия

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im^T\left(x(0)\right)\right]\Im\left(x(0)\right)+\Im^T\left(x(0)\right)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Im\left(x(0)\right)\right]-\Im^T\left(x(0)\right)\mathcal{T}\,\Im\left(x(0)\right)\le 0$$

обеспечивает переходному процессу асимптотическое свойство, предъявляя соответствующие требования к поведению нелинейной вектор-функции, входящей в систему. Таким образом, выполнение этого условия является необходимым условием существования d-робастного управления.

Условие (23) является дополнительным условием, обеспечивая достаточные условия существования d-робастного управления.

Выполнение условия (12) или (16) обеспечивает переходному процессу асимптотическое свойство, предъявляя соответствующие требования к поведению нелинейной вектор-функции, входящей в систему. Таким образом, выполнение этого условия является необходимым условием существования d-робастного управления.

Выполнение обоих условий гарантирует выполнение задачи d-робастного управления нестационарным объектом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

[2] *Лурье Л.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951.

[3] *Афанасьев В.Н.* Динамические системы с неполной информацией: Алгоритмическое конструирование. — М.: КомКнига, 2007.

ROBUST CONTROL OF UNCERTANT NONLINEAR SYSTEM

S.F. Shershnev

Cybernetics Department
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics
(Technical University)
B. Trehsvjatitelsky lane, 1-3/12, bld 8, Moscow, Russia, 109028

In the article robust control of uncertain nonlinear system in conditions of the incomplete information on its parameters is considered. The necessary conditions of existence of terminal robust control and an asymptotic stability of system of the first approximation are proposed.