РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

В.Н. Афанасьев, Е.В. Окунькова

Кафедра кибернетики и мехатроники
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В настоящее время основу теории робастного управления составляют методы анализа робастной устойчивости и робастной стабилизации линейных объектов. Исследуется не одна заданная линейная система, а устойчивость целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии неопределенности. Задачи управления, как правило, сводятся к задачам стабилизации или оптимального управления при незаданном времени окончания переходного процесса. Это позволяет использовать частотные методы, разработанные в теории автоматического регулирования [1]. Использование этих методов для синтеза управляющих воздействий для нестационарных нелинейных систем невозможно. В работе синтезируется оптимальное управление для робастной нелинейной системы по первому приближению. Находятся условия существования стабилизирующего управления.

Ключевые слова: робастное управление, робастная стабилизация.

Модель объекта управления. Пусть нестационарный управляемый динамический объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha(t)\right]x(t) + \left[B + \beta(t)\right]u(t) + \Im(x(\mathrm{t})),\ \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$\Im\left(x(t)\right) \in R^n,\ \Im(x) = 0 \ \text{ при } x(0) = 0.$$

Пусть начальное состояние объекта принадлежит области замыкания множества начальных состояний $x_0^* \in \partial X_0$, при которых условия выполнения поставленной задачи являются «наихудшими». Тогда, при условии успешного выполнения задачи управления, матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и вектор $\Im(x)$ будут иметь интервальный характер неопределенности.

Конкретизируем вид функционала качества. Пусть функционал качества имеет вид

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^T \left\{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right\}dt\right], \tag{2}$$

где T — время окончания переходного процесса, задано.

Пусть Ω — множество возможных траекторий $\alpha(t_0, T)$ и $\beta(t_0, T)$, т.е. $\alpha(t)$, $\beta(t) \in \Omega$. Пусть

$$\underline{\alpha} \le \alpha(t) \le \overline{\alpha},\ \ \underline{\beta} \le \beta(t) \le \overline{\beta},\ \ \underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\beta}, \overline{\beta} \in \Omega. \tag{3}$$

Матричное неравенство Риккати имеет вид

$$S\left[\mathrm{A} + \alpha(t)\right] + \left[\mathrm{A} + \alpha(t)\right]^T S < S\left[B + \beta(t)\right]R^{-1}\left[B + \beta(t)\right]^T S, \tag{4}$$

где S — положительно определенная матрица.

Очевидно, что «наихудшими» значениями параметров с позиции выполнения неравенства (4) будут $\overline{\alpha}, \underline{\beta}$.

Таким образом, модель объекта (1) имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\overline{\alpha}\ \right]z(t)+\left[B+\underline{\beta}\ \right]u(t)+\Im\left(z(\mathrm{t})\right),\ z(t_0)=x_0. \tag{5}$$

Отметим, что условия выбора «наихудших параметров» позволяют заметить, что

$$\left\|\left[A+\overline{\alpha}\ \right]z(t)+\left[B+\underline{\beta}\right]u(t)+\Im\left(z(\mathrm{t})\right)\right\|\geq$$
$$\geq\left\|\left[A+\alpha(t)\right]x(t)+\left[B+\beta(t)\right]u(t)+\Im\left(x(\mathrm{t})\right)\right\|.$$

Будем называть модель (5) робастной моделью объекта (1).

Синтез регулятора будем осуществлять с использованием линейной робастной модели объекта, которая имеет вид

$$\frac{d}{dt}z_M(t)=[A+\overline{\alpha}]z_M(t)+\left[B+\underline{\beta}\right]u^*(t),\ z_M(t_0)=x_0. \tag{6}$$

Если назначить матрицу F в первом слагаемом функционала (2) в виде $F = S$, где положительно определенная матрица S есть решение уравнения Риккати—Лурье

$$S\left[\mathrm{A}+\overline{\alpha}\right]+\left[\mathrm{A}+\overline{\alpha}\right]^T S-S\left[B+\underline{\beta}\right]R^{-1}\left[B+\underline{\beta}\right]^T S+Q=0, \tag{7}$$

то оптимальное управление для линейной робастной модели (6) с функционалом качества (2), в котором вместо $x(t)$ подставим $z_M(t)$, будет иметь вид [3]

$$u^*(t)=-R^{-1}\left[B+\underline{\beta}\right]^T Sz_M(t). \tag{8}$$

Отметим, что в этом случае матрица $S(t)=\mathrm{const},\ t\in\left[0,T\right]$.

Нетрудно убедиться, что синтезированное управление (8) обеспечивает отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения

$$\frac{d}{dt}z_M(t)=\left\{A+\overline{\alpha}-\left[B+\underline{\beta}\ \right]R^{-1}\left[B+\underline{\beta}\ \right]^{\mathrm{T}}S\right\}z_M(t),$$

что является необходимым и достаточным условиями ее асимптотической устойчивости [1].

Используем структуру управления (8) для построения управлением объектом (6):

$$u(t)=-R^{-1}\left[B+\underline{\beta}\right]Sz(t). \tag{9}$$

Следует отметить, что использование управления (8), синтезированного на линейной модели (6), для нелинейного объекта (1) не изменяет качественной картины расположении траекторий системы «объект (5) — регулятор (9)» в начале координат [3].

Условия существования терминального робастного управления. Найдем условия, при выполнении которых управление вида (9) будет стабилизировать робастный объект (5) с управлением (9).

Отметим, что при сделанных предположениях о нелинейной вектор-функции $\Im\left(x(\tau)\right)$, рассматриваемый объект с управлением вида (9) имеет устойчивое состояние покоя при $x = 0$.

Найдем условия асимптотического перехода системы из заданного начального состояния в состояние покоя.

Решение уравнения (5) с управлением (9) имеет вид

$$z(T) = \left[\exp(\mathcal{T}T)\right]x^{*}(0) + \int_{0}^{T}\left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right]\Im\left(z(\tau)\right)d\tau, \tag{10}$$

где $\mathcal{T} = A + \overline{\alpha} - \left[B + \underline{\beta}\right]R^{-1}\left[B + \underline{\beta}\right]^{\mathrm{T}} S = \text{const}.$

Уравнение (10) перепишем в виде

$$\left\|z(T)\right\| = \left\|\left[\exp(\mathcal{T}T)\right]\left\{x^{*}(0) + \int_{0}^{T}\left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right]\Im\left(z(\tau)\right)d\tau\right\}\right\|.$$

Если управление (9) стабилизирует объект (5), то при $T \to \infty$ должно выполняться условие:

$$\left\|x^{*}(0)\right\| - \left\|\int_{0}^{T}\left\{\exp(-\mathcal{T}\tau)\right\}\Im\left(z(\tau)\right)d\tau\right\| \to 0 \ \text{ при } T \to \infty. \tag{11}$$

Так как первое слагаемое имеет конечное значение, то и второе слагаемое при управлении, стабилизирующим объект, должно иметь конечное значение при $T \to \infty.$ Последнее выполняется в том случае, если подынтегральное выражение будет убывать. Потребуем, чтобы положительно определенное подынтегральное выражение убывало монотонно. Это условие будет выполняться, если производная по времени от положительно определенной формы

$$\left\|\left\{\exp(-\mathcal{T})\right\}\Im\left(z(t)\right)\right\| > 0 \ \ x \neq 0. \tag{12}$$

будет отрицательной, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left\|\left\{\exp(-\mathcal{T})\right\}\Im\left(z(t)\right)\right\| < 0, \ \ x \neq 0. \tag{13}$$

Таким образом, условие монотонного убывания подынтегрального выражения (11) имеет вид

$$\left\|\mathcal{T}\left\{\exp[-\mathcal{T}t]\right\}\Im\left(z(t)\right)\right\| > \left\|\left\{\exp[-\mathcal{T}t]\right\}\left\{\frac{d\Im\left(z(t)\right)}{dt}\right\}\right\|, \ \ x \neq 0. \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-\mathcal{T}t\right]\right\} = -\mathcal{T}\left\{\exp\left[-\mathcal{T}t\right]\right\} = -\left\{\exp\left[-\mathcal{T}t\right]\right\}\mathcal{T},$$

из условия (15) можно получить условие на изменение во времени нелинейной функции $\Im(x(t))$:

$$\left\| \frac{d\Im(z(t))}{dt} \right\| < \left\| \mathcal{T}\Im(z(t)) \right\|, \ t \geq 0 \qquad (15)$$

или, учитывая, что $\left\| \mathcal{T}\Im(z(t)) \right\| \geq \left\| \mathcal{T} \right\| \left\| \Im(z(t)) \right\|$,

$$\frac{\left\| \dfrac{d\Im(z(t))}{dt} \right\|}{\left\| \Im(z(t)) \right\|} < \left\| \mathcal{T} \right\|, \ t \geq 0. \qquad (16)$$

Так как при выполнении условия (15) обеспечивается монотонное убывание нормы подынтегрального выражения (11), система «объект (5) — управление (9)» в этом случае асимптотически устойчива.

Отметим, что матрица $\mathcal{T} = A + \overline{\alpha} - \left[B + \underline{\beta} \right] R^{-1} \left[B + \underline{\beta} \right]^T S$, содержащая постоянные параметры, зависит от ряда параметров, существенным из которых для выполнения условий задачи стабилизации системы «робастная модель объекта (5) — регулятор (9)» является положительно определенная матрица S, которая является решением уравнения (7). Можно сказать, что $S = S(Q, R)$. Назначая соответствующим образом матрицы Q и R, при заданном начальном состоянии объекта $x(0)$ и известной нелинейной функции $\Im(x,t)$ можно получить решение уравнения (8) таким, что будут выполняться условие

$$\left\| \frac{d\Im(z(t))}{dt} \right\| < \left\| A + \overline{\alpha} - \left[B + \underline{\beta} \right] R^{-1} \left[B + \underline{\beta} \right]^T S(Q,R)\Im(z(t))z(t) \right\|, \ t \geq 0. \qquad (17)$$

Из неравенства (16), определяющего условия монотонной асимптотической сходимости подынтегрального выражения в уравнении (11), при заданной матрице $\mathcal{T}$ и известной нелинейности $\Im(x(t))$ можно определить условия для начального состояния объекта, при которых стабилизирующее управление вида (9) будет существовать. Начальные условия объекта должны отвечать следующему неравенству:

$$\left\| \frac{d\Im(z(t))}{dt} \right\| < \left\| \mathcal{T}\Im(z(t)) \right\|, \ z = x(0), \ t = 0. \qquad (18)$$

Утверждение

Неравенство

$$\left\| \mathcal{T}\left\{ \exp[-\mathcal{T}t] \right\} \Im(z,t) \right\| \geq \left\| \left\{ \exp[-\mathcal{T}t] \right\} \left\{ \frac{d\Im(z,t)}{dt} \right\} \right\|$$

выполняется в любой момент переходного процесса системы

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{T}z(t) + \Im(z,t),$$

если оно выполнялось для начальных условий $z(t_0) \in X_0$.

Полученный выше результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема

Пусть мажоранта $z(t)$ нелинейного нестационарного объекта

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A + \alpha(x,t)\right]x(t) + \left[B + \beta(x,t)\right]u(t) + \Im(x,t),\ x(t_0) = x_0,$$

где $\alpha(x,\mathrm{t}),\ \beta(x,t) \in \Omega,\ \Omega$ — замкнутое ограниченное множество возможных траекторий изменений параметров объекта, описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}z(t) = \left[A + \overline{\alpha}\right]z(t) + \left[B + \underline{\beta}\right]\mathrm{u}(t) + \Im(z,t),\ z(t_0) = x_0,$$

где $\overline{\alpha}, \underline{\beta} \in \partial\Omega$ таковы, что

$$\left\|\left[A + \overline{\alpha}\right]z(t) + \left[B + \underline{\beta}\right]u(t) + \Im(z(t))\right\| \geq$$
$$\geq \left\|\left[A + \alpha(t)\right]x(t) + \left[B + \beta(t)\right]u(t) + \Im\left(x(t)\right)\right\|.$$

Тогда управление объектом

$$u(t) = -R^{-1}\left[B + \underline{\beta}\right]Sx(t),$$

где

$$S\left[\mathrm{A} + \overline{\alpha}\right] + \left[A + \overline{\alpha}\right]^T S - S\left[B + \underline{\beta}\right]R^{-1}\left[B + \underline{\beta}\right]^T S + Q = 0,$$

является стабилизирующим, т.е. $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если начальные условия, образующие область начальных условий системы «объект—регулятор», отвечают условию

$$\left\|\frac{d\Im(x,t)}{dt}\right\| < \left\|\mathcal{T}\Im(x,t)\right\|,\ x(t) \neq 0,\ t = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

[2] *Лурье Л.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951.

[3] *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. — М.: Наука, 2008.

ROBUST CONTROL OF NONLINEAR SYSTEM

V.N. Afanasiev, E.V. Okunkova

Cybernetics and Mechatronics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6 Moscow, Russia, 117198

Now a theory basis robust managements make analysis methods robust stability and robust stabilization of linear objects. One set linear system, and stability of the whole family of the systems corresponding to initial (nominal) system in the presence of uncertainty is thus investigated not. Management problems, as a rule, are reduced to stabilization or optimum control problems at not set time of the termination of transient. It allows to use the frequency methods developed in the theory of automatic control [1]. Use of these methods for synthesis of operating influences for non-stationary nonlinear systems is impossible. In work optimum control for robust nonlinear system on the first approach is synthesized. There are living conditions of stabilizing management.

Key words: robust control, robust stabilization.