ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И УПРАВЛЕНИЕ

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО СИНТЕЗА МЕТОДОМ СЕТЕВОГО ОПЕРАТОРА (1)

А.И. Дивеев

Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, 119333

К.А. Пупков, Е.А. Софронова

Российский университет дружбы народов
Ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается задача синтеза системы автоматического управления. Приведена формальная постановка задачи синтеза системы управления, в которой начальные условия принадлежат заданному ограниченному множеству, а функционал включает кратный интеграл по области начальных значений. Для решения задачи синтеза используется численный метод на основе сетевого оператора. Приведены примеры использования метода сетевого оператора для практических задач синтеза оптимального управления космическими аппаратами.

Ключевые слова: сетевой оператор, синтез систем управления, управление космическими аппаратами.

Задача управления космическими аппаратами заключается в построении системы управления, реализующей оптимальные режимы функционирования с учетом неопределенности внешних воздействий и параметров модели системы. При реализации системы управления формально решается вариационная задача оптимального управления, которая включает описание цели управления в виде функционала качества и терминальных условий, а также математическую модель объекта управления. Для решения задачи оптимального управления реальными космическими аппаратами используются численные методы [1], которые позволяют найти управления системой в виде функциональной зависимости управляющего воздействия от времени. Такое управление является программным и не может обеспечить высокого качества управления из-за неточности математической модели объекта управления. При реализации практических систем управления программные расчетные траектории используется чаще всего для исследования свойств задачи и выявлении особенностей, на основании которых конструкторы космических аппаратов строят системы управления, отвечающие требованиям реальных условий.

Реальные системы управления работают по принципу обратной связи и используют информацию о состоянии объекта и внешней среды, т.е. вырабатывают управление в виде функциональной зависимости от координат пространства состояний. Такое управление более практично и позволяет учитывать неопределенности математической модели объекта управления и внешней среды. Программные системы управления иногда встречаются в реальных космических аппаратах, однако это, скорее всего, вызвано отсутствием возможности получения другого вида управления. Из сказанного следует, что в практических системах используются системы управления, математическая модель которых описывается в виде функциональной зависимости управления от координат пространства состояний. На этапе проектирования систем управления, т.е. на этапе синтеза, формально решаются задачи оптимального управления, которые позволяет получить непрактичное управление в виде функции времени. Такое противоречие вызвано тем, что численных методов решения задачи синтеза управления практически не существует.

Принято считать, что задача синтеза оптимального управления формулируется аналогично вариационной задачи оптимального управления. Решение задачи оптимального управления в виде функции координат пространства состояний при определенных условиях гладкости заданных математических выражений приводит к уравнению Беллмана [2], которое представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных. Проблема синтеза управления заключается в проблеме решения уравнения Беллмана, которое для нелинейного случая не имеет аналитического решения. Наиболее известный результат решения уравнения Беллмана — это метод аналитического конструирования регуляторов [3], который для линейного объекта и квадратичного функционала позволяет найти управление в виде линейной зависимости от координат пространства состояний. Из других методов синтеза наиболее часто применяются на практике двухэтапный синтез и типовой синтез. При двухэтапном синтезе первоначально решают задачу оптимального управления, т.е. находят управление в виде функции времени, затем строят систему стабилизации объекта относительно оптимальной программной траектории.

При типовом синтезе систему управления ищут в классе определенных типов систем. Задают класс функций, зависящих от координат пространства состояний, затем ищут оптимальные значения параметров, входящих в эти функции. Другие известные методы синтеза [4] определены классом объектов и особенностью функционалов.

В настоящей работе предложен численный метод синтеза системы управления. Метод основан на построении множества функциональных зависимостей управления от координат пространства состояний и поиске решения в этом множестве. При построении множества функциональных зависимостей используется новая структура данных сетевой оператор [5—8], который позволяет описывать математическое выражение в виде ориентированного графа. При поиске решения в построенном множестве используется генетический алгоритм.

Следует отметить, что многократные исследования синтезированных с помощью разработанного численного метода систем управления показали следующее:

— синтезированные системы управления могут иметь различные структуры, но давать одинаковые значения функционала качества, близкие к оптимальному значению;

— никакого дополнительного преимущества перед оптимальным управлением, полученным в виде функции времени, синтезированные системы управления не имеют, если для синтеза управления использовать те же критерии, что и в задачи оптимального управления.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что задача вариационного оптимального управления, которая использовалась для синтеза управления, слишком проста, чтобы учитывать все свойства синтезированного управления. Чтобы синтезировать систему управления, удовлетворяющую свойству сохранять значения функционалов качества при вариациях математической модели объекта и возмущениях, необходимо это учитывать в формулировке задачи. Задача синтеза оптимального управления должна иметь другие функционалы, отличающиеся от функционалов задачи оптимального управления.

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной системы управления.

Задан объект управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u} \in \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^m$; $\mathbf{U}$ — замкнутое ограниченное множество.

Для системы задана область существования начальных значений

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 \in \mathrm{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^0 = \left[x_1^0 \dots x_n^0\right]^T$, $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{X}_0$.

Заданы терминальные условия

$$\mathbf{x}^f = \left[x_1^f \dots x_n^f\right]^T. \tag{3}$$

Необходимо найти управление в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{4}$$

чтобы оно удовлетворяло ограничениям

$$\mathbf{u} \in \mathrm{U}, \tag{5}$$

обеспечивало минимум функционалу

$$J = \int_{\mathrm{X}_0} \ldots \int \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}\right) dt dx_1^0 \ldots dx_n^0 \to \min \tag{6}$$

и выполнение терминальных условий

$$F\left(\mathbf{x}\left(t_f\right), \mathbf{x}^f\right) = 0,\ t_f \le t^+, \tag{7}$$

где t^+ — заданное время.

Особенностью рассматриваемой задачи синтеза являются принадлежность начальных условий замкнутому ограниченному множеству (2) и наличие кратного интеграла по этому множеству в функционале качества (6).

Если синтезировать оптимальное управление в виде (4) на достаточно широком множестве функций, используя негладкие и разрывные функции $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, то можно получить совершенно неожиданный результат. Можно построить систему управления, которая обеспечит оптимальные значения функционала качества для любых начальных значений, принадлежащих заданной области. Данный результат вытекает из теоремы 1.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ решение задачи синтеза (1)—(7), а $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ — решение задачи синтеза для одного какого-то начального значения $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^0 \in \mathrm{X}_0$. Тогда

$$\int_0^{t_f} f_0\left(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{g}}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt \le \int_0^{t_f} f_0\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{g}}\left(\hat{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt,$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\right)$ при начальных значениях $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^0$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\right)$ при тех же начальных значениях $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^0$.

Доказательство. Пусть условие теоремы не выполняется

$$\int_0^{t_f} f_0\left(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{g}}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt > \int_0^{t_f} f_0\left(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{g}}\left(\hat{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt.$$

Тогда построим новое решение основной задачи синтеза

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \left(1 - \varsigma\left(\left\|\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}^0\right\|\right)\right)\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) + \varsigma\left(\left\|\mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}^0\right\|\right)\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}),$$

где $\varsigma(a)$ — индикаторная функция; $\varsigma\left(a\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \ne 0 \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}$.

В результате получаем, что $\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$, если в момент $t = 0$ $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^0$. Пусть $\overline{\mathbf{x}}(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{x}))$ с начальными условиями $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}^0$. Для нового решения $\overline{\mathbf{g}}(\overline{\mathbf{x}}(t))$ выполняются условия

$$\int\limits_{\mathbf{X}_0}\!\!\dots\!\int\int\limits_0^{t_f} f_0\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \overline{\mathbf{g}}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt dx_1^0 \dots dx_n^0 < \int\limits_{\mathbf{X}_0}\!\!\dots\!\int\int\limits_0^{t_f} f_0\left(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{g}}\left(\tilde{\mathbf{x}}(t)\right)\right) dt dx_1^0 \dots dx_n^0,$$

поэтому $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ не является решением основной задачи. ■

Вычисление кратного интеграла при оценке возможного решения по значению функционала (6) существенно усложняет поиск решения. Однако полученная в результате решения синтезированная система управления будет обеспечивать достижение оптимального значения функционала для множества начальных условий. Одна система управления включает в себя возможность построения оптимального решения для всех задач оптимального управления, на множестве начальных значений.

При решении задачи синтеза численным методом следует учесть тот факт, что задача становится многокритериальной. Терминальные условия (7) не всегда могут быть выполнены, поэтому их следует включить в дополнительный функционал и искать множество Парето эффективных решений. Основной трудностью построения численного метода для решения задачи синтеза (1)—(7) управления является построение множества математических выражений вида $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, в частности их формального представления в вычислительной машине. Множество должно включать разрывные функции и быть достаточно большим, чтобы обеспечить близость найденного решения к оптимальному решению задачи (1)—(7). Для решения задачи синтеза используем метод сетевого оператора [5—8].

Рассмотрим примеры синтеза систем оптимального управления с помощью разработанного метода сетевого оператора.

Рассмотрим задачу синтеза системы стабилизации угловым движением спутника. Математическая модель управления угловым движением спутника имеет следующее описание [1]:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{3} x_2 x_3 + 100 u_1,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 + 25 u_2,$$
$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 + 100 u_3,$$

где x_1, x_2, x_3 — угловые скорости вращения спутника относительно связанных с ним координат; u_1, u_2, u_3 — управляющие воздействия.

Для системы заданы диапазоны для начальных условий $x_1(0) = 200 \pm 20$, $x_2(0) = 30 \pm 3$, $x_3(0) = 40 \pm 4$.

Процесс стабилизации должен сопровождаться минимальным расходом топлива и отсутствием вращения спутника относительно начала координат

$$J_1 = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{3} |u_i(t)| dt + \alpha \sum_{i=1}^{3} \theta\left(x_i\left(t_f\right) - x_i^f\right) \to \min,$$

$$J_2 = \sqrt{x_1^2\left(t_f\right) + x_2^2\left(t_f\right) + x_3^2\left(t_f\right)} \to \min,$$

где t_f — заданное время управления; x_i^f, $i = \overline{1,3}$ — заданные допустимые терминальные угловые скорости; α — коэффициент штрафа, $\theta(y)$ — функция Хэвисайда

$$\theta(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \ge 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В результате использования метода сетевого оператора было получено следующее управление в виде зависимости от координат пространства состояний объекта:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } y_i > u_i^+, \\ u_i^-, & \text{если } y_i < u_i^-, \quad i = 1, 2, 3, \\ y_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $y_1 = -2\operatorname{sign}\left(q_1 x_1\right)\sqrt{|q_1 x_1|}$; $y_2 = 0$; $y_3 = -q_3 x_3 + \theta\left(x_3\right)$; $q_1 = 3{,}046875$; $q_3 = 2{,}09375$.

Рассмотрим задачу управления спуском космического аппарата. Математическая модель объекта управления описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g_0 R_z^2 x_1}{\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{3/2}} - \frac{(1+u)S\rho_0}{m} x_2 \sqrt{x_2^2 + x_4^2}\, e^{-\lambda\left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z\right)},$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{g_0 R_z^2 x_3}{\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{3/2}} - \frac{(1+u)S\rho_0}{m} x_4 \sqrt{x_2^2 + x_4^2}\, e^{-\lambda\left(\sqrt{x_1^2 + x_3^2} - R_z\right)},$$

где x_1, x_3 — координаты центра масс космического аппарата в геоцентрической ортогональной системе координат, x_2, x_4 — компоненты скорости космического аппарата, u — управление, m — масса космического аппарата, g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли, R_z — радиус Земли, S — площадь поверхности сопротивления, ρ_0 — плотность атмосферы на поверхности Земли, λ — коэффициент разреженности.

Управление может меняться в пределах ограничений $u^- \le u \le u^+$. В модели учитывается, что управлением является площадь поверхности аэродинамического сопротивления космического аппарата. При изменении управления в пределах ограничений площадь поверхности аэродинамического сопротивления меняется в диапазоне от $(1+u^-)S$ до $(1+u^+)S$.

Для системы заданы начальные условия $x_1(0) = 0$, $x_2(0)=V_0\cos\beta_0$, $x_3(0) = R_z + + h_0$, $x_4(0)=V_0\sin\beta_0$, где V_0 — модуль начальной скорости; h_0 — начальная высота; β_0 — начальный угол наклона скорости космического аппарата к плоскости горизонта, причем для угла определен только диапазон его вариаций $\beta_0^- \le \beta_0 \le \beta_0^+$.

С помощью ограниченного управления необходимо обеспечить для любых начальных значений, изменяемых в заданном диапазоне, минимизацию следующего функционала:

$$J_1 = \Delta\beta_0 \sum_{i=0}^{K} \left(\max_{t\in[0,t_f]} \frac{\left(x_1^2(t)+x_3^2(t)\right)\sqrt{\dot{x}_2^2(t)+\dot{x}_4^2(t)}}{R_z^2 g_0} \right)_{\beta_0=\beta_0^- + i\Delta\beta_0},$$

где $\Delta\beta_0$ — шаг численного интегрирования по β_0; K — количество интервалов интегрирования.

Управление должно зависеть от координат пространства состояний $u = g(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и обеспечивать выполнение терминальных условий

$$R_z \operatorname{arctg}\frac{x_4(t_f)}{x_2(t_f)} - L_f = 0,$$

где $t_f = t$, если $\left|\sqrt{x_1^2(t)+x_3^2(t)} - \left(R_z + h_f\right)\right| = 0$; L_f — заданная величина горизонтальной дальности; h_f — заданная конечная высота.

Для синтеза использовался метод сетевого оператора. В результате синтеза было получено следующее управление:

$$u = \begin{cases} u^+, & \text{если } y > u^+, \\ y, & \text{если } u^- \le y \le u^+, \\ u^-, & \text{если } y < u^-, \end{cases}$$

где $y = q_4\left(q_3^3 q_2 q_1 v_1 v_2\right)^3 + \dfrac{1-\exp\left(-q_4\left(q_3^3 q_2 q_1 v_1 v_2\right)^3\right)}{1+\exp\left(-q_4\left(q_3^3 q_2 q_1 v_1 v_2\right)^3\right)} + \theta\left(-q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3\right) - v_2;$

$$\theta(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad v_1 = \frac{1}{h_0}\sqrt{x_1^2+x_3^2} - R_z - \left(\frac{h_f}{h_0} - 1\right)\frac{R_z}{L_f}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_3} - 1;$$

$$v_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(x_1x_2 + x_3x_4\right)\sqrt{x_1^2+x_3^2}}{R_z\left(x_2x_3 - x_1x_4\right)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x_1^2+x_3^2} - R_z - h_f}{L_f - R_z \operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_3}}\right);$$

$q_1 = 2{,}3125$; $q_2 = 3{,}984375$; $q_3 = 0{,}03125$; $q_4 = 0{,}546875$.

ПРИМЕЧАНИЕ

(1) Работа выполнена по теме гранта РФФИ № 08-08-00248-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Федоренко Р.П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.

[2] *Андреева Е.А., Цирулева В.М.* Вариационное исчисление и методы оптимизации. — М.: Высшая школа, 2006.

[3] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Наука, 1969.

[4] *Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления нелинейного объекта по выходу // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 2. — С. 3—33.

[5] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод сетевого оператора в задачах управления // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования (информационные технологии и управление)». — 2007. — № 4. — С. 107—119.

[6] *Дивеев А.И., Софронова Е.А.* Метод построения функциональных зависимостей для решения задачи синтеза оптимального управления // Труды института Системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем / Под ред. С. Попкова. — М.: ИСА РАН, КомКнига, 2007. — Вып. 31(2). — С. 14—27.

[7] *Дивеев А.И., Северцев Н.А., Софронова Е.А.* Синтез системы управления метеорологической ракетой методом генетического программирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2008. — № 5. — С. 104—108.

[8] *Diveyev A.I., Sofronova E.A.* Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system // Proceedings of 17-th IFAC World Congress. — Seoul, 05.07.2008—12.07.2008. — P. 6106—6113.

CONTROL QUALITY IMPROVEMENT OF AIRCRAFT BY MULTICRITERIA SYNTHESIS OF CONTROL SYSTEM USING METHOD OF NETWORK OPERATOR

A.I. Diveev

Dorodnicyn Computer Center of Russian Academy of Sciences
Vavilov str., 40, Moscow, Russia, 119333

K.A. Pupkov, E.A. Sofronova

Cybernetic and mechatronics departament
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

The problem of synthesis of automatic control system is considered. Initial conditions lie in given bounded set and functional includes multiple integral on initial conditions domain. To solve the problem a numerical method based on network operator was developed. Application of the method for optimal control synthesis is shown.

Key words: network operator, synthesis of control system, aircraft control.