РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 65, № 4, 2019

Труды Математического института им. С. М. Никольского РУДН

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Главный редактор
Р. В. Гамкрелидзе,
д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)
E-mail: gam@mi.ras.ru

Зам. главного редактора
А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)
E-mail: skub@lector.ru

Ответственный секретарь
Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)
E-mail: journal.cmfd@gmail.com

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA) (Триест, Италия), Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

Н. Д. Копачевский, д.ф.-м.н., профессор, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского (Симферополь, Россия)

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Москва, Россия)

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия); Всероссийский институт научной и технической информации РАН (Москва, Россия)

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (Москва, Россия)

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет (Флоренция, Италия)

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 27.12.2019. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 18,6. Тираж 135 экз. Заказ 2433.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

© Российский университет дружбы народов, 2019

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 65, No. 4, 2019

Proceedings of the S. M. Nikolskii Mathematical Institute of RUDN University

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4

http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

EDITOR-IN-CHIEF
Revaz Gamkrelidze,
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
(Moscow, Russia)
E-mail: gam@mi.ras.ru

DEPUTY EDITOR
Alexander Skubachevskii,
RUDN University
(Moscow, Russia)
E-mail: skub@lector.ru

EXECUTIVE SECRETARY
Evgeniy Varfolomeev,
RUDN University
(Moscow, Russia)
E-mail: journal.cmfd@gmail.com

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA) (Trieste, Italy), Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Nikolai Kopachevskii, Vernadskiy Tavricheskiy National University (Simferopol', Russia)

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia); Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia)

Andrei Sarychev, University of Florence (Florence, Italy)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Print run 135 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

© Peoples' Friendship University of Russia, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2019, Vol. 65, No. 4

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 547–556

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-547-556 УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСПОКОЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2019 г. **А. Ш. АДХАМОВА, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. Рассматривается система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений нейтрального типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Показана связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения краевой задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория управляемых систем с последействием изучалась многими авторами [2, 3, 5, 8–10].

Широко известно, что обратная связь в системе управления может привести к задержке сигнала, см. рис. 2.

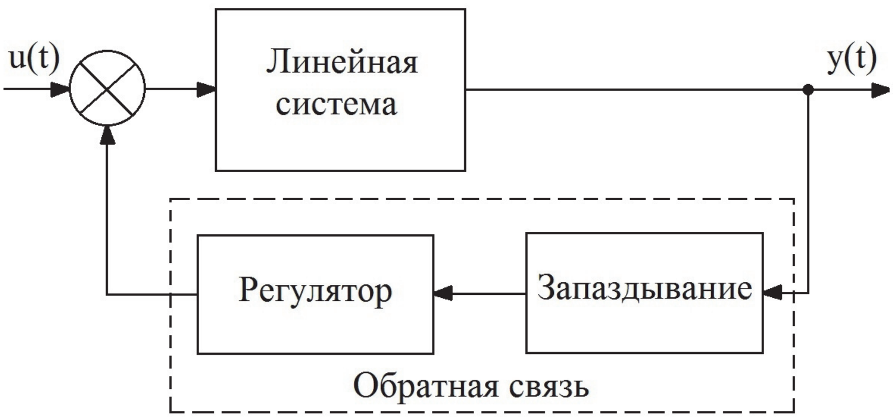

Рис. 1

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» (теорема 2.1) и гранта РФФИ № 17-01-00401 (теорема 3.1).

©Российский университет дружбы народов, 2019

Обычно предполагалось, что функционально-дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют запаздывающий или нейтральный тип, при этом в случае нейтрального типа старшие члены с запаздыванием имели достаточно малые коэффициенты. Задача об успокоении системы управления с последействием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, рассматривалась Н. Н. Красовским [2]. Предполагалось, что имеется одно постоянное запаздывание, а коэффициенты системы — также постоянные. В работах [1, 6, 11] эта задача обобщалась на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [4, 7].

В данной работе рассматривается задача об успокоении многомерной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Установлена связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения этой задачи.

1. Постановка задачи

В данной работе мы рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)=u(t), \quad 0<t<T, \tag{1.1}$$

где $y(t) = (y_1(t),\dots,y_n(t))^T$ — вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t),\dots,u_n(t))^T$ — вектор-функция управления,

$$A_m(t)=\{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\dots,n}, \quad B_m(t)=\{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\dots,n}$$

— матрицы порядка $n\times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau=\mathrm{const}>0$ — запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t)=\varphi(t), \quad t\in[-M\tau,0], \tag{1.2}$$

где $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))^T$ — заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1.1), (1.2) в положение равновесия при $t\geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0<t<T$, что:

$$y(t)=0, \quad t\in[T-M\tau,T], \tag{1.3}$$

где $T>(M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений мы будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2dt\to\min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y):=\int\limits_0^T \left|\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right|^2 dt\to\min. \tag{1.4}$$

2. Связь между вариационной и краевой задачами

Введем некоторые вещественные функциональные пространства.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$, со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t)dt.$$

Пусть

$$\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\ldots,k-1\}.$$

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b), \quad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b), \quad \mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\ldots,v_n)^T,\ w = (w_1,\ldots,w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (1.2)–(1.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ — решение вариационной задачи (1.2)–(1.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau,T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau,T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\}.$$

Часто мы будем отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2(0,T-M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y+sv$ принадлежит $W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ и удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$J(y+sv) = F(s).$$

Поскольку

$$J(y+sv) \geqslant J(y)\ (s \in \mathbb{R}),$$

мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right)^T \times$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t)v'(t-l\tau)+\sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t-l\tau)\right)d\tau. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что

$$B(y,v)=0,\quad v\in\widetilde{W}. \tag{2.3}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{m,l}(y,v)=\int\limits_0^T \big(A_m(t)y'(t-m\tau)+B_m(t)y(t-m\tau)\big)^T\times$$
$$\times\big(A_l(t)v'(t-l\tau)+B_l(t)v(t-l\tau)\big)\,d\tau.$$

В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной

$$\xi=t-l\tau.$$

Получим

$$B_{m,l}(y,v)=\int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau}(A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau)+B_m(\xi+l\tau)\times$$
$$\times y(\xi+(l-m)\tau))^T(A_l(\xi+l\tau)v'(\xi)+B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t=\xi$. Учитывая, что $v(t)=0$ при $t\in(-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)$, будем иметь

$$B_{m,l}(y,v)=\int\limits_0^{T-M\tau}(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)+B_m(t+l\tau)\times$$
$$\times y(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t)+B_l(t+l\tau)v(t))dt. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим:

$$\begin{aligned}B(y,v)=\int\limits_0^{T-M\tau}\sum_{l,m=0}^{M}\{&(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t))+\\
&+[(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^TB_l(t+l\tau)-\\
&-((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^TA_l(t+l\tau))'+\\
&+(B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^TB_l(t+l\tau)]v(t)\}dt.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \tag{2.6}$$

В силу (2.6), подставляя (2.5) в (2.3), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$\begin{aligned}&-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))'+\\
&+\sum_{l,m=0}^{M}\{B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)-\\
&-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))'+\\
&+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\}=0\ (t\in(0,T-M\tau).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (2.7) почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 2.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.7), (1.2), (1.3), если выполняется условие (2.6), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (2.7), а также краевым условиям (1.2), (1.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.7), (1.2), (1.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$
\begin{aligned}
B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt + \\
+ \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T - \\
-((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T + \\
+(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (1.2), (1.3).

Таким образом, мы доказали, что, если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (1.2)–(1.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — обобщенное решение краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ — неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y — обобщенное решение задачи (2.7), (1.2), (1.3), то

$$B(y,v) = 0.$$

Следовательно,

$$J(y+v) \geqslant J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. *Функция* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *доставляет минимум функционалу* (1.4) *с краевыми условиями* (1.2), (1.3) *тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (2.7), (1.2), (1.3).

3. Разрешимость краевой задачи

В этом разделе мы докажем однозначную разрешимость краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3).

Введем оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T)$ по формуле

$$(R_0 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k(t) v(t - k\tau). \tag{3.1}$$

Рассмотрим функционал:

$$J_0(v) = \int\limits_0^T ((R_0 v')(t))^2 dt, \ v \in \widetilde{W}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть*

$$\det A_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J_0(w) \geqslant c_0 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.3}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. 1. Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leqslant \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \tag{3.4}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что

$$||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Тогда в силу компактности вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\} \subset \widetilde{W}$, сходящаяся в $L_2^n(0,T-M\tau)$ при $m \to \infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^n(0,T-M\tau)$.

2. Пусть $0 < t < \tau$. Тогда выражение $(R_0 w'_{k_m})(t)$ имеет вид

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t).$$

Следовательно, в силу невырожденности матрицы $A_0(t)$ и неравенства (3.4) имеем $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(0,\tau)$ при $m \to \infty$.

3. Пусть теперь $\tau < t < 2\tau$. Тогда

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t) + A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau).$$

Отсюда в силу неравенства (3.4) и п. 2 доказательства имеем

$$(R_0 w'_{k_m})(t) \to 0 \ \textit{и} \ A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau) \to 0 \ \textit{в} \ L_2^n(\tau, 2\tau) \text{ при } \ m \to \infty.$$

Следовательно, поскольку матрица $A_0(t)$ — невырождена, то $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(\tau,2\tau)$ при $m \to 0$.

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что

$$w'_{k_m} \to 0 \quad \text{в} \quad L_2^n(l\tau, L)$$

для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что $2\tau \leqslant l\tau < L$, где

$$L = \min\{(l+1)\tau, T - M\tau\}.$$

Таким образом, $w_0 \in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$ и $w_0 = \text{const} \neq 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\det A_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geqslant c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.5}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. Предположим противное: неравенство (3.5) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что

$$||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Тогда мы имеем

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{3.6}$$

Введем оператор $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k(t) v(t - k\tau). \tag{3.7}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leqslant 2(\alpha+\beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 3.1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ для любого $v \in \widetilde{W}$ мы получим

$$c_0 ||v||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant J_0(v) \leqslant 2J(v) + 2 \int_0^{T-M\tau} ((R_1 v)(t))^2 dt \leqslant \tag{3.8}$$

$$\leqslant 2J(v) + k_1 ||v||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)},$$

где $c_0, k_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, из (3.6), (3.8) следует, что

$$c_0 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \to 0 \ \text{ при } \ l, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_m} \to w_0$ в $\widetilde{W}$ и

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Поэтому в силу (3.6) мы имеем

$$J(w_0) = \int_0^{T-M\tau} |\sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau)|^2 dt = 0,$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau) = 0, \ t \in (0, T - M\tau). \tag{3.9}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \ t \in [-M\tau, 0]. \tag{3.10}$$

Тогда, если $0 < t \leqslant \tau$, система уравнений (3.9) примет вид

$$A_0(t) w_0'(t) + B_0(t) w_0(t) = 0, \tag{3.11}$$

при этом в силу (3.10)

$$w_0(0) = 0.$$

Следовательно,

$$w_0(t) = 0, \ t \in [0, \tau]. \tag{3.12}$$

В силу (3.10), (3.12) для $\tau < t \leqslant 2\tau$ система уравнений (3.9) примет вид (3.11), при этом в силу (3.12) $w_0(\tau) = 0$. Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0, \ t \in (\tau, 2\tau]$, и т. д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T - M\tau]$. Это противоречит равенству

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

$\square$

Теорема 3.1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (2.7), (1.2), (1.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$, *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{3.13}$$

где $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau \leqslant t \leqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad T - M\tau \leqslant t \leqslant T; \\ \varphi(0) - \varphi(0)t/(T - M\tau), & \text{если} \quad 0 < t < T - M\tau. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$. Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения $W_2^1(-M\tau, T)$ в $C[-M\tau, 0]$ имеем

$$||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant k_1||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{3.14}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Пусть $x = y - \Phi$, тогда $x \in \widetilde{W}$. Интегральное тождество (2.3) примет вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0, \ v \in \widetilde{W}. \tag{3.15}$$

Поскольку $B(v, v) = J(v), v \in \widetilde{W}$, по лемме 3.2 в пространстве $\mathring{W}_2^1(0, T - M\tau)$ мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = B(x, v). \tag{3.16}$$

Следовательно, тождество (3.15) может быть записано в виде

$$B(\Phi, v) + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0. \tag{3.17}$$

Для фиксированного $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ функционал $B(\Phi, v)$ линеен по $v \in \widetilde{W}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (3.14), (3.5) мы получаем

$$\begin{aligned} |B(\Phi, v)| &\leqslant k_2||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant \\ &\leqslant k_3||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant \\ &\leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $k_2, k_3, k_4 > 0$ — постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированном Φ функционал $B(\Phi, v)$ ограничен по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенства (3.18) норма функционала $B(\Phi, v)$ на $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ не превышает $k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция $F \in \widetilde{W}$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}. \tag{3.19}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (3.17) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (2.7), (1.2), (1.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (3.14) и (3.19) выполняется неравенство (3.13). Это доказывает теорему. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Диф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
3. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
4. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
5. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
6. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
7. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// В сб.: «Distributed computer and communication networks. 19th international conference, DCCN 2016, Moscow, Russia, November 21–25, 2016. Revised selected papers». — Cham: Springer, 2016. — С. 612–623.
8. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control Optim. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
9. *Halanay A.* Optimal controls for systems with time lag// SIAM J. Control Optim. — 1968. — *6*. — С. 213–234.
10. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
11. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: skublector@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-547-556 UDC 517.929

On One Damping Problem for a Nonstationary Control System with Aftereffect

© 2019 **A. S. Adkhamova, A. L. Skubachevskii**

Abstract. We consider a control system described by the system of differential-difference equations of neutral type with variable matrix coefficients and several delays. We establish the relation between the variational problem for the nonlocal functional describing the multidimensional control system with delays and the corresponding boundary-value problem for the system of differential-difference equations. We prove the existence and uniqueness of the generalized solution of this boundary-value problem.

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

REFERENCES

1. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol'kimi starshimi chlenami" [To the formulation of boundary-value problems for differential equations with delayed argument and several higher-order terms], *Dif. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
2. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
3. A. V. Kryazhimskiy, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, "O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh" [On positional modelling in dynamical systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
4. D. D. Leonov, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
5. Yu. S. Osipov, "O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem" [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
7. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Damping problem for multidimensional control system with delays," In: *Distributed computer and communication networks. 19th international conference, DCCN 2016, Moscow, Russia, November 21–25, 2016. Revised selected papers*, Springer, Cham, 2016, pp. 612–623.
8. H. T. Banks and G. A. Kent, "Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space," *SIAM J. Control Optim.*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
9. A. Halanay, "Optimal controls for systems with time lag," *SIAM J. Control Optim.*, 1968, **6**, 213–234.
10. G. A. Kent, "A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
11. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. S. Adkhamova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

A. L. Skubachevskii
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: skublector@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 557–592

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592 УДК 531.384

О ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ ВНУТРЕННЮЮ МАССУ

2019 г. **Б. С. БАРДИН, А. С. ПАНЁВ**

Аннотация. Рассматривается движение механической системы, состоящей из корпуса (твёрдого тела) и внутренней массы (материальной точки), движущейся внутри него по окружности, центр которой совпадает с центром масс корпуса. Предполагается, что абсолютная величина скорости кругового движения внутренней массы постоянна. Корпус движется поступательно и прямолинейно по плоской горизонтальной поверхности, со стороны которой на него действуют силы вязкого и сухого кулонова трения. Движение внутренней массы происходит в вертикальной плоскости.

Выполнено полное качественное исследование динамики системы. Показано, что всегда существует единственный режим движения корпуса с периодически меняющейся скоростью. Изучены все возможные типы указанного периодического движения. Установлено, что при любой начальной скорости корпус в зависимости от значений параметров задачи либо выйдет на периодический режим движения за конечное время, либо будет асимптотически к нему приближаться.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твёрдого тела массой M и движущейся внутри него материальной точки массой m. Тело находится на горизонтальной плоскости, на которую оно опирается своей плоской гранью. Движение точки внутри тела происходит в вертикальной плоскости по круговой траектории радиуса R, центр которой совпадает с центром масс тела. При движении (скольжении) тела в области его контакта с плоскостью возникают силы сухого и вязкого трения. Внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, а угловая скорость ω радиус-вектора, описывающего её круговое движение внутри тела, постоянна.

Следует отметить, что рассматриваемую здесь механическую систему можно также интерпретировать как твёрдое тело, внутри которого вращается маятник. Ось вращения маятника параллельна опорной плоскости и проходит через центр масс тела. К оси маятника приложен управляющий момент, который обеспечивает вращение маятника с постоянной угловой скоростью.

Исследование динамики тел, несущих подвижные массы, представляет не только теоретический интерес, но может иметь и прикладное значение для создания вибрационных роботов, движущихся посредством перемещения внутренних масс. Важным преимуществом таких устройств является то, что они не требуют специальных движителей (колес, гусениц и т. д.) и могут быть конструктивно выполнены в форме запаянных капсул. Это делает их устойчивыми к внешним воздействиям,

Российский университет дружбы народов, 2019

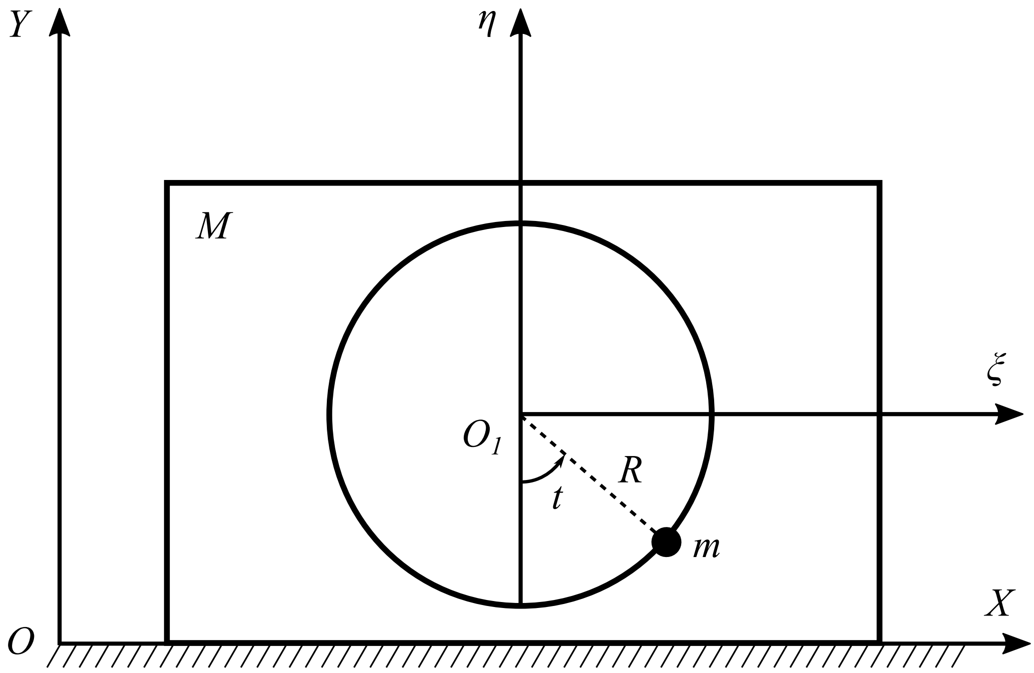

Рис. 1. Механическая система

поэтому вибрационные роботы могут оказаться весьма перспективными для работы в агрессивных средах как на твёрдых поверхностях, так и в жидкостях. В частности, они могут представлять интерес для космических проектов, при исследовании поверхностей небесных тел.

Прикладным задачам динамики, математического моделирования движения, а также вопросам конструирования мобильных роботов, способных передвигаться по поверхности благодаря перемещению внутренних масс, посвящено много работ [9, 10, 25–29, 34–38].

Строгое теоретическое исследование задач динамики и оптимального управления движением механических систем, состоящих из корпуса (несущего тела) и внутренних подвижных масс, было начато в работах [18, 22]. Работы [4, 6], посвящены поиску оптимального управления с целью максимизации средней скорости несущего тела. В предположении о малости коэффициента трения скольжения в работе [4] методами усреднения изучены стационарные периодические режимы движения. В [16] аналогичная методика применялась для исследования движения несущего тела при наличии вязкого трения, а в [17, 19] — для анализа движения тела по наклонной плоскости.

Рассматривался также случай двумерного движения [14, 23, 39]. В частности, были изучены способы маневрирования (поворотов) и перемещения несущего тела из исходного положения в заданное. Анализ безударных прыжков тела, несущего две подвижные массы, по горизонтальной плоскости был выполнен в [1].

Ряд работ посвящён анализу динамики и построению оптимального управления двухмассовой системой, состоящей из твёрдого тела и материальной точки, перемещающейся внутри тела по некоторой траектории. В [3] исследовалась динамика несущего тела в предположении, что внутренняя масса перемещается внутри него в вертикальной плоскости прямолинейно, а координаты её относительного движения меняются по гармоническому закону. В [33] исследовались режимы движения несущего тела, при которых оно совершает остановки, покоится в течении конечного интервала времени, а затем продолжает скольжение по горизонтальной плоскости, проведён анализ бифуркации указанных режимов. Построению оптимального управления движением корпуса при прямолинейном относительном движении внутренней массы посвящены работы [5, 7, 8]. Задачи оптимального управления движением корпуса в случае кругового относительного движения внутренней массы при некоторых ограничениях, наложенных на её ускорение, рассматривались в [11, 12]. В [24] построены траектории относительного движения внутренней массы, обеспечивающие оптимальное управление корпусом.

Целью данной работы является полное качественное исследование динамики описанной выше механической системы при всех допустимых значениях параметров и начальных условий. При нулевой начальной скорости корпуса анализ динамики данной системы был выполнен в [2, 15]. В работах [30, 31] были изучены некоторые режимы движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости. Без учёта сил вязкого трения анализ движения корпуса при всех значениях параметров задачи и начальных скоростях был выполнен в [32].

1. Уравнение движения

Пусть параметры системы и начальная скорость корпуса выбраны так, что он совершает поступательное прямолинейное движение (скольжение без отрыва от горизонтальной плоскости). Тогда движение центра масс O_1 тела и внутренней подвижной массы будет происходить в некоторой фиксированной вертикальной плоскости, с которой свяжем абсолютную систему координат OXY (рис. 1). Введём ещё подвижную систему координат $O_1\xi\eta$ (рис. 1), начало которой расположено в центре масс O_1 тела, а оси $O_1\xi$ и $O_1\eta$ имеют соответственно горизонтальное и вертикальное направление. Без ограничения общности будем считать, что в начальный момент ($t = 0$) внутренняя масса, двигаясь против часовой стрелки, проходит нижнюю точку окружности. Тогда относительное движение массы описывается формулами

$$\xi_* = R\sin\omega t, \quad \eta_* = -R\cos\omega t.$$

В такой постановке задачи положение корпуса полностью задаётся координатой X его центра масс, а уравнение движения имеет вид

$$M\ddot{X} + m(\ddot{X} - R\omega^2\sin\omega t) = F_c - \nu\dot{X}. \tag{1.1}$$

Через ν обозначен коэффициент вязкого трения, а через F_c — сила сухого трения, которая описывается моделью Кулона (см. например, [13]):

$$F_c = \begin{cases} -kN\operatorname{sign}\dot{X}, & \text{если } \dot{X} \neq 0, \\ m\ddot{\xi}_*, & \text{если } \dot{X} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}_*| \leqslant kN, \\ kN\operatorname{sign}(m\ddot{\xi}_*), & \text{если } \dot{X} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}_*| > kN, \end{cases} \tag{1.2}$$

где k — коэффициент сухого трения. Нормальная реакция N изменяется по закону

$$N = (M+m)g + R\omega^2\cos\omega t.$$

Введём безразмерные координату x, время t' и параметры μ, λ:

$$X = \frac{Rmx}{M+m}, \quad t = \frac{t'}{\omega}, \quad \mu = \frac{(M+m)g}{Rm\omega^2}, \quad \alpha = \frac{\nu}{(M+m)\omega}, \tag{1.3}$$

где g — ускорение свободного падения.

Отметим, что новое время t' играет роль угловой координаты, определяющей положение внутренней массы на окружности. Далее мы будем опускать значок «штрих» в обозначении нового времени, сохраняя для него прежнее обозначение t.

В новых переменных уравнение движения корпуса по горизонтальной поверхности примет вид

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t + f_c, \tag{1.4}$$

где $u = \dot{x}$ — безразмерная скорость корпуса, а функция f_c задаётся следующим образом:

$$f_c = \begin{cases} -k(\mu+\cos t)\operatorname{sign} u, & \text{если } u \neq 0; \\ -\sin t, & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| \leqslant k(\mu+\cos t); \\ -k(\mu+\cos t)\operatorname{sign}(\sin t), & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| > k(\mu+\cos t). \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно (1.4) и (1.5) движение корпуса в положительном направлении описывается уравнением

$$\dot{u} + \alpha u = f_1(t), \tag{1.6}$$

а в отрицательном направлении — уравнением

$$\dot{u} + \alpha u = f_2(t), \tag{1.7}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяются по формулам

$$f_1(t) = \sin t - k(\mu+\cos t), \quad f_2(t) = \sin t + k(\mu+\cos t). \tag{1.8}$$

2. О характере движения корпуса с нулевой начальной скоростью. Периодические режимы движения

Далее будем считать, что параметры системы удовлетворяют следующим неравенствам

$$k^2 < \frac{1}{\mu^2 - 1}, \quad \mu \geqslant 1. \tag{2.1}$$

Первое неравенство гарантирует, что существует такой момент времени, при котором горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, по абсолютной величине превзойдёт силу сухого трения, т. е. относительное движение внутренней массы может вывести корпус из состояния покоя. Второе неравенство означает, что во всё время движения вертикальная составляющая силы инерции по абсолютной величине не превосходит силы тяжести, приложенной в центре масс системы, т. е. корпус будет двигаться без отрыва от поверхности. Кроме того, будем считать, что геометрия корпуса и его начальная скорость таковы, что он не опрокидывается во время движения.

Исследование динамики корпуса начнем с определения моментов времени, в которые горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, по абсолютной величине равна силе сухого трения и противоположна ей по направлению. Эти моменты времени находятся из уравнения

$$\sin t = \pm k(\mu + \cos t). \tag{2.2}$$

На интервале $t \in (0, 2\pi)$ данное уравнение имеет следующие корни:

$$t_1 = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right), \quad t_2 = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right),$$
$$t_3 = 2\pi - t_2, \quad t_4 = 2\pi - t_1. \tag{2.3}$$

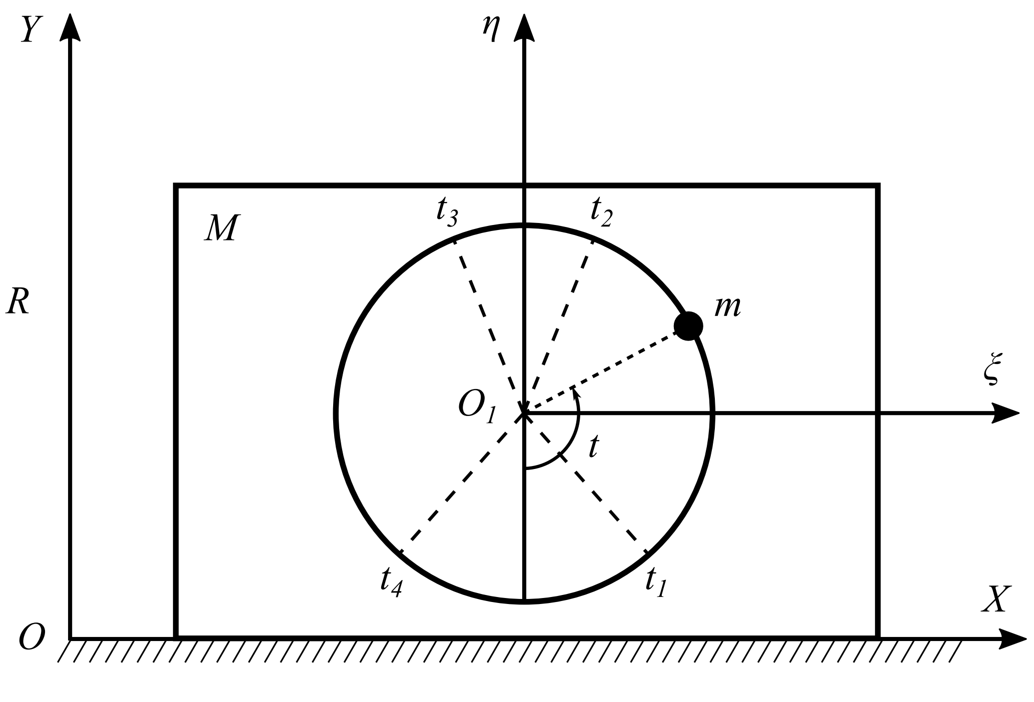

Рис. 2. Зоны замедления

Моменты времени t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ задают интервалы (t_2, t_3) и $(t_4, t_1 + 2\pi)$, на которых ускорение корпуса противоположно направлению его скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов внутренняя масса находится в верхней части траектории движения, при прохождении второго — в нижней части. Указанные интервалы назовём соответственно верхней и нижней зонами замедления (рис. 2). Они играют важную роль при анализе характера движения корпуса. В частности, если корпус остановится в момент прохождения внутренней массой зоны замедления, то он будет оставаться в состоянии покоя до тех пор, пока она не покинет зону замедления. Такое явление называют залипанием корпуса [8].

Отметим ещё, что имеет место следующие неравенство

$$t_1 + t_2 > \pi, \tag{2.4}$$

и тождество

$$\cos t_1 + k \sin t_1 = -(\cos t_2 + k \sin t_2) = \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}, \tag{2.5}$$

которыми мы воспользуемся ниже.

Далее в данном разделе мы предполагаем, что скорость корпуса при $t = t_1$ равна нулю, т. е. t_1 — момент начала движения. Ниже будет показано, что в зависимости от значений параметров k, μ, α движение системы может иметь качественно различный характер.

Движение с залипанием в верхней и нижней зонах замедления. Движение корпуса от момента времени t_1 до первой остановки описывается уравнением (1.6). Пусть корпус, начав движение в момент времён t_1, совершит остановку в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I \in (t_2, t_3)$. Поскольку функция $u(t)$, полученная как решение уравнения (1.6), убывает на всём интервале $(t_2, t_3]$, то для того, чтобы она обращалась в нуль на указанном интервале, её значение на его правой границе $t = t_3$ должно быть либо отрицательным, либо обращаться в нуль. Таким образом, решая уравнение (1.6) с начальным условием $u(t_1) = 0$, находим следующее условие остановки корпуса на интервале $(t_2, t_3]$, т. е. в верхней зоне замедления:

$$\int\limits_{t_1}^{t_3} e^{\alpha t} f_1(t) dt \leqslant 0. \tag{2.6}$$

Введём функции G_1 и G_2:

$$G_1(t) = \frac{\alpha^2 f_1(t) - \alpha f_1'(t) - k\mu}{\alpha(\alpha^2 + 1)}, \quad G_2(t) = \frac{\alpha^2 f_2(t) - \alpha f_2'(t) + k\mu}{\alpha(\alpha^2 + 1)}. \tag{2.7}$$

Тогда неравенство (2.6) можно переписать в виде

$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1) \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Напомним, что t_1 и t_3 выражаются через k и μ по формулам (2.3), поэтому левая часть неравенства (2.8) представляет собой функцию параметров k, μ и α. Таким образом, если параметры задачи k, μ и α удовлетворяют неравенствам (2.1) и (2.8), то корпус будет совершать движение с остановкой в верхней зоне замедления.

Итак, в момент времени t_1 корпус начинает движение и, перемещаясь в положительном направлении оси OX, останавливается в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I$. Далее на промежутке $(t_1 + \Delta t_*^I, t_3)$ корпус будет находиться в состоянии покоя, а затем начнёт движение в противоположном (отрицательном) направлении. С момента времени t_3 до следующей остановки движение корпуса описывается уравнением (1.7). Покажем, что если корпус остановится в верхней зоне замедления, то, начав движение в момент времени t_3 в отрицательном направлении, он остановится и в нижней зоне замедления, причём перемещение корпуса за период будет нулевым. Интегрируя уравнение (1.6) с начальным условием $u(t_1) = 0$, имеем

$$u(t_1 + \tau) = G_1(t_1 + \tau) - e^{-\alpha\tau} G_1(t_1). \tag{2.9}$$

Аналогично, интегрируя уравнение (1.7) с нулевым начальным условием $u(t_3) = 0$, получаем

$$u(t_3 + \tau) = G_2(t_3 + \tau) - e^{-\alpha\tau} G_2(t_3). \tag{2.10}$$

Используя тождество (2.5) и явные выражения (2.9), (2.10), можно показать, что

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau). \tag{2.11}$$

В частности, имеет место равенство

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = -u(t_3 + \Delta t_*^I) = 0. \tag{2.12}$$

Последнее означает, что корпус совершит остановки в верхней и нижней зонах замедления в моменты времени

$$t = t_1 + \Delta t_*^I, \quad t = t_3 + \Delta t_*^I,$$

т. е. как в положительном, так и в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение одного и того же периода времени Δt_*^I. Величина Δt_*^I определяется из уравнения

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = 0.$$

Поскольку $u = \dot{x}$, то, интегрируя обе части равенства (2.11) по τ на интервале времени от 0 до Δt_*^I, имеем

$$x(t_1 + \Delta t_*^I) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t_*^I) + x(t_3). \tag{2.13}$$

Равенство (2.13) означает, что перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине, т. е. корпус совершает 2π-периодическое возвратно-поступательное движение.

Первое из неравенств (2.1) и неравенство (2.8) определяют в пространстве параметров k, μ и α область, в которой корпус совершает периодическое возвратно-поступательное движение с залипаниями в верхней и нижней зонах замедления. При таком движении перемещение корпуса за время полного оборота внутренней массы по окружности будет равно нулю. Указанную область будем называть областью I.

Движение с залипанием только в нижней зоне замедления. Пусть теперь условие (2.8) не выполнено, т. е. имеет место неравенство

$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1) > 0. \tag{2.14}$$

В этом случае корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4)$, т. е. после того как внутренняя масса пройдёт верхнюю зону замедления и до её попадания в нижнюю зону замедления. Это нетрудно доказать от противного. Действительно, пусть

$$t_3 + \Delta t_*^{II} > t_4,$$

тогда

$$u(t_4) > 0.$$

С другой стороны, интегрируя уравнение (1.6) на интервале (t_1, t_4) с нулевым начальным условием, имеем

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \int\limits_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt, \tag{2.15}$$

или

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \left[\int\limits_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [-k(\mu + \cos t)] dt + \int\limits_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt \right]. \tag{2.16}$$

Очевидно, что первое слагаемое в квадратных скобках правой части (2.16) будет отрицательным. Учитывая, что

$$t_4 = 2\pi - t_1,$$

второе слагаемое можно представить в следующем виде:

$$\int\limits_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt = \int\limits_{t_1}^{\pi} e^{-\alpha t} \left(e^{2\alpha t} - e^{2\pi\alpha} \right) \sin t dt. \tag{2.17}$$

Подынтегральное выражение в правой части равенства (2.17) на интервале (t_1, π) может принимать только отрицательные значения, поэтому и второе слагаемое в квадратных скобках правой части (2.16) будет отрицательным. Из этого следует, что

$$u(t_4) < 0,$$

т. е. приходим к противоречию с предположением. Таким образом, если корпус не остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то остановка обязательно произойдёт на интервале времени (t_3, t_4). Величина Δt_*^{II} определяется из уравнения

$$e^{\alpha(t_3+\Delta t_*^{II})}G_1(t_3+\Delta t_*^{II}) - e^{\alpha t_1}G_1(t_1) = 0. \tag{2.18}$$

После остановки в момент времени

$$t = t_3 + \Delta t_*^{II}$$

корпус, изменив направление, будет двигаться с отрицательной скоростью до новой остановки. Выясним, каким условиям должны удовлетворять параметры задачи k, μ и α, чтобы эта остановка произошла в нижней зоне замедления. На интервале времени от $t_3 + \Delta t_*^{II}$ до новой остановки скорость корпуса определяется в результате решения уравнения (1.7) с начальным условием

$$u(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0.$$

В момент времени t_4 скорость корпуса принимает отрицательное значение. Заметим теперь, что любое решение уравнения (1.7) является непрерывной и возрастающей функцией на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$. Если эта функция принимает отрицательное значение на левой границе указанного интервала, то для её обращения в нуль на данном интервале необходимо и достаточно, чтобы на правой границе интервала (при $t_1 + 2\pi$) она принимала неотрицательное значение, т. е. было выполнено неравенство

$$u(t_1 + 2\pi) = e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt \geqslant 0. \tag{2.19}$$

Используя введённые выше обозначения, последнее неравенство можно переписать в виде

$$e^{\alpha(t_1+2\pi)}G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3+\Delta t_*^{II})}G_2(t_3+\Delta t_*^{II}) \geqslant 0, \tag{2.20}$$

где Δt_*^{II} зависит от параметров задачи и находится из уравнения (2.18). Таким образом, если параметры k, μ и α принадлежат области, заданной неравенствами (2.14) и (2.20), то в момент времени t_1 корпус начнёт движение в положительном направлении, пройдёт без остановки верхнюю зону замедления и остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4]$. Затем корпус изменит направление движения и будет перемещаться до новой остановки, которая произойдёт в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_{**}^{II} \in (t_4, t_1 + 2\pi]$, когда внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления. После остановки корпус будет оставаться в состоянии покоя до момента времени $t_1 + 2\pi$. Это означает, что при движении корпуса с остановкой только в нижней зоне замедления, его скорость будет 2π-периодически меняющейся функцией времени. Область пространства параметров, заданную неравенствами (2.14) и (2.20), будем называть областью II.

Покажем теперь, что для значений параметров из области II корпус за один период изменения скорости, т. е. за время полного оборота внутренней массы по окружности, перемещается в положительном направлении.

Используя тождество (2.5), нетрудно показать, что для произвольного τ выполняется равенство

$$\sin(t_1+\tau) - k(\mu + \cos(t_1+\tau)) = -\sin(t_3+\tau) - k(\mu + \cos(t_3+\tau)). \tag{2.21}$$

Из выражения (2.21), следует, что при $\tau > \Delta t_*^{II}$ справедливо равенство

$$\dot u(t_1+\tau) + \alpha u(t_1+\tau) = -\dot u(t_3+\tau) - \alpha u(t_3+\tau). \tag{2.22}$$

Введём обозначение

$$g(\tau) = u(t_1+\tau) + u(t_3+\tau). \tag{2.23}$$

Тогда равенство (2.22) перепишется в следующей эквивалентной форме:

$$\dot g = \alpha g. \tag{2.24}$$

Интегрируя уравнение (2.24) при $\tau > \Delta t_*^{II}$, получим

$$g(\tau) = g(\Delta t_*^{II})e^{\alpha(\tau - \Delta t_*^{II})}, \tag{2.25}$$

или, учитывая обозначения (2.23),

$$u(t_1+\tau)+u(t_3+\tau)=e^{\alpha(\tau-\Delta t_*^{II})}u(t_1+\Delta t_*^{II}). \tag{2.26}$$

Полагая в (2.26) $\tau=\Delta t_{**}^{II}$, имеем

$$u(t_1+\Delta t_{**}^{II})=e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II}-\Delta t_*^{II})}u(t_1+\Delta t_*^{II}). \tag{2.27}$$

Поскольку в момент времени $t_1+\Delta t_*^{II}$ скорость корпуса положительна, то на основании последнего равенства она будет положительна и в момент времени $t_1+\Delta t_{**}^{II}$. Поэтому первая остановка корпуса произойдёт после момента времени $t_1+\Delta t_{**}^{II}$, т. е. будет справедливым неравенство

$$t_1+\Delta t_{**}^{II}<t_3+\Delta t_*^{II},$$

которое можно переписать как

$$\Delta t_{**}^{II}<t_3+\Delta t_*^{II}-t_1. \tag{2.28}$$

Нетрудно заметить, что выражение в правой части неравенства (2.28) задаёт время движения корпуса в положительном направлении. Поскольку в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение промежутка времени $\Delta t_{**}^{II}-\Delta t_*^{II}$, то из неравенства (2.28) сразу следует, что время движения в положительном направлении превосходит время движения в отрицательном направлении. Вычислим путь, пройденный корпусом за период 2π:

$$x(t_1+2\pi)-x(t_1)=x(t_3+\Delta t_{**}^{II})-x(t_1)=\int\limits_{t_1}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt-x(t_1). \tag{2.29}$$

Без ограничения общности можно положить $x(t_1)=0$. Преобразуем интеграл в правой части (2.29):

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_1}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt=\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^{II}}u(t)dt+\int\limits_{t_1+\Delta t_*^{II}}^{t_1+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt+\int\limits_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}}u(t)dt+\int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt=\\=\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^{II}}u(t)dt+\int\limits_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}}u(t)dt+\int\limits_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}}u(t+t_1)dt+\int\limits_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}}u(t+t_3)dt.\end{gathered} \tag{2.30}$$

Учитывая (2.26), последнее выражение можно переписать так:

$$\int\limits_{t_1}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt=\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_{**}^{II}}u(t)dt+\int\limits_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}}u(t)dt+u(t_1+\Delta t_*^{II})\frac{e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II}-\Delta t_*^{II})}-1}{\alpha}>0. \tag{2.31}$$

Все слагаемые в правой части (2.31), очевидно, положительны, поэтому корпус будет совершать периодическое движение с залипанием только в нижней зоне замедления, а перемещение корпуса за период будет положительным.

Движение с остановками вне зон замедления. Теперь предположим, что условие (2.20) не выполнено, т. е. справедливо следующее неравенство:

$$e^{\alpha(t_1+2\pi)}G_2(t_1)-e^{\alpha(t_3+\Delta t_*^{II})}G_2(t_3+\Delta t_*^{II})<0. \tag{2.32}$$

Тогда тело, начав движение в момент времени t_1 с положительной скоростью, остановится на промежутке (t_3,t_4) и сразу начнёт движение в отрицательном направлении до остановки на промежутке $(t_1+2\pi,t_2+2\pi)$. В этом случае движение корпуса не будет периодическим. За период времени 2π корпус дважды меняет направление движения на противоположное. Изменение направления движения с положительного на отрицательное происходит в моменты времени $2\pi n+t_*^{(n)}$, а с отрицательного на положительное — в моменты времени $2\pi n + t_{**}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При заданных k, μ и α величины $t_*^{(n)}$ и $t_{**}^{(n)}$ определяются следующим образом. Сначала из уравнения

$$G_1(t_1)e^{\alpha t_1} - G_1(t_*^{(0)})e^{\alpha t_*^{(0)}} = 0$$

находится момент первой остановки $t_*^{(0)}$. Моменты следующих остановок определяются в результате последовательного решения уравнений

$$\begin{aligned} G_1(t_{**}^{(n)})e^{\alpha t_{**}^{(n)}} - G_1(t_*^{(n)})e^{\alpha t_*^{(n)}} = 0, \\ G_2(t_*^{(n+1)})e^{\alpha(2\pi + t_*^{(n+1)})} - G_2(t_{**})e^{\alpha t_{**}^{(n)}} = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.32) движение корпуса не будет периодическим ни по скорости, ни по координате. Область пространства параметров, заданную неравенством (2.32) и неравенствами $\mu \geqslant 1$, $k > 0$, будем называть областью III.

Ниже будет показано, что при значениях параметров из области III движение будет асимптотически приближаться к некоторому единственному периодическому режиму движения без остановок в зонах замедления трением, а перемещение корпуса за период будет положительным.

3. Предварительные замечания о свойствах решений уравнения движения корпуса

Уравнение (1.4), описывающее движение корпуса, имеет при $u = 0$ разрыв в правой части и не удовлетворяет условию Липшица, поэтому к нему неприменимы классические теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие выводы о существовании, единственности и непрерывности решения уравнения (1.4) можно получить на основании теории, развитой для систем с разрывной правой частью [20, 21]. В частности, можно показать, что для уравнения (1.4) имеет место правосторонняя единственность решения, т. е. при $t > t_0$ всегда существует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $u(t_0) = u_0$. Также нетрудно показать, что при $t > t_0$ решение уравнения (1.4) непрерывно зависит от t, начального условия и параметров задачи k, μ. В данном разделе мы установим некоторые общие свойства решений уравнения (1.4), которые будут использованы ниже при анализе движения корпуса с произвольной начальной скоростью.

Покажем сначала, что если функция $u(t)$ является решением уравнения (1.4), то последовательность её значений $u(t + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$ обладает свойством монотонности. С этой целью рассмотрим два решения $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ уравнения (1.4). Эти решения являются непрерывными функциями t и при $t \geqslant t_1$ однозначно определяются своими начальными условиями

$$u^{(1)}(t_1) = u_0^{(1)}, \quad u^{(2)}(t_1) = u_0^{(2)}.$$

Пусть

$$u_0^{(1)} < u_0^{(2)},$$

тогда возможны два случая:

- либо $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при всех $t \geqslant t_1$ и из непрерывности функций $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ сразу следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$;
- либо существует такой момент времени t^*, что $u^{(1)}(t^*) = u^{(2)}(t^*) = 0$ и $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leqslant t < t^*$.

В последнем случае из непрерывности $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leqslant t < t^*$, а из правосторонней единственности решения уравнения (1.4) с начальным условием $u(t^*) = 0$ следует, что при $t \geqslant t^*$ выполняется тождественное равенство $u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t)$. Таким образом, если $u_0^{(1)} < u_0^{(2)}$, то при всех $t \geqslant t_1$ имеет место неравенство $u^{(1)}(t) \leqslant u^{(2)}(t)$ и, в частности,

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi) \leqslant u^{(2)}(t_1 + 2\pi). \tag{3.1}$$

Предположим теперь, что

$$u^{(1)}(t_1) < u^{(1)}(t_1 + 2\pi).$$

В этом случае, выбирая начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$, так, что

$$u^{(2)}(t_1) = u^{(1)}(t_1 + 2\pi),$$

в силу 2π-периодичности правой части уравнения (1.4) приходим к тождественному равенству

$$u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t+2\pi),$$

которое позволяет переписать неравенство (3.1) в виде

$$u^{(1)}(t_1+2\pi) \leqslant u^{(1)}(t_1+4\pi). \tag{3.2}$$

Продолжая далее по индукции, имеем

$$u^{(1)}(t_1+2\pi n) \leqslant u^{(1)}(t_1+2\pi(n+1)), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Таким образом, последовательность значений $u^{(1)}(t_1+2\pi n)$ является неубывающей.

Аналогично можно показать, что в случае

$$u^{(1)}(t_1) > u^{(1)}(t_1+2\pi)$$

будет выполнено неравенство

$$u^{(1)}(t_1+2\pi n) \geqslant u^{(1)}(t_1+2\pi(n+1)), \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. последовательность значений $u^{(1)}(t_1+2\pi n)$ будет невозрастающей.

В предельном случае $u^{(1)}(t_1) = u^{(1)}(t_1+2\pi)$ начальные условия решений $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ совпадают, поэтому в силу единственности решения уравнения (1.4) при $t > t_1$ тождественно равны и сами эти решения

$$u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t).$$

С другой стороны, как было показано выше,

$$u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t+2\pi),$$

поэтому при всех $t > t_1$ справедливо равенство

$$u^{(1)}(t) = u^{(1)}(t+2\pi), \tag{3.4}$$

которое означает, что $u^{(1)}(t)$ является периодической функцией t.

Приведенные выше рассуждения остаются в силе, если в качестве начального момента времени выбрать не t_1, а любое произвольное значение $t^* \geqslant t_1$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.1. *Пусть функция* $u(t)$, *заданная на промежутке* $[t_1; +\infty)$, *является решением уравнения* (1.4), *тогда её значения* $u(t^*+2\pi n)$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *образуют монотонную последовательность при любом* $t^* \geqslant t_1$.

Исследуем теперь вопрос о существовании 2π-периодических решений уравнения (1.4), описывающих движение корпуса без залипания. Предположим, что уравнение (1.4) допускает указанное 2π-периодическое решение, которое далее будем обозначать $u_*(t)$. Покажем, что на интервале $[t_1; t_1+2\pi]$ функция $u_*(t)$ дважды обращается в нуль и меняет свой знак. Действительно, рассуждая от противного, будем считать, что $u_*(t) \neq 0$ на интервале $[t_1; t_1+2\pi]$, и для определённости положим $u_*(t) > 0$. Тогда из уравнения (1.6) имеем

$$u_*(t_1+2\pi) = e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int\limits_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_1(t)dt + e^{-2\pi\alpha} u_*(t_1). \tag{3.5}$$

Учитывая, что функция $f_1(t)$ принимает положительные значения при $t \in (t_1, t_2)$ и отрицательные при $t \in (t_2, t_1+2\pi)$, оценим интеграл в правой части (3.5):

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_1(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_2}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_1(t)dt < \\ < \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t_2} f_1(t)dt + \int\limits_{t_2}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t_2} f_1(t)dt = e^{\alpha t_2} \int\limits_{t_1}^{t_1+2\pi} f_1(t)dt = -2\pi k\mu e^{\alpha t_2}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_1(t)dt < -2\pi k\mu e^{\alpha t_2}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7), учитывая, что $e^{-2\pi\alpha} < 1$, приходим к неравенству

$$u_*(t_1 + 2\pi) < u_*(t_1) - 2\pi k\mu e^{-\alpha(t_1+2\pi-t_2)}. \tag{3.8}$$

Последнее противоречит условию 2π-периодичности $u_*(t)$. Поэтому функция $u_*(t)$ обязательно обратится в нуль и поменяет знак на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Кроме того, из непрерывности и 2π-периодичности $u_*(t)$ следует, что на указанном интервале $u_*(t)$ изменит свой знак чётное число раз.

Поскольку функция $u_*(t)$ описывает движение корпуса без залипания, то она может обратиться в нуль лишь на интервалах $[t_1; t_2]$ и $[t_3; t_4]$. Покажем, что на каждом из этих интервалов она может обратиться в нуль только один раз.

Пусть в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус покоился или двигался в положительном направлении, тогда на интервале от $t = t_0$ до первой остановки его скорость определяется в результате решения уравнения (1.6) и имеет следующий явный вид:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\alpha t} f_1(t)dt + e^{-\alpha(t-t_0)} u(t_0). \tag{3.9}$$

По предположению $u(t_0) \geqslant 0$, поэтому выражение (3.9) положительно на всём интервале $[t_1, t_2]$, т. е. двигаясь в момент времени t_0 с положительной скоростью, корпус на интервале $[t_1, t_2]$ сохранит направление своего движения, а его скорость не обратится в нуль.

Предположим теперь, что в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус двигался в отрицательном направлении. В этом случае на интервале времени от $t = t_0$ до первой остановки его скорость находится из уравнения (1.7). Правая часть этого уравнения на интервале $[t_1, t_2]$ положительна, поэтому его решения являются возрастающими функциями времени и при подходящем выборе начального условия $u(t_0) < 0$ обращаются в нуль на указанном интервале.

Из сказанного выше следует, в частности, что периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.4) может обратиться в нуль на интервале $[t_1, t_2]$ только один раз, причём будет выполнено условие $u_*(t_1) < 0$. Аналогично можно показать, что и на интервале $[t_3, t_4]$ периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.4) также может обратиться в нуль только один раз и в этом случае выполняется условие $u_*(t_3) > 0$.

Моменты времени $t_* \in [t_1, t_2]$ и $t_{**} \in [t_3, t_4]$, при которых периодическое решение $u_*(t)$ обращается в нуль, находятся из условий

$$\begin{aligned} &\int_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0, \\ &\int_{t_{**}}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Условия (3.10) можно переписать явно в виде системы из двух уравнений относительно t_* и t_{**}:

$$\begin{aligned} G_1(t_*)e^{\alpha t_*} - G_1(t_{**})e^{\alpha t_{**}} = 0, \\ G_2(t_{**})e^{\alpha t_{**}} - G_2(t_*)e^{\alpha(t_*+2\pi)} = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Система уравнений (3.11) имеет решение не при всех допустимых значениях параметров k, μ, α. Найдём необходимое условие существования решения системы (3.11), а именно, покажем от противного, что система (3.11) может иметь решение только для значений параметров из области III.

Пусть при значениях параметров k, μ, α из области I система уравнений (3.11) имеет решение, тогда величины t_* и t_{**} однозначно определяют периодическое движение корпуса без залипания в зонах замедления. Наряду с этим периодическим движением рассмотрим движение корпуса с нулевой начальной скоростью $u(t_1) = 0$. Ранее было показано, что в этом случае корпус, начав движение в положительном направлении, останавливается в верхней зоне замедления, т. е. на интервале (t_2, t_3). Момент $t_1 + \Delta t_*^I$ остановки корпуса определится из условия

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^I} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \tag{3.12}$$

Функция $f_1(t)$ положительна на интервале (t_1, t_2) и отрицательна на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$, поэтому функция

$$F_1(t) = \int\limits_{t_1}^{t} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_1, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$. Аналогично функция

$$F_1^*(t) = \int\limits_{t_*}^{t} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_*, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$.

Принимая во внимание равенство

$$F_1(t) = F_1^*(t) + \int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau$$

и учитывая, что в силу (3.12) $F_1(t_1 + \Delta t_*^I) = 0$, приходим к неравенству

$$F_1^*(t_1 + \Delta t_*^I) = -\int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau < 0,$$

из которого следует, что на интервале $(t_2, t_1 + \Delta t_*^I)$ функция $F_1^*(t)$ непрерывна, монотонна и принимает значения противоположных знаков на границах этого интервала. Следовательно, она обращается в нуль в единственной точке данного интервала. С другой стороны, в силу (3.10) выполняется равенство $F_1^*(t_{**}) = 0$, поэтому $t_{**} \in (t_2, t_1 + \Delta t_*^I)$. Таким образом,

$$t_2 < t_{**} < t_1 + \Delta t_*^I < t_3,$$

т. е. корпус, начав движение в момент времени $t = t_*$, остановится в верхней зоне замедления. Последнее противоречит предположению о существовании периодического режима движения без залипания. Из данного противоречия следует, что в области I система (3.11) не имеет решений и периодического режима движения корпуса без залипаний не существует.

Предположим теперь, что система уравнений (3.11) имеет решение для значений параметров задачи из области II. Напомним, что в этой области существует периодический режим движения с залипанием в нижней зоне замедления, т. е. корпус, начав движение с нулевой начальной скоростью, остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II}$ на интервале $[t_3, t_4]$, который находится из условия

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \tag{3.13}$$

Ранее было показано (см. (2.19)), что в области II

$$\int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Знак равенства в (3.14) имеет место на границе, разделяющей области II и III. Также как это было сделано для области I, можно показать, что в области II будут выполнены неравенства

$$t_{**} < t_3 + \Delta t_*^{II} < t_1 + 2\pi,$$

с учётом которых второе уравнение системы (3.10) можно переписать в виде

$$\int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = 0, \tag{3.15}$$

или в виде

$$\int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = -\int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t)dt - \int\limits_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt. \tag{3.16}$$

Оценим теперь знак правой части (3.16). С этой целью перепишем условие (3.13) в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0. \tag{3.17}$$

С учётом первого из уравнений (3.10), последнее равенство принимает вид

$$\int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0. \tag{3.18}$$

Заметим, теперь, что при любом t выполняется неравенство $f_2(t) > f_1(t)$, поэтому

$$\int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t)dt > \int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0. \tag{3.19}$$

Учитывая теперь очевидное неравенство

$$\int\limits_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt > \int\limits_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t)dt, \tag{3.20}$$

имеем

$$\int\limits_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_{**}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t)dt > 0. \tag{3.21}$$

В силу (3.16) и (3.21) приходим к следующему неравенству:

$$\int\limits_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt < 0. \tag{3.22}$$

Таким образом, для существования решения системы (3.10) необходимо выполнение неравенства (3.22), что невозможно в силу (3.14). Следовательно, в области II система (3.10) действительных решений не имеет и периодического режима движения без залипания не существует. На основании проведенного исследования можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для значений параметров вне подобласти* III *периодических решений уравнения* (1.4)*, описывающих движение корпуса без залипания, не существует.*

Отметим, что в области III неравенство (3.22) выполняется. Численный анализ системы уравнений (3.10) показал, что в области III она имеет действительное решение. Аналитически этот факт будет установлен ниже в разделе 6. Здесь же покажем единственность указанного решения.

Пусть система (3.10) имеет два различных решения, т. е. существуют две пары $t_*^{(1)}$, $t_{**}^{(1)}$ и $t_*^{(2)}$, $t_{**}^{(2)}$, удовлетворяющие равенствам

$$\int\limits_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0, \qquad \int\limits_{t_{**}^{(1)}}^{t_*^{(1)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = 0 \tag{3.23}$$

и

$$\int\limits_{t_*^{(2)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0, \qquad \int\limits_{t_{**}^{(2)}}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = 0. \tag{3.24}$$

Далее для определённости положим $t_*^{(2)} > t_*^{(1)}$. Тогда, очевидно, будет выполнено неравенство $t_{**}^{(1)} > t_{**}^{(2)}$, а из условий (3.23) и (3.24) имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t)dt + \int\limits_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0, \\ \int\limits_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt = 0. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$\int\limits_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t}[f_2(t) - f_1(t)]dt + \int\limits_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t)dt - \int\limits_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t)dt = 0. \tag{3.26}$$

После несложных преобразований последнее равенство можно представить в виде

$$2\int\limits_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} k(\mu + \cos t)dt + (e^{2\pi\alpha} - 1)\int\limits_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} f_2(t)dt + \int\limits_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t}[f_2(t) - f_1(t)]dt = 0. \tag{3.27}$$

Все слагаемые выражения (3.27) всегда неотрицательны. Причём одновременно обратиться в нуль они могут только при $t_*^{(1)} = t_*^{(2)}$ и $t_{**}^{(1)} = t_{**}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения системы уравнений (3.10).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Уравнение* (1.4) *может иметь периодическое решение, описывающее движение корпуса без залипания, только при значениях параметров из области* III. *Если такое решение существует, то оно единственно.*

Отметим ещё свойства монотонности решений уравнения (1.4) на интервале $[t_1; t_1{+}2\pi]$. Несложный анализ показывает, что правая часть уравнения (1.6) положительна на промежутке $(t_1; t_2)$ и отрицательна на промежутке $(t_2; t_1 + 2\pi)$, а правая часть уравнения (1.7) положительна на промежутках $[t_1; t_3)$, $(t_4; t_1{+}2\pi)$ и отрицательна на промежутке $(t_3; t_4)$. Поэтому справедливо следующее, важное для исследования общего характера движения корпуса, утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть функция* $u(t)$, *заданная на интервале* $[t_1; t_1 + 2\pi]$, *является решением уравнения* (1.4)*, тогда*:

1. *Если $u(t_1) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_1; t_2]$ до значения $u(t_2) \leqslant 0$, либо она возрастает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1; t_2]$, а затем принимает только положительные значения до конца указанного промежутка. Если же $u(t_1) > 0$, то функция $u(t)$ принимает положительные значения на всём промежутке $[t_1; t_2]$.*
2. *Если $u(t_2) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \geqslant 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.*
3. *Если $u(t_2) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \leqslant 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.*
4. *Если $u(t_3) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_3; t_4]$ до значения $u(t_4) \geqslant 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_3; t_4]$, а затем принимает только отрицательные значения до конца указанного промежутка. Если же $u(t_3) < 0$, то функция $u(t)$ принимает отрицательные значения на всём промежутке $[t_3; t_4]$.*
5. *Если $u(t_4) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \geqslant 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.*
6. *Если $u(t_4) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \leqslant 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.*

Замечание. Из леммы 3.4 следует, что решения уравнения (1.4) не меняют своего знака на промежутках $[t_2; t_3]$ и $[t_4; t_1 + 2\pi]$.

4. Анализ движения корпуса в области I

Полагая, что параметры k и μ принимают значения из области I, исследуем характер движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости. Обозначим через $u_0(t)$ решение уравнения (1.4) с начальным условием

$$u_0(t_1) = 0,$$

которому соответствует периодическое движение корпуса с залипанием как в верхней, так и в нижней зонах замедления.

Для получения качественных выводов о движении корпуса при ненулевой начальной скорости исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1.4) на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Определяющую роль здесь играют интегральные кривые, которым соответствует движение корпуса с остановкой на одной из границ верхней или нижней зоны замедления. В пространстве решений (t, u) уравнения (1.4) эти кривые являются границами областей, в которых решения имеют качественно различный характер.

Рассмотрим движение корпуса с остановкой в момент времени $t = t_2$. Решение уравнения (1.4), описывающее такое движение, будем обозначать через $u^{(2)}(t)$. При движении с положительной скоростью корпус на интервале времени от t_1 до t_2 сохраняет направление своего движения (лемма 3.4), поэтому остановка на указанном интервале возможна только при движении в отрицательном направлении. Таким образом, внутри промежутка $[t_1, t_2]$ функция $u^{(2)}(t)$ принимает только отрицательные значения и обращается в нуль на его правой границе. На промежутке $(t_2, t_3]$ функция $u^{(2)}(t)$ тождественно обращается в нуль, поэтому

$$u^{(2)}(t_3) = u_0(t_3) = 0.$$

Поскольку для уравнения (1.4) имеет место правосторонняя единственность решений, то при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство

$$u^{(2)}(t) \equiv u_0(t).$$

Учитывая, что

$$u^{(2)}(t_2) = 0,$$

нетрудно найти начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$:

$$u^{(2)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_2 - t_1)} G_2(t_2). \tag{4.1}$$

Используя свойство монотонности решений на интервале $[t_2, t_3]$ (лемма 3.4), можно показать, что остановка корпуса в момент времени t_3 возможна как при движении в положительном направлении, так и при движении в отрицательном направлении. В первом случае движение описывается решением $u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.4) с начальным условием

$$u_+^{(3)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_3 - t_1)} G_1(t_3), \tag{4.2}$$

а во втором случае — решением $u_-^{(3)}(t)$ с начальным условием

$$u_-^{(3)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3 - t_1)} G_2(t_3). \tag{4.3}$$

В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.4), на интервале $[t_1, t_3)$ выполняются очевидные неравенства

$$u_+^{(3)}(t) > u_0(t), \quad u_-^{(3)}(t) < u_2(t),$$

поэтому функция $u_+^{(3)}(t_1)$ положительна на всём указанном интервале, а функция $u_-^{(3)}(t_1)$ — отрицательна. При всех $t > t_3$ имеют место тождественные равенства

$$u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t), \quad u_-^{(3)}(t) \equiv u_0(t).$$

Обозначим через $u_3^-(t)$ и $u_3^+(t)$ решения уравнения (1.4), заданные начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$u_-^{(3)}(t_1) < u_3^-(t_1) < u^{(2)}(t_1), \quad u^{(2)}(t_1) < u_3^+(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$$

соответственно.

Поскольку

$$u_3^-(t_1) < 0,$$

то решение $u_3^-(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$, и принимает на его правой границе отрицательное значение. По лемме 3.4 это решение также возрастает и на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в нуль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы.

Начальное значение решения $u_3^+(t)$ может быть как положительным, так и отрицательным. Если

$$u_3^+(t_1) > 0,$$

то решение $u_3^+(t)$ положительно на всём промежутке $(t_1, t_2]$. Если же

$$u_3^+(t_1) < 0,$$

то решение $u_3^+(t)$ возрастает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1, t_2]$, а затем до конца этого промежутка принимает только положительные значения. По лемме 3.4 решение $u_3^+(t)$ убывает на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в нуль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы. В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.4), при всех $t > t_3$ выполняются тождественные равенства

$$u_3^-(t) \equiv u_0(t), \quad u_3^+(t) \equiv u_0(t).$$

В пространстве решений уравнения (1.4) интегральные кривые $u_-(t)$ лежат в области, ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$, а интегральные кривые $u_+(t)$ лежат в области, ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. При $t \geqslant t_3$ эти области вырождаются в кривую $u_0(t)$. Таким образом, если в момент времени $t = t_1$ скорость корпуса находится в диапазоне значений от $u_-^{(3)}(t_1)$ до $u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус останавливается в верхней зоне замедления $[t_2, t_3]$ и остается в покое до момента времени $t = t_3$, а затем начинает совершать периодическое движение, которое описывается решением $u_0(t)$, т. е. при $t > t_3$ корпус движется возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Пусть $u^{(4)}(t)$ — решение уравнения (1.4), описывающее движение корпуса с остановкой в момент времени t_4. Покажем, что

$$u^{(4)}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t < t_4,$$

т. е. остановка корпуса в момент времени $t = t_4$ возможна лишь при движении корпуса в положительном направлении. Действительно, рассуждая от противного, предположим сначала, что при некотором $t^* < t_3$ выполняется

$$u^{(4)}(t^*) < 0.$$

Тогда, если

$$u_-^{(3)}(t^*) < u^{(4)}(t^*) < 0,$$

то, как показано выше, при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство

$$u^{(4)}(t) \equiv u_0(t)$$

и, в частности,

$$u^{(4)}(t_4) \equiv u_0(t_4) < 0.$$

Если же

$$u^{(4)}(t^*) < u_-^{(3)}(t^*),$$

то при всех $t > t^*$ выполняется неравенство

$$u^{(4)}(t) \leqslant u_-^{(3)}(t),$$

а значит,

$$u^{(4)}(t_4) \leqslant u_-^{(3)}(t_4) = u_0(t_4) < 0.$$

В обоих случаях приходим к противоречию с условием

$$u^{(4)}(t_4) = 0.$$

Пусть теперь

$$t_3 < t^* < t_4 \quad \text{и} \quad u^{(4)}(t^*) < 0,$$

тогда, интегрируя уравнение (1.7) на интервале от t^* до t_4 с начальным условием

$$u(t_*) = u^{(4)}(t_*) < 0,$$

имеем

$$u^{(4)}(t_4) = e^{-\alpha t_4} \int\limits_{t^*}^{t_4} e^{\alpha t} f_2(t) dt + e^{-\alpha(t_4 - t^*)} u^{(4)}(t^*). \tag{4.4}$$

Функция $f_2(t)$ принимает на интервале (t_3, t_4) только отрицательные значения, поэтому правая часть выражения (4.4) отрицательна. Следовательно, и в этом случае приходим к противоречию с условием

$$u^{(4)}(t_4) = 0.$$

Таким образом,

$$u^{(4)}(t) > 0$$

на всём интервале t_1, t_4 и поэтому является решением уравнения (1.6) на указанном интервале. Несложные вычисления показывают, что это решение задаётся следующим начальным условием:

$$u^{(4)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_4 - t_1)} G_1(t_4). \tag{4.5}$$

Обозначим через $u_4^+(t)$ решения уравнения (1.4) с начальными значениями из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$. На интервале $[t_1, t_3]$ для этих решений выполнено неравенство

$$u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$$

и, в частности,

$$u_4^+(t_3) > 0.$$

Поэтому по лемме 3.4 решение $u_4^+(t)$ сначала убывает на интервале $[t_3, t_4]$, обращается в нуль в некоторой внутренней точке и сохраняет отрицательное значение до конца этого интервала, т. е.

$$u_4^+(t_4) < 0.$$

Следовательно, снова применяя лемму 3.4, приходим в заключению, что решения $u_4^+(t)$ возрастают при $t > t_4$ и, в силу неравенства

$$u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$$

с учётом непрерывности и правосторонней единственности, обращаются в нуль в некоторой внутренней точке интервала $(t_4, t_1 + 2\pi)$, а затем остаются тождественно равными нулю до момента времени $t_1 + 2\pi$. Таким образом, при $t > t_1 + 2\pi$ справедливо тождественное равенство

$$u_4^+(t) \equiv u_0(t).$$

Из сказанного выше следует, что, если в момент времени t_1 скорость корпуса имела значение из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$, то, двигаясь в положительном направлении, корпус остановится на интервале (t_3, t_4) и сразу начнёт движение в отрицательном направлении до остановки в нижней зоне замедления, после чего он будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$, т. е. выйдет на периодический режим движения.

Пусть $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ — решения уравнения (1.4), описывающие движение корпуса, при котором он, двигаясь в положительном и отрицательном направлениях соответственно, совершит остановку в момент времени $t_1 + 2\pi$. Как было показано ранее, решения $u_+^{(4)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ не меняют знака на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi]$, поэтому в силу очевидных неравенств

$$u_+^{(4)}(t_1) < u_+^{(1)}(t), \quad u_-^{(3)}(t) > u_-^{(1)}(t)$$

решения $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ также не меняют знака на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Таким образом, на всём интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ являются решениями уравнений (1.6) и (1.7) соответственно. Можно показать, что $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ определяются начальными условиями

$$u_+^{(1)}(t_1) = (1 - e^{2\pi\alpha})G_1(t_1), \tag{4.6}$$

$$u_-^{(1)}(t_1) = (1 - e^{2\pi\alpha})G_2(t_1). \tag{4.7}$$

Поскольку обе функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ обращаются в нуль в момент времени $t = t_1 + 2\pi$, то

$$u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_0(t_1 + 2\pi) = 0$$

и, следовательно, при всех $t > t_1 + 2\pi$ выполняются тождественные равенства

$$u_+^{(1)}(t) \equiv u_0(t), \quad u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t).$$

Обозначим через $u_1^+(t)$ и $u_1^-(t)$ решения с начальными условиями, удовлетворяющими $u^{(4)}(t_1) < u_1^+(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$ и $u_-^{(1)}(t_1) < u_1^-(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$. В силу правосторонней единственности решения уравнения (1.4) будут справедливы следующие неравенства:

$$u^{(4)}(t) \leqslant u_1^+(t) \leqslant u_+^{(1)}(t), \quad u_-^{(1)}(t) \leqslant u_1^-(t) \leqslant u_-^{(3)}(t).$$

Учитывая теперь, что при $t > t_1 + 2\pi$ выполняются равенства

$$u^{(4)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t) \equiv u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t),$$

приходим к тождественным равенствам

$$u_1^+(t) \equiv u_1^-(t) \equiv u_0(t),$$

которые также будут справедливы при $t > t_1 + 2\pi$.

Таким образом, если начальная скорость корпуса лежит в диапазоне от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_-^{(3)}(t_1)$ или от $u^{(4)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус, двигаясь в отрицательном или положительном направлениях соответственно, остановится в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до её правой границы, а затем начнёт совершать периодические возвратно-поступательные движения с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Объединяя результаты проведенного исследования, можно утверждать, что если начальная скорость принадлежит диапазону значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то в течение промежутка времени $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус выйдет на вышеуказанный периодический режим движения.

Остается рассмотреть случай движения корпуса, когда его начальная скорость лежит вне диапазона значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Пусть

$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1),$$

тогда в силу правосторонней единственности решения уравнения (1.4) функция $u(t)$ будет сохранять положительный знак на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi)$. В этом случае скорость корпуса за один оборот внутренней массы по окружности уменьшится на конечную величину. Действительно, интегрируя уравнение (1.6) на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$, имеем

$$u(t_1 + 2\pi) = e^{-2\pi\alpha}u(t_1) + (1 - e^{-2\pi\alpha})G_1(t_1). \tag{4.8}$$

Из (4.8) получаем следующую оценку изменения скорости корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$:

$$u(t_1 + 2\pi) - u(t_1) < u(t_1 + 2\pi) - e^{-2\pi\alpha}u(t_1) = (1 - e^{-2\pi\alpha})G_1(t_1) = -e^{-2\pi\alpha}u_+^{(1)}(t_1). \tag{4.9}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случая движения без остановок в отрицательном направлении. В частности, если

$$u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то имеет место следующая оценка изменения скорости корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$:

$$u(t_1 + 2\pi) - u(t_1) > u(t_1 + 2\pi) - e^{-2\pi\alpha}u(t_1) = (1 - e^{-2\pi\alpha})G_2(t_1) = -e^{-2\pi\alpha}u_-^{(1)}(t_1). \tag{4.10}$$

Таким образом, если в начальный момент $t = t_1$ скорость корпуса меньше $u_-^{(1)}(t_1)$ или больше $u_+^{(1)}(t_1)$, то за один оборот внутренней массы по окружности она уменьшится по модулю на конечную величину. Поэтому через конечное число оборотов значение скорости попадет в диапазон значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Следовательно, в течение конечного промежутка времени движение корпуса выйдет на периодический режим, который описывается решением $u_0(t)$.

На рис. 3 сверху представлено пространство решений уравнения (1.4), построенное на основе проведенного выше анализа и позволяющее получить полную качественную картину движения корпуса для значений параметров из области I. Часть пространства решений, ограниченная горизонтальными пунктирными прямыми линиями, показана в нижней части рис. 3 в увеличенном масштабе. Жирными линиями изображены интегральные кривые, разделяющие пространство решений на области, для которых движение корпуса име качественно различный характер. В частности, интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$ ограничивают область, соответствующую движению корпуса, при котором он на интервале времени $[t_1; t_1 + 2\pi]$ совершит остановку в зоне замедления и выйдет на периодический режим.

Суммируя результаты данного раздела, можно сделать следующий вывод. *Если параметры задачи принимают значения из области* I, *то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдёт в периодический режим, т. е. будет двигаться возвратно-поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.*

5. О качественном характере движения корпуса в области II

Анализ движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ для значений параметров из области II можно выполнить так же, как это было сделано в предыдущем разделе для значений параметров из области I. Не останавливаясь на деталях этого анализа, опишем его основные результаты. Здесь возможны два качественно различных случая:

$$u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1)$$

и

$$u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1).$$

Уравнение $u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1)$ разделяет область II на две подобласти IIa и IIb. При $\alpha = 0{,}25$ они изображены на рис. 4.

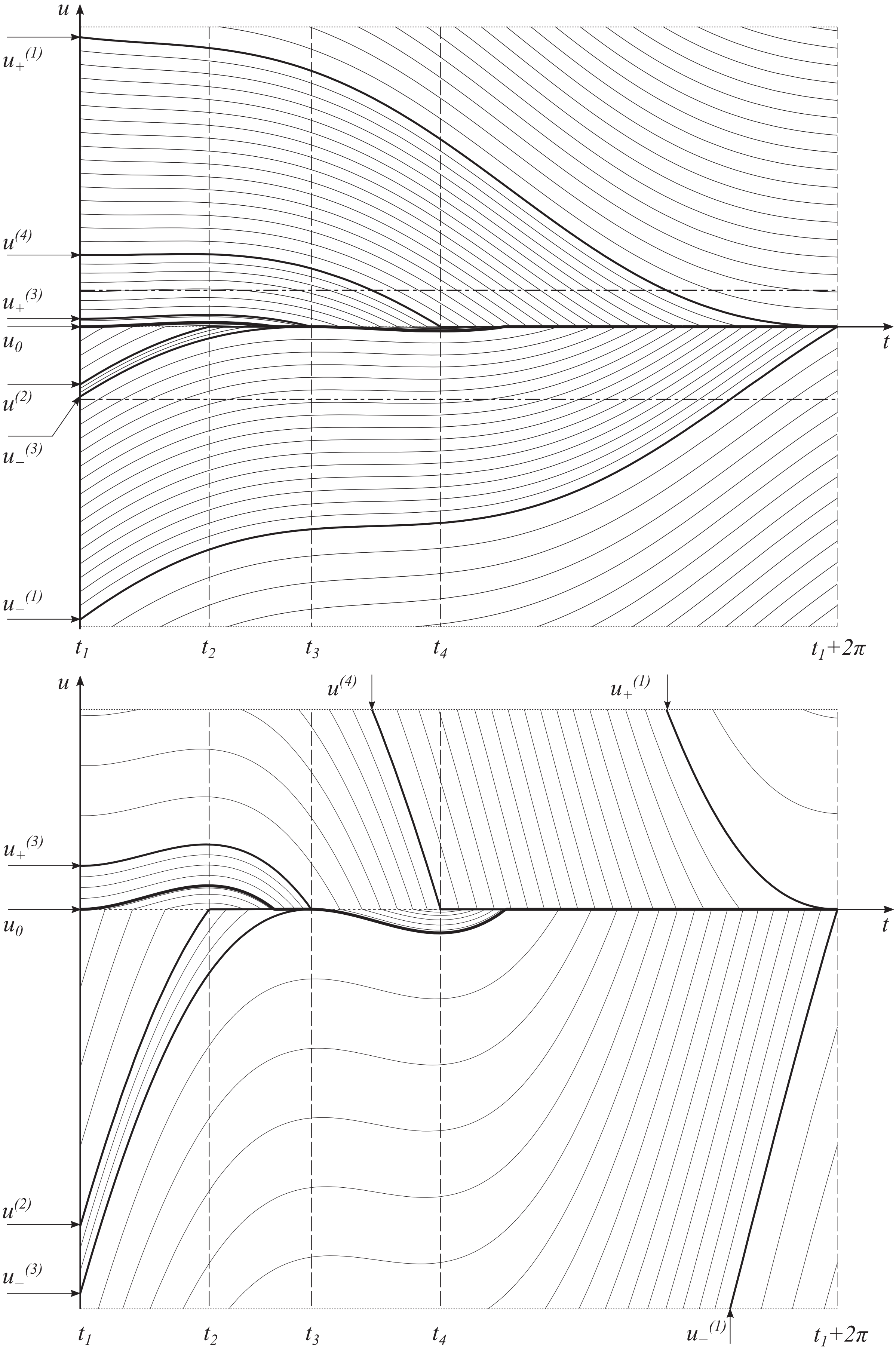

Рис. 3. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти I ($k = 0{,}7, \mu = 1{,}5, \alpha = 0{,}3$).

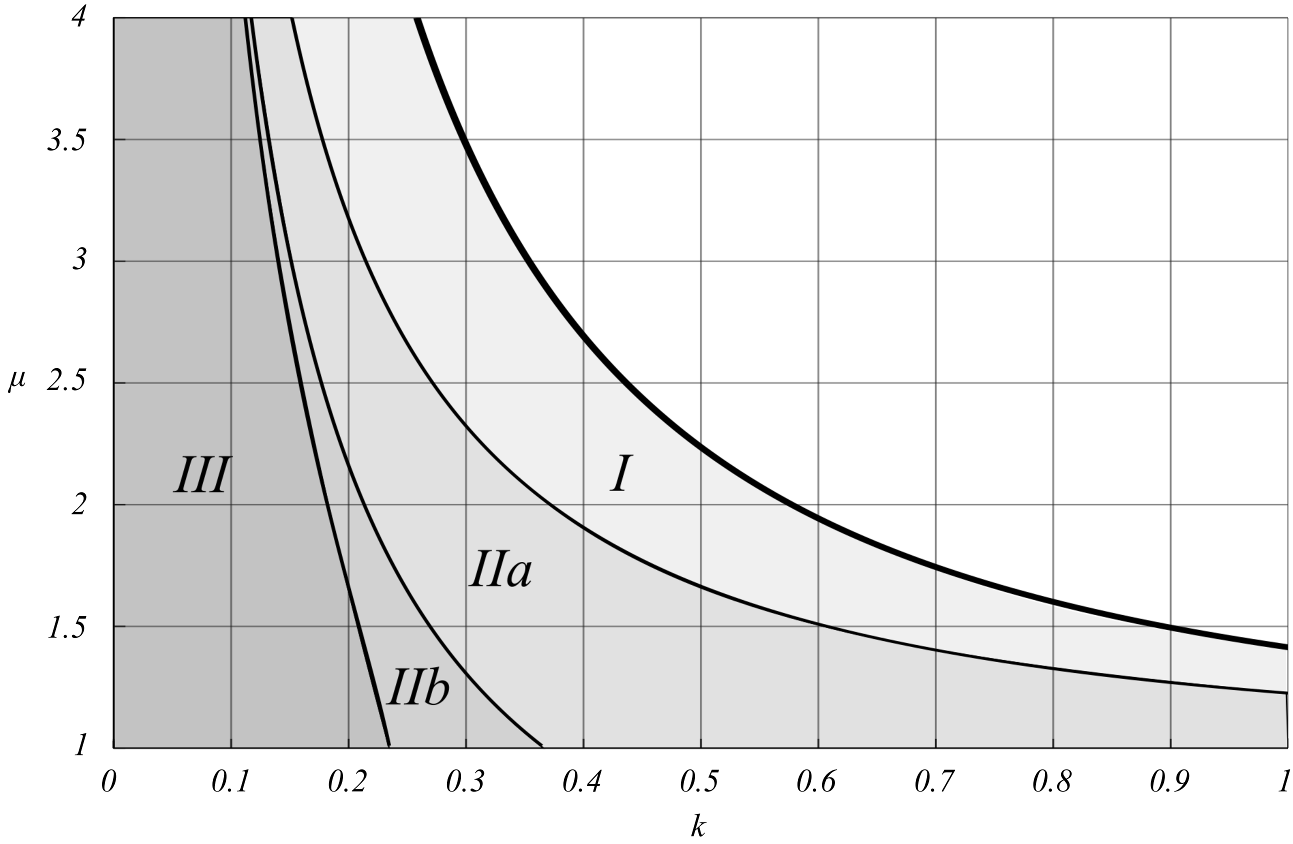

Рис. 4. Области возможных режимов движения.

Если выполняется неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1),$$

где величины $u_-^{(3)}(t_1)$, $u_-^{(1)}(t_1)$ вычисляются по формулам (4.3), (4.7), то, как и для значений параметров из области I, при начальной скорости $u(t_1) \notin [u_-^{(1)}(t_1), u_+^{(1)}(t_1)]$, корпус на всём интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится на конечную величину. Если же $u(t_1) \in [u_-^{(1)}(t_1), u_+^{(1)}(t_1)]$, то на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус совершит остановку в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до конца этого интервала, после чего начнёт двигаться 2π-периодически, останавливаясь и залипая только в нижней зоне замедления. На рис. 5 представлено пространство решений уравнения (1.4), которое даёт полную характеристику движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ в описанном выше случае.

Если выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

т. е. значения параметров принадлежат подобласти IIb, то решение $u_-^{(3)}(t)$ описывает движение корпуса в отрицательном направлении с остановкой в момент времени $t = t_3$ и без остановки в нижней зоне замедления. Поэтому при начальной скорости

$$u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$$

корпус на всём интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении без остановок, и за время движения его скорость по модулю уменьшится на конечную величину. В пространстве решений уравнения (1.4), представленном на рис. 6, такому движению соответствуют интегральные кривые, расположенные ниже кривой $u_-^{(3)}(t)$.

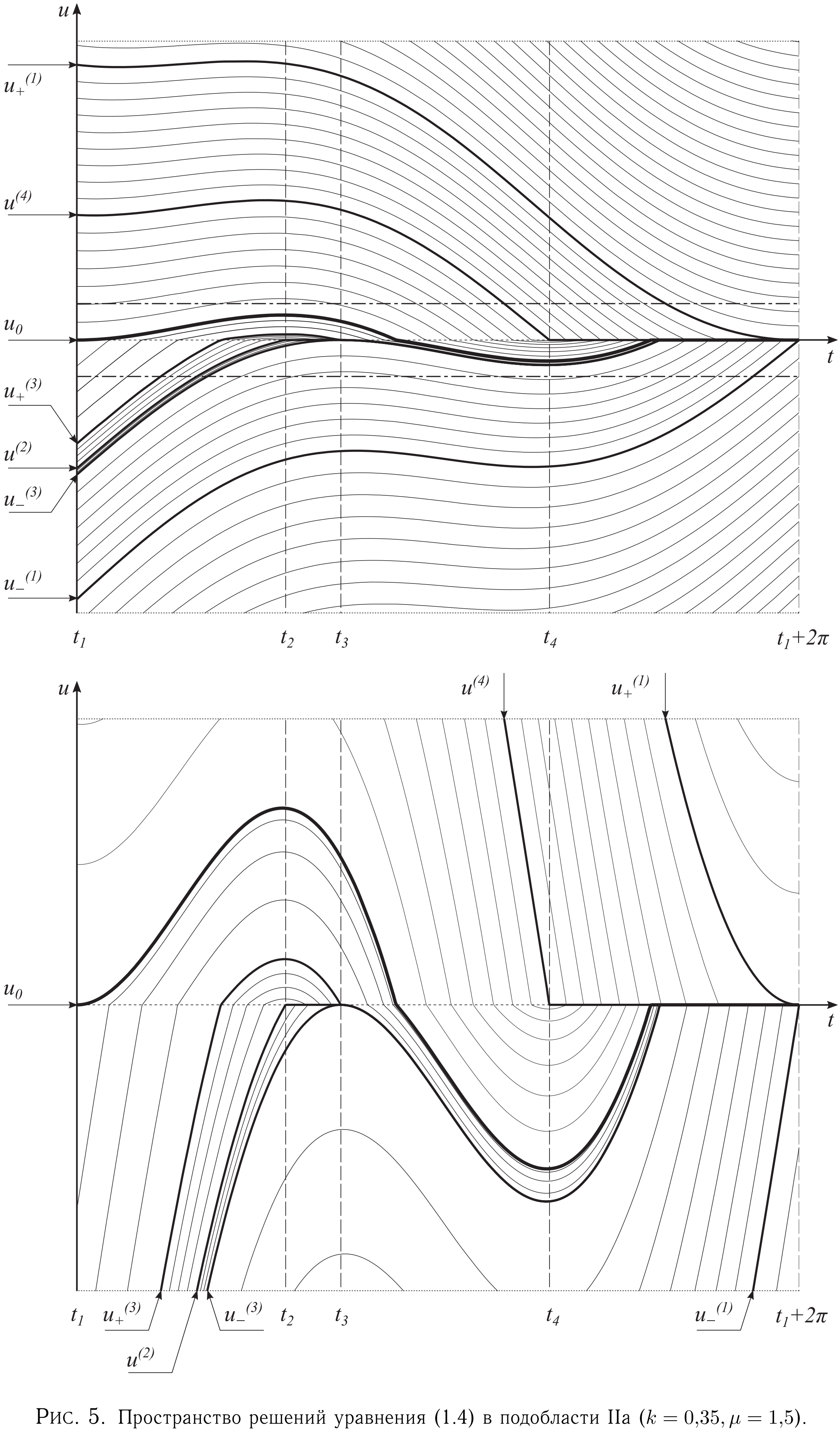

Рис. 5. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти IIa ($k = 0{,}35, \mu = 1{,}5$).

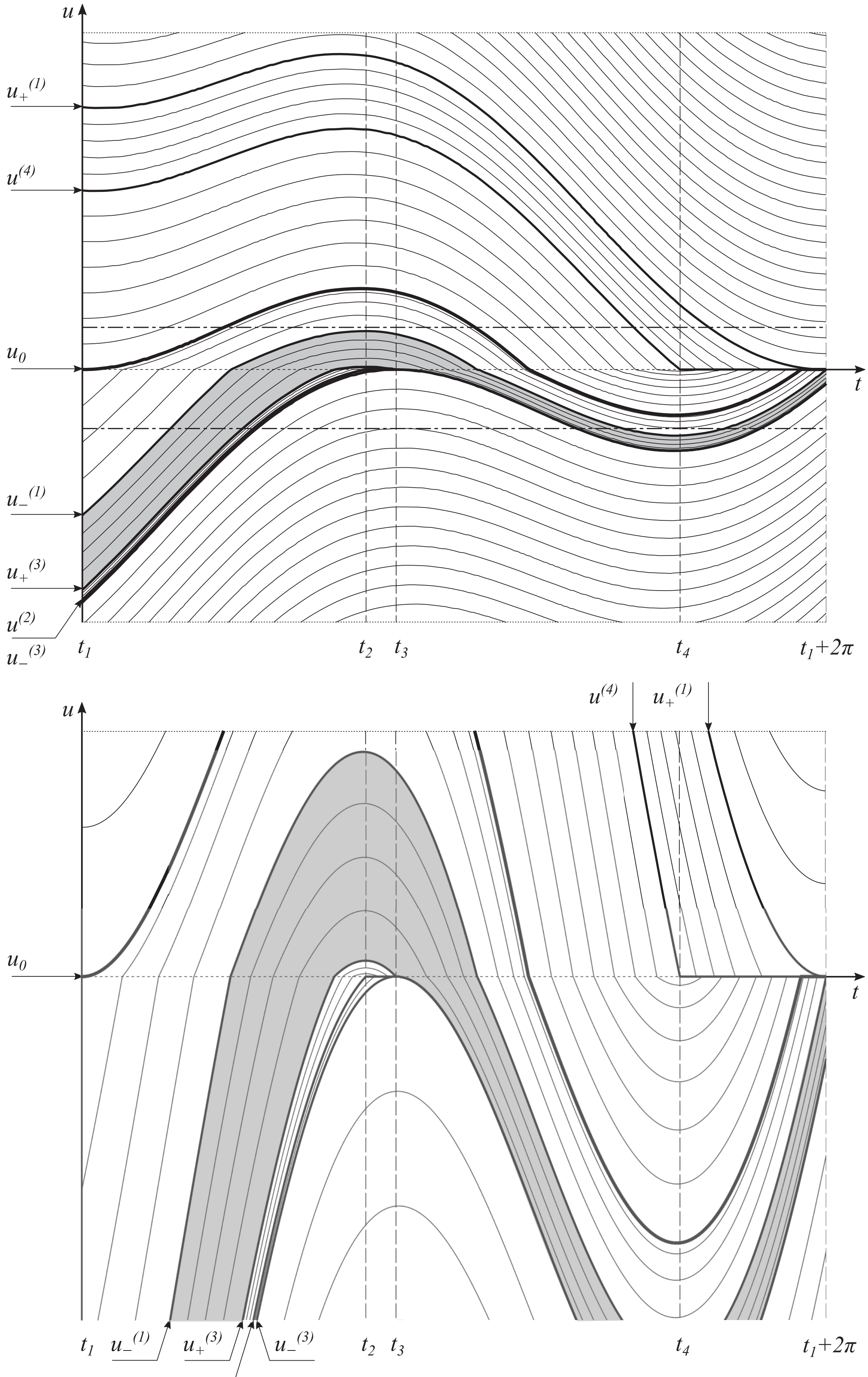

Рис. 6. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти IIb ($k = 0{,}225$, $\mu = 1{,}5$, $\alpha = 0{,}25$).

При
$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$$
корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, также без остановок, а его скорость уменьшится на конечную величину. Этому движению соответствует область пространства решений, расположенная выше интегральной кривой $u_+^{(1)}(t)$ (см. рис. 6).

Предположим теперь, что в начальный момент выполнено неравенство
$$u_-^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) \leqslant u_+^{(1)}(t_1).$$
Этому неравенству, в частности, удовлетворяет решение $u_-^{(1)}(t)$, которое на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ описывает движение корпуса с тремя остановками: в моменты времени $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$ на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$ соответственно, а также в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. После каждой остановки корпус начинает движение в противоположном направлении. Можно показать, что при значениях параметров из подобласти IIb решение $u_-^{(1)}(t)$ задаётся начальным условием
$$u_-^{(1)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(1)} - t_1)} G_2(t_*^{(1)}), \tag{5.1}$$
где величина $t_*^{(1)}$ определяется в результате решения системы уравнений
$$\begin{aligned} &e^{\alpha t_{**}^{(1)}} G_1(t_{**}^{(1)}) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_1(t_*^{(1)}) = 0, \\ &e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha t_{**}^{(1)}} G_2(t_{**}^{(1)}) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$
относительно $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$.

Отметим, что при $t > t_1 + 2\pi$ интегральная кривая $u_-^{(1)}(t)$ описывает периодическое движение с залипанием в нижней зоне замедления, т. е.
$$u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t),$$
где, как и ранее, через $u_0(t)$ обозначено периодическое решение уравнения (1.4), заданное начальным условием $u_0(t_1) = 0$.

Заметим ещё, что в отличие от области I в области II интегральная кривая $u_+^{(3)}(t)$ описывает движение с отрицательной начальной скоростью, которая определяется по формуле
$$u_+^{(3)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(3)} - t_1)} G_2(t_*^{(3)}), \tag{5.3}$$
где $t_*^{(3)} \in (t_1, t_2)$ — момент остановки и изменения направления движения корпуса. Величина $u_+^{(3)}(t_1)$ находится из уравнения
$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_*^{(3)}} G_1(t_*^{(3)}) = 0. \tag{5.4}$$

На основе анализа поведения интегральных кривых (см. рис. 6) можно сделать следующие выводы.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство
$$u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1),$$
то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнёт двигаться 2π-периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$; при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство
$$u_+^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$
то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановок в зонах замедления, и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 6

такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. Она выделена серым цветом.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u^{(2)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то корпус, двигаясь с отрицательной скоростью, остановится на интервале (t_1, t_2) и, изменив направление скорости, начнёт движение в положительном направлении до остановки в верхней зоне замедления, где он будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$. Затем он начнёт движение в отрицательном направлении. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_+^{(3)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$; при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают $(u^{(2)}(t) \equiv u_+^{(3)}(t))$ и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

4. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u^{(2)}(t_1),$$

то корпус, двигаясь с отрицательной скоростью, остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнёт движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$; при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают $(u^{(2)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t))$ и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

Докажем теперь, что для значений параметров из подобласти IIb независимо от величины начальной скорости корпус за конечное время выйдет на периодический режим движения, соответствующий интегральной кривой $u_0(t)$. Для этого достаточно показать, что если

$$u_+^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то через конечный промежуток времени корпус остановится в нижней зоне замедления.

Рассмотрим функцию, зависящую от k, μ и α:

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) - u_+^{(3)}(t_1) = \int\limits_{t_3}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t_1) dt - u_+^{(3)}(t_1). \tag{5.5}$$

На границе, разделяющей область II на подобласти IIa и IIb, выполнено равенство

$$u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1).$$

Нетрудно показать, что данное равенство можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$u_-^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0 \quad \text{или} \quad u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0.$$

Следовательно, если параметры k, μ и α лежат на границе, разделяющей подобласти IIa и IIb, то

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = -u_+^{(3)}(t_1) > 0, \tag{5.6}$$

т. е. функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ принимает только положительные значения. Покажем, что в самой подобласти IIb она не может принимать отрицательные значения. Действительно, $\Delta(k, \mu, \alpha)$ непрерывно зависит от своих аргументов k, μ и α, поэтому, если она в подобласти IIb при некоторых значениях параметров примет отрицательное значение, то в подобласти IIb должен существовать такой набор значений k_0, μ_0, α_0 при котором функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ обращается в нуль. Это означает, что в данном случае будет выполнено условие

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = u_+^{(3)}(t_1). \tag{5.7}$$

Условие (5.7) задаёт периодический режим движения без залипаний, но как было показано ранее, в области II такого режима движения не существует. Данное противоречие доказывает положительность функции $\Delta(k, \mu, \alpha)$ в подобласти IIb и, как следствие, выполнение неравенства

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) > u_+^{(3)}(t_1). \tag{5.8}$$

На основании леммы 3.1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$ образуют монотонную последовательность, а в силу последнего неравенства эта последовательность является неубывающей. Последовательность является ограниченной, а именно

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) \leqslant 0,$$

т.к. в противном случае

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) > u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

что невозможно в силу правосторонней единственности и непрерывности решений уравнения (1.4).

В силу монотонности и ограниченности последовательность $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ имеет предел. Покажем, что этот предел равен нулю. Действительно, если это не так, то существует предельный режим движения корпуса с 2π-периодически изменяющейся скоростью, при котором корпус не останавливается ни в нижней, ни в верхней зоне замедления, т. е. движется без залипания. Последнее противоречит лемме 3.2, на основании которой указанного режима движения корпуса в области II не существует, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) = 0.$$

Более того, начиная с некоторого $n = N$, все члены последовательности $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ обращаются в нуль, так как в противном случае существует предельный 2π-периодический режим движения с остановкой корпуса на правой границе нижней зоны замедления, что невозможно в силу существования периодического режима движения с остановкой внутри нижней зоны замедления. Следовательно,

$$u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$$

при $t > t_1 + 2\pi N$.

Если начальная скорость $u(t_1)$ удовлетворяет неравенству

$$u_-^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то при $t > t_3$ корпус будет двигаться со скоростью $u_+^{(3)}(t)$. Последнее означает, что в данном случае при $t > t_1 + 2\pi N$ корпус выйдет на режим движения с 2π-периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

Если же начальная скорость корпуса лежит в интервале значений

$$u_+^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то в силу правосторонней единственности и непрерывности решений уравнения (1.4) при $t > t_1$ будет выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t) \leqslant u(t) \leqslant u_-^{(1)}(t).$$

Поэтому

$$u(t) \equiv u_0(t)$$

при $t > t_1 + 2\pi N_*$, где N_* — некоторое натуральное число ($1 \leqslant N_* \leqslant N$). Следовательно, и в этом случае корпус за конечный промежуток времени выйдет на режим движения с 2π-периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

На основании результатов данного раздела приходим к следующему выводу. *Если параметры задачи принимают значения из области* II, *то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдёт в* 2π*-периодический режим, т. е. будет двигаться с* 2π*-периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении.*

6. Исследование движения корпуса в области III

Характер движения корпуса для значений параметров из области III можно исследовать так же, как это было сделано для областей I и II. В частности, при начальной скорости

$$u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$$

корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, и за время движения его скорость по модулю уменьшится на конечную величину, а при

$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$$

корпус на указанном интервале будет двигаться в положительном направлении, и его скорость также уменьшится на некоторую конечную величину. Если же начальная скорость корпуса лежит в диапазоне

$$u_-^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) \leqslant u_+^{(1)}(t_1),$$

то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ он будет совершать остановки, меняя направление движения на противоположное или залипая в зонах замедления. Рассмотрим этот случай более подробно.

На рис. 7 изображено пространство решений уравнения (1.4), построенное для значений параметров из области III. Как и в области II, определяющую роль здесь играют интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$, $u_+^{(3)}(t)$, $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 7 они выделены жирными линиями. Заметим только, что в отличие от области II, в области III интегральной кривой $u_-^{(1)}(t)$ соответствует движение корпуса с двумя остановками: в момент времени $t_*^{(1)}$ на промежутке $[t_3, t_4]$ и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. В области III эта интегральная кривая задаётся начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(1)} - t_1)} G_1(t_*^{(1)}), \tag{6.1}$$

где $t_*^{(1)}$ — корень уравнения

$$e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_2(t_*^{(1)}) = 0, \tag{6.2}$$

принадлежащий промежутку $[t_3, t_4]$. Начальные условия, определяющие интегральные кривые $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$ вычисляются по формулам (4.3) и (5.3) соответственно.

На основе анализа поведения интегральных кривых (1.4) можно сделать следующие выводы о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) \leqslant u_+^{(1)}(t_1),$$

то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$; при $t \geqslant t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$), и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

2. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) \leqslant u_-^{(1)}(t_1),$$

то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления, и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) \leqslant u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнёт движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$.

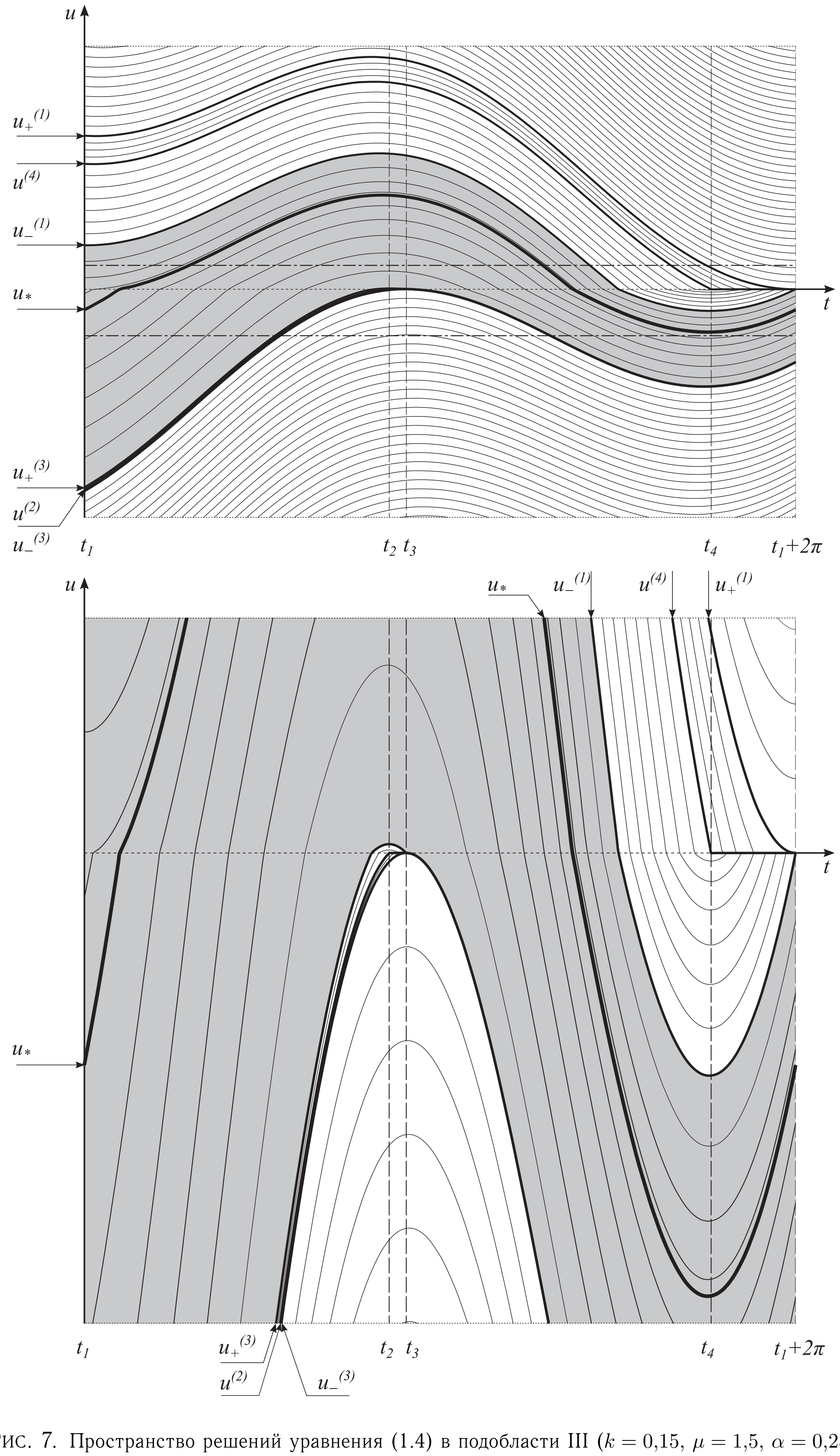

Рис. 7. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти III ($k = 0{,}15$, $\mu = 1{,}5$, $\alpha = 0{,}25$).

На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$; при $t \geqslant t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$), и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

Сформулированные выше утверждения позволяют сделать важные выводы о движении корпуса на бесконечном интервале времени. В частности, если в начальный момент времени

$$u(t_1) \geqslant u_-^{(1)}(t_1),$$

то при некотором натуральном n либо выполняется равенство

$$u(t_1 + 2\pi n) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

т. е. при $t \geqslant t_1 + 2\pi n$ движение корпуса будет описываться решением $u_-^{(1)}(t)$, либо выполняется неравенство

$$u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n).$$

Аналогично, если

$$u(t_1) \leqslant u_+^{(3)}(t_1),$$

то при некотором целом неотрицательном m, либо будет выполнено равенство

$$u(t_3 + 2\pi m) = u_+^{(3)}(t_3 + 2\pi m),$$

т. е. при $t \geqslant t_3 + 2\pi m$ движение корпуса будет описываться решением $u_+^{(3)}(t)$, либо будет выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n).$$

Таким образом, чтобы получить выводы о предельном характере движения корпуса, необходимо исследовать поведение решений уравнения (1.4), заданных начальными условиями из промежутка

$$u_+^{(3)}(t) \leqslant u(t_1 + 2\pi n) \leqslant u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

на неограниченном интервале времени. Исследуем сначала свойства монотонности решения $u_+^{(3)}(t)$. В частности, покажем, что выполняется неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi). \tag{6.3}$$

Решение $u_+^{(3)}(t)$ описывает движение, при котором корпус в некоторый момент времени $t_*^{(3)} > t_1$ начинает движение в положительном направлении и движется до остановки в момент времени t_3. Затем он сразу начинает движение в противоположном направлении. Покажем, что следующая остановка корпуса произойдёт в некоторый момент времени $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$. Поскольку на интервале времени $(t_*^{(3)}, t_3)$ функция $u_+^{(3)}(t)$ определяется в результате решения уравнения (1.6) с нулевым начальным условием, то условие остановки при $t = t_3$ имеет вид

$$\int\limits_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = 0. \tag{6.4}$$

Скорость движения корпуса в отрицательном направлении при $t > t_3$ определяется в результате решения уравнения (1.7) с нулевым начальным условием и имеет вид

$$u_+^{(3)}(t) = e^{-\alpha t} \int\limits_{t_3}^{t} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \tag{6.5}$$

Покажем, что интеграл в правой части (6.5), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$, больше нуля. С этой целью воспользуемся тождеством (2.21), которое перепишем в виде

$$f_1(t + \tau) = -f_2(t_3 + \tau). \tag{6.6}$$

Используя соотношение (6.6) и учитывая, что $t_3 = 2\pi - t_2$, нетрудно показать справедливость следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3} e^{\alpha(\tau+t_3)} f_2(t_3+\tau)d\tau = \\ = -e^{\alpha t_3} \int\limits_{0}^{t_*^{(3)}+t_2} e^{\alpha\tau} f_1(t_1+\tau)\tau = -e^{\alpha(t_3-t_1)} \int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha t} f_1(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Заметим теперь, что в силу (2.4) имеют место неравенства

$$t_*^{(3)} + t_1 + t_2 > \pi + t_*^{(3)} > t_3. \tag{6.8}$$

Поэтому интеграл в выражении (6.7) можно представить в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha t} f_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau, \tag{6.9}$$

а учитывая (6.4), его можно переписать как

$$\int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha t} f_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau. \tag{6.10}$$

Поскольку имеют место неравенства

$$t_3 < t_1 + \pi < t_*^{(3)} + \pi < t_*^{(3)} + t_2 + t_1, \tag{6.11}$$

то второе слагаемое (6.10) можно представить в виде

$$\int\limits_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau. \tag{6.12}$$

Учитывая теперь, что

$$\int\limits_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha(\pi+\tau)} f_1(\pi+\tau)d\tau,$$

и подставляя (6.12) в (6.10), имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \int\limits_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau)d\tau + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau}[(e^{\alpha\pi}-1) f_1(\tau+\pi) + (f_1(\tau+\pi) + f_1(\tau))]d\tau.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Заметим теперь, что функция $f_1(t)$ на интервалах $[t_3, t_1+\pi]$ и $[t_*^{(3)}+\pi, t_*^{(3)}+t_2+t_1]$ отрицательна, поэтому первые два слагаемых в (6.13) меньше нуля. Кроме того заметим, что функция $f_1(\tau+\pi)$ отрицательна при $\tau \in (t_1, t_*^{(3)})$ и имеет место равенство

$$f_1(\tau+\pi) + f_1(\tau) = -2k\mu,$$

поэтому третье слагаемое в (6.13) также отрицательно. Следовательно, интеграл в левой части (6.13) строго меньше нуля. Последнее означает, что интеграл в правой части (6.5), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$, больше нуля. Из этого следует, что решение $u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.4) обращается в нуль внутри интервала $(t_3, t_*^{(3)} + 2\pi)$, т. е. $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$.

Интегрируя уравнение (1.4) на интервалах $[t_1 + 2\pi, t_{**}^{(3)}]$ и $[t_1, t_*^{(3)}]$ и учитывая, что

$$u_+^{(3)}(t_{**}^{(3)}) = 0, \quad u_+^{(3)}(t_*^{(3)}) = 0,$$

получаем

$$\begin{gathered} u_+^{(3)}(t_1) = -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int\limits_{t_1+2\pi}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau, \\ u_+^{(3)}(t_1+2\pi) = -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int\limits_{t_1+2\pi}^{t_{**}^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \end{gathered} \tag{6.14}$$

Сравнивая последние два выражения, приходим к неравенству

$$u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi).$$

Поэтому на основании леммы 3.1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно возрастающую последовательность. Аналогично можно показать, что в области III значения $u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно убывающую последовательность.

Поскольку

$$u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n) > u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n),$$

то последовательность значений $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена сверху, а последовательность $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена снизу. Следовательно каждая из указанных последовательностей должна иметь предел. Это означает, что решение $u_+^{(3)}(t)$ асимптотически приближается к некоторому периодическому режиму. Тот же вывод можно сделать и о решении $u_-^{(1)}(t)$. В силу единственности периодического режима движения (см. лемму 3.3) указанные последовательности имеют один и тот же предел, соответствующий периодическому движению корпуса без залипаний в верхней и нижней зонах замедления.

Поскольку решения $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ в пространстве решений ограничивают область интегральных кривых, заданных начальным условием из интервала

$$u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1 + 2\pi) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

то все интегральные кривые из этой области асимптотически приближаются к интегральной кривой, отвечающей периодическому режиму движения.

На основании результатов данного раздела приходим к следующему выводу. *В подобласти* III *существует периодический режим движения без остановок в зонах замедления трением, и при произвольной начальной скорости движение корпуса будет асимптотически приближаться к этому периодическому режиму.*

7. Выводы

Пространство параметров задачи k, μ, α разделяется на три области I, II и III, в каждой из которых существует единственный режим движения с 2π-периодически меняющейся скоростью. В указанных областях периодическое движение имеет качественно различный характер.

В области I корпус, двигаясь с 2π-периодически меняющейся скоростью, на интервале времени 2π дважды совершает остановку, после которой остается в покое в течении конечного промежутка времени (залипает), а затем продолжает движение в противоположном направлении. При этом периодически меняется как скорость корпуса, так и его координата, так, что за период времени 2π корпус совершает нулевое перемещение. Интервалы покоя корпуса имеют место при прохождении внутренней массой так называемых (верхней и нижней) зон замедления, в которых горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, не превосходит силы трения скольжения, приложенной к корпусу. Независимо от величины начальной скорости корпуса, его движение за конечный промежуток времени перейдёт в указанный периодический режим.

В области II корпус, двигаясь с 2π-периодически меняющейся скоростью, не останавливается при прохождения внутренней массой верхней зоны замедления, поэтому за период времени 2π залипание корпуса происходит только один раз, когда внутренняя масса находится в нижней зоне замедления. В этом случае координата корпуса уже не является периодической функцией времени, а корпус за время полного оборота внутренней массы по окружности совершает перемещение в положительном направлении. Как и в области I, независимо от величины начальной скорости корпуса, его движение за конечный промежуток времени перейдёт в указанный периодический режим.

В области III движение корпуса с 2π-периодически меняющейся скоростью характеризуется тем, что он совершает остановки вне зон замедления. После каждой остановки корпус не залипает, а сразу же начинает движение в противоположную сторону, совершая за время полного оборота внутренней массы по окружности перемещение в положительном направлении. Указанное периодическое движение имеет характер предельного режима, к которому движение корпуса асимптотически приближается независимо от величины его начальной скорости.

Благодарности. Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116). Авторы благодарят за помощь в подготовке иллюстративного материала А. А. Рачкова, инженера кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бардин Б. С.* О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы// В сб.: «Труды XVIII Межд. симп. "Динамика виброударных сильно нелинейных систем" (DYVIS-2015)». — 2015. — С. 42–49.
2. *Бардин Б. С., Панёв А. С.* О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности// Тр. МАИ. — 2015. — *84*.
3. *Бильченко Г. Г.* Влияние подвижного груза на движение носителя// В сб.: «Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Межд. Четаевской конференции». — 2017. — С. 37–44.
4. *Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф.* Динамика управляемых движений вибрационных систем// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2006. — № 5. — С. 157–167.
5. *Болотник Н. Н., Нунупаров А. М., Чащухин В. Г.* Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2016. — № 6. — С. 146–160.
6. *Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю.* Оптимальное управление прямолинейным движением твёрдого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс// Прикл. мат. мех. — 2008. — *72*, № 2. — С. 216–229.
7. *Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы// Прикл. мат. мех. — 2012. — *71*, № 1. — С. 3–22.
8. *Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2010. — *16*, № 5. — С. 213–222.
9. *Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф.* Моделирование плоского управляемого движения трёхмассовой вибрационной системы// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2012. — № 6. — С. 122–141.
10. *Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф.* Изучение закономерностей движения прыгающего робота при различных положениях точки закрепления ноги// Нелин. динамика. — 2013. — *9*, № 2. — С. 327–342.
11. *Голицына М. В.* Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению// Прикл. мат. мех. — 2018. — *82*, № 1. — С. 3–15.
12. *Голицына М. В., Самсонов В. А.* Оценка области допустимых параметров системы управления вибрационным роботом// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2018. — № 2. — С. 85–101.
13. *Иванов А. П.* Основы теории систем с трением. — Ижевск: Ижевский ин-т комп. иссл., 2011.
14. *Иванов А. П., Сахаров А. В.* Динамика твёрдого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости// Нелин. динамика. — 2012. — *8*, № 4. — С. 763–772.
15. *Панёв А. С.* О движении твёрдого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде// Тр. МАИ. — 2018. — *98*.

16. *Соболев Н. А., Сорокин К. С.* Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2007. — № 5. — С. 161–170.
17. *Сорокин К. С.* Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счёт движения внутренних осциллирующих масс// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2009. — № 6. — С. 150–158.
18. *Черноусько Ф. Л.* О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу// Докл. РАН. — 2005. — *405*, № 1. — С. 56–60.
19. *Фигурина Т. Ю.* Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2007. — № 2. — С. 65–71.
20. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью// Мат. сб. — 1960. — *51*, № 1. — С. 99–128.
21. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
22. *Черноусько Ф. Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы// Прикл. мат. мех. — 2006. — *70*, № 6. — С. 915–941.
23. *Черноусько Ф. Л.* Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 4. — С. 406–410.
24. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы// Докл. РАН. — 2018. — *480*, № 5. — С. 528–532.
25. *Яцун С. Ф., Безмен П. А., Сапронов К. А., Рублев С. Б.* Динамика мобильного вибрационного робота с внутренней подвижной массой// Изв. Курск. гос. техн. ун-та. — 2010. — *31*, № 2. — С. 21–31.
26. *Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю.* Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением// Спецтехн. и связь. — 2012. — № 3. — С. 25–29.
27. *Яцун С. Ф., Лупехина И. В., Сапронов К. А.* Моделирование движения прыгающего вибрационного микроробота// Изв. Курск. гос. техн. ун-та. — 2009. — *27*, № 2. — С. 25–31.
28. *Яцун С. Ф., Мищенко В. Я., Сафаров Д. И.* Исследование движения двухмассового вибрационного робота// Изв. вузов. Сер. Машин. — 2006. — № 5. — С. 32–42.
29. *Яцун С. Ф., Разинькова А. В., Гранкин А. Н.* Исследование движения виброробота с электромагнитным приводом// Изв. вузов. Сер. Машин. — 2007. — № 5. — С. 53–64.
30. *Bardin B., Panev A.* On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle// Vibroeng. Procedia. — 2016. — *8*. — С. 135–141.
31. *Bardin B. S., Panev A. S.* On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 030002.
32. *Bardin B. S., Panev A. S.* On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane// Russ. J. Nonlin. Dyn. — 2018. — *14*, № 4. — С. 519–542.
33. *Fang H., Xu J.* Stick-slip effect in a vibration-driven system with dry friction: Sliding bifurcations and optimization// J. Appl. Mech. — 2014. — *81*, № 5. — 061001.
34. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators// J. Dyn. Syst. Meas. Control. Trans. ASME. — 2006. — *128*, № 1. — С. 122–133.
35. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Analysis and experiments on the force capabilities of centripetal-force-actuated microrobotic platforms// IEEE Trans. Robot. — 2008. — *24*. — С. 588–599.
36. *Vartholomeos P., Papadopoulos E., Vlachos K.* Analysis and motion control of a centrifugal-force microrobotic platform// IEEE Trans. Automat. Sci. Eng. — 2013. — *10*. — С. 545–553.
37. *Vlachos K., Papadimitriou D., Papadopoulos E.* Vibration-driven microrobot positioning methodologies for nonholonomic constraint compensation// Engineering. — 2015. — *1*. — С. 66–72.
38. *Wang Q. M., Zhang W. M., Ju J. C.* Kinematics and dynamics analysis of a micro-robotic platform driven by inertial-force propulsion// Appl. Mech. Mater. — 2015. — *733*. — С. 531–534.
39. *Xiong Z., Jian X.* Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration controlled internal masses// Adv. Mech. Eng. — 2015. — *7*. — С. 1–12.

Б. С. Бардин
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4;
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
101990, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4
E-mail: bsbardin@yandex.ru

А. С. Панёв
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: a.s.panev@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592 UDC 531.384

On Translational Rectilinear Motion of a Solid Body Carrying a Movable Inner Mass

2019 **B. S. Bardin, A. S. Panev**

Abstract. We consider the motion of the mechanical system consisting of the case (a solid body) and the inner mass (a material point). The inner mass circulates inside the case on a circle centered at the center of mass of the case. We suppose that absolute value of the velocity of circular motion of the inner mass is constant. The case moves translationally and rectilinearly on a flat horizontal surface with forces of viscous friction and dry Coulomb friction on it. The inner mass moves in vertical plane.

We perform the full qualitative investigation of the dynamics of this system. We prove that there always exist a unique motion of the case with periodic velocity. We study all possible types of such a periodic motion. We establish that for any initial velocity, the case either reaches the periodic mode of motion in a finite time or asymptotically approaches to it depending on the parameters of the problem.

REFERENCES

1. B. S. Bardin, "O bezudarnykh pryzhkakh tela, nesushchego podvizhnye massy" [On shock-free jumps of the body carrying movable masses], In: *Tr. XVIII Mezhd. simp. "Dinamika vibroudarnykh sil'no nelineynykh sistem" (DYVIS-2015)* [Proc. XVIII Int. Symp. "Dynamics of Vibroimpact Strongly Nonlinear Systems" (DYVIS-2015)], 2015, pp. 42–49 (in Russian).
2. B. S. Bardin and A. S. Panev, "O periodicheskikh dvizheniyakh tela s podvizhnoy vnutrenney massoy po gorizontal'noy poverkhnosti" [On periodic motions of a body with movable inner mass on horizontal surface], *Tr. MAI* [Proc. Moscow Aviation Inst.], 2015, **84** (in Russian).
3. G. G. Bil'chenko, "Vliyanie podvizhnogo gruza na dvizhenie nositelya" [Influence of a movable load on the motion of the carrier], In: *Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravlenie. Tr. XI Mezhd. Chetaevskoy konferentsii* [Analytical Mechanics, Stability, and Control. Proc. XI Int. Chetaev Conf.], 2017, pp. 37–44 (in Russian).
4. N. N. Bolotnik, I. M. Zeydis, K. Tsimmermann, and S. F. Yatsun, "Dinamika upravlyaemykh dvizheniy vibratsionnykh sistem" [Dynamics of controllable motions of vibrational systems], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2006, No. 5, 157–167 (in Russian).
5. N. N. Bolotnik, A. M. Nunuparov, and V. G. Chashchukhin, "Kapsul'nyy vibratsionnyy robot s elektromagnitnym privodom i vozvratnoy pruzhinoy: dinamika i upravlenie dvizheniem" [Capsular vibrational robot with electromagnetic gear and return spring: dynamics and motion control], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2016, No. 6, 146–160 (in Russian).
6. N. N. Bolotnik and T. Yu. Figurina, "Optimal'noe upravlenie pryamolineynym dvizheniem tverdogo tela po sherokhovatoy ploskosti posredstvom peremeshcheniya dvukh vnutrennikh mass" [Optimal control of rectilinear motion of a solid body on rugged surface by means of transition of two inner masses], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2008, **72**, No. 2, 216–229 (in Russian).
7. N. N. Bolotnik, T. Yu. Figurina, and F. L. Chernous'ko, "Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyaemogo posredstvom podvizhnoy vnutrenney massy" [Analysis and optimization of motion of the body controlled by a movable inner mass], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2012, **71**, No. 1, 3–22 (in Russian).
8. N. N. Bolotnik and F. L. Chernous'ko, "Mobil'nye roboty, upravlyaemye dvizheniem vnutrennikh tel" [Mobile robots controlled by movement of inner bodies], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2010, **16**, No. 5, 213–222 (in Russian).
9. L. Yu. Volkova and S. F. Yatsun, "Modelirovanie ploskogo upravlyaemogo dvizheniya trekhmassovoy vibratsionnoy sistemy" [Modelling of flat controllable motion of three-mass vibrational system], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2012, No. 6, 122–141 (in Russian).

Peoples' Friendship University of Russia, 2019

10. L. Yu. Volkova and S. F. Yatsun, “Izuchenie zakonomernostey dvizheniya prygayushchego robota pri razlichnykh polozheniyakh tochki zakrepleniya nogi” [Study of regularities of motion of the jumping robot for different positions of mounting point of the leg], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2013, **9**, No. 2, 327–342 (in Russian).
11. M. V. Golitsyna, “Periodicheskiy rezhim dvizheniya vibratsionnogo robota pri ogranichenii po upravleniyu” [Periodical mode of motion of the vibrational robot under constrains of control], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2018, **82**, No. 1, 3–15 (in Russian).
12. M. V. Golitsyna and V. A. Samsonov, “Otsenka oblasti dopustimykh parametrov sistemy upravleniya vibratsionnym robotom” [Estimate of area of admissible parameters for the control system of the vibrational robot], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2018, No. 2, 85–101 (in Russian).
13. A. P. Ivanov, *Osnovy teorii sistem s treniem* [Essentials of the Theory of Systems with Friction], Izhevskiy in-t komp. issl., Izhevsk, 2011 (in Russian).
14. A. P. Ivanov and A. V. Sakharov, “Dinamika tverdogo tela s podvizhnymi vnutrennimi massami i rotorom na sherokhovatoy ploskosti” [Dynamics of the solid body with movable inner masses and the rotor on a rugged surface], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2012, **8**, No. 4, 763–772 (in Russian).
15. A. S. Panev, “O dvizhenii tverdogo tela s podvizhnoy vnutrenney massoy po gorizontal’noy poverkhnosti v vyazkoy srede” [On the motion of the solid body with movable inner mass on horizontal surface in a viscous media], *Tr. MAI* [Proc. Moscow Aviation Inst.], 2018, **98**, (in Russian).
16. N. A. Sobolev and K. S. Sorokin, “Eksperimental’noe issledovanie modeli vibrorobota s vrashchayushchimisya massami” [Experimental study of the model of vibrorobot with rotating masses], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2007, No. 5, 161–170 (in Russian).
17. K. S. Sorokin, “Peremeshchenie mekhanizma po naklonnoy sherokhovatoy ploskosti za schet dvizheniya vnutrennikh ostsilliruyushchikh mass” [Motion of a mechanism on an inclined rugged plane by means of inner oscillating masses], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2009, No. 6, 150–158 (in Russian).
18. F. L. Chernous’ko, “O dvizhenii tela, soderzhashchego podvizhnuyu vnutrennyuyu massu” [On the motion of body containing movable inner mass], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **405**, No. 1, 56–60 (in Russian).
19. T. Yu. Figurina, “Optimal’noe upravlenie dvizheniem sistemy dvukh tel po pryamoy” [Optimal motion control for the system of two bodies on an axis], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2007, No. 2, 65–71 (in Russian).
20. A. F. Filippov, “Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu” [Differential equations with discontinuous right-hand side], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1960, **51**, No. 1, 99–128 (in Russian).
21. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
22. F. L. Chernous’ko, “Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyaemogo posredstvom podvizhnoy vnutrenney massy” [Analysis and optimization of the motion of the body controlled by the movable inner mass], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2006, **70**, No. 6, 915–941 (in Russian).
23. F. L. Chernous’ko, “Dvizhenie tela po ploskosti pod vliyaniem podvizhnykh vnutrennikh mass” [Motion of a body on a plane by means of movable inner masses], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **470**, No. 4, 406–410 (in Russian).
24. F. L. Chernous’ko, “Optimal’noe upravlenie dvizheniem dvukhmassovoy sistemy” [Optimal motion control for a two-masses system], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2018, **480**, No. 5, 528–532 (in Russian).
25. S. F. Yatsun, P. A. Bezmen, K. A. Sapronov, and S. B. Rublev, “Dinamika mobil’nogo vibratsionnogo robota s vnutrenney podvizhnoy massoy” [Dynamics of the mobile vibrational robot with inner movable mass], *Izv. Kursk. gos. tekhn. un-ta* [Bull. Kursk State Tech. Univ.], 2010, **31**, No. 2, 21–31 (in Russian).
26. S. F. Yatsun and L. Yu. Volkova, “Modelirovanie dinamicheskikh rezhimov vibratsionnogo robota, peremeshchayushchegosya po poverkhnosti s vyazkim soprotivleniem” [Modelling of dynamical regimes of the vibrational robot moving on a surface with viscous friction], *Spetstekhn. i svyaz’* [Spec. Tech. Comm.], 2012, No. 3, 25–29 (in Russian).
27. S. F. Yatsun, I. V. Lupekhina, and K. A. Sapronov, “Modelirovanie dvizheniya prygayushchego vibratsionnogo mikrorobota” [Modelling of the motion of the jumping vibrational micro-robot], *Izv. Kursk. gos. tekhn. un-ta* [Bull. Kursk State Tech. Univ.], 2009, **27**, No. 2, 25–31 (in Russian).
28. S. F. Yatsun, V. Ya. Mishchenko, and D. I. Safarov, “Issledovanie dvizheniya dvukhmassovogo vibratsionnogo robota” [Investigation of the motion of two-masses vibrational robot], *Izv. vuzov. Ser. Mashin.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2006, No. 5, 32–42 (in Russian).

29. S. F. Yatsun, A. V. Razin'kova, and A. N. Grankin, "Issledovanie dvizheniya vibrorobota s elektromagnitnym privodom" [Investigation of the motion of the vibrorobot with electromagnetic gear], *Izv. vuzov. Ser. Mashin.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2007, No. 5, 53–64 (in Russian).
30. B. Bardin and A. Panev, "On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle," *Vibroeng. Procedia*, 2016, **8**, 135–141.
31. B. S. Bardin and A. S. Panev, "On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane," *AIP Conf. Proc.*, 2018, **1959**, 030002.
32. B. S. Bardin and A. S. Panev, "On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane," *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, **14**, No. 4, 519–542.
33. H. Fang and J. Xu, "Stick-slip effect in a vibration-driven system with dry friction: Sliding bifurcations and optimization," *J. Appl. Mech.*, 2014, **81**, No. 5, 061001.
34. P. Vartholomeos and E. Papadopoulos, "Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators," *J. Dyn. Syst. Meas. Control. Trans. ASME*, 2006, **128**, No. 1, 122–133.
35. P. Vartholomeos and E. Papadopoulos, "Analysis and experiments on the force capabilities of centripetal-force-actuated microrobotic platforms," *IEEE Trans. Robot.*, 2008, **24**, 588–599.
36. P. Vartholomeos, E. Papadopoulos, and K. Vlachos, "Analysis and motion control of a centrifugal-force microrobotic platform," *IEEE Trans. Automat. Sci. Eng.*, 2013, **10**, 545–553.
37. K. Vlachos, D. Papadimitriou, and E. Papadopoulos, "Vibration-driven microrobot positioning methodologies for nonholonomic constraint compensation," *Engineering*, 2015, **1**, 66–72.
38. Q. M. Wang, W. M. Zhang, and J. C. Ju, "Kinematics and dynamics analysis of a micro-robotic platform driven by inertial-force propulsion," *Appl. Mech. Mater.*, 2015, **733**, 531–534.
39. Z. Xiong and X. Jian, "Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration controlled internal masses," *Adv. Mech. Eng.*, 2015, **7**, 1–12.

B. S. Bardin
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: bsbardin@yandex.ru

A. S. Panev
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: a.s.panev@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 593–604

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-593-604 УДК 517.43

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2019 г. **В. И. БЕЗЯЕВ**

Аннотация. В работе находится асимптотика проинтегрированной плотности состояний с оценкой остаточного члена для гипоэллиптических систем с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами. Применяется метод приближенного спектрального проектора для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для линейных эллиптических дифференциальных операторов $P(x, D)$ с п.-п. коэффициентами в работе [10] было доказано существование предела

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{|\Omega|}, \tag{1.1}$$

где $N_\Omega(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи Дирихле для этого оператора на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ — мера Лебега области Ω. Функция $N(\lambda)$, совпадающая при заданном λ с пределом (1.1), естественным образом интерпретируется как проинтегрированная плотность состояний — функция распределения данного оператора.

С другой стороны, в [10] с помощью теории алгебр фон Неймана (см., напр., [12]) доказано, что проинтегрированную плотность состояний $N(\lambda)$ самосопряженного п.-п. оператора можно интерпретировать так же, как обычную функцию распределения дискретного спектра, но с использованием обобщенной размерности и обобщенного следа. Для этого используется $*$-представление C^*-алгебры п.-п. псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), введенное в работе [11]. При этом, если $P(x, D)$ — формально самосопряженный п.-п. оператор, то

$$N(\lambda) = SpE_\lambda,$$

где E_λ — спектральный проектор оператора $P^\#$, построенного с помощью указанного выше $*$-представления в некоторую алгебру $\mathcal{A}$, Sp — относительная размерность (след) фон Неймана на подалгебре алгебры $\mathcal{A}$. Доказано также, что множество точек роста этой функции совпадает с непрерывным спектром исходного оператора $P(x, D)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что позволяет, в частности, оценивать лакуны по асимптотике $N(\lambda)$.

Дифференциальные операторы с п.-п. коэффициентами можно использовать для моделирования квантово-механического движения электронов в средах с определенными отклонениями от периодичности, в частности, в некоторых жидкостях и сплавах. Кроме того, вопросы спектральной

©Российский университет дружбы народов, 2019

теории таких операторов возникают в ряде задач механики, например, при рассмотрении линеаризованных систем с условно периодическими движениями.

Асимптотика плотности состояний с оценкой остаточного члена скалярных гипоэллиптических п.-п. дифференциальных операторов (д.о.) была дана в работе [1], в которой был использован метод приближенного спектрального проектора. Этот метод впервые появился в работе [4], а затем интенсивно развивался для операторов с дискретным спектром (см. обзоры в [2, 3], а также [13]). Необходимо еще отметить, что методы, использовавшиеся для исследования асимптотики плотности состояний эллиптических п.-п. операторов (тауберовы теоремы, метод гиперболического уравнения), существенно опираются на специфику эллиптических операторов и на гипоэллиптический случай не переносятся.

Применение метода приближенного спектрального проектора для матричных дифференциальных операторов и п.д.о. содержит большие трудности, которые, тем не менее, успешно были преодолены в ряде задач с дискретным спектром [2].

В данной работе метод приближенного спектрального проектора проводится для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр.

2. Основные результаты

Пусть $P(x,D)$ — квадратная матрица порядка N скалярных линейных дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x,\xi)$ — ее матричный символ. Тогда оператор P можно представить в виде

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int p(x,\xi) d\xi \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \dots, v_N) : v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots, N\},$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Здесь и дальше символ $\int$ означает интеграл по всему пространству.

Если разложить символ $p(x,\xi)$ в ряд Тейлора в точке $\left(\dfrac{x+y}{2}, \xi\right)$ и проинтегрировать по частям по ξ в предыдущей формуле, то получим формулу

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int d\xi \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \hat{p}\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где функция

$$\hat{p}(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{(-2i)^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)$$

называется *символом Вейля* оператора $P = Op\Big(\hat{p}\Big(\dfrac{x+y}{2}, \xi\Big)\Big)$. Последняя сумма конечна, так как $p(x,\xi)$ — многочлен по ξ.

Важным свойством символа Вейля, отличающим его от обычного символа, является простота перехода к сопряженному оператору. Если оператор P имеет символ Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, то оператор P^*, формально сопряженный к P в $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$, задается матричным символом Вейля $\hat{p}^*(x,\xi)$ — матрицей, получаемой из $\hat{p}(x,\xi)$ транспонированием матрицы, элементы которой комплексно сопряжены к элементам $\hat{p}(x,\xi)$. Напомним, что формально сопряженный оператор P^* к оператору P определяется формулой

$$(Pu, v) = (u, P^*v), \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \dots, v_N) : v_j \in L_2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots, N\}.$$

В частности, если символ $\hat{p}(x,\xi)$ — эрмитова матрица, то соответствующий оператор $P = Op\Big(\hat{p}\Big(\dfrac{x+y}{2}, \xi\Big)\Big)$ является формально самосопряженным.

Будем предполагать далее, что P — матричный дифференциальный оператор с $N\times N$-матричным символом Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, элементы матрицы $\hat{p}(x,\xi)$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ и являются п.-п. функциями по x, $\hat{p}(x,\xi)$ — эрмитова матрица при всех $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$.

Напомним определение почти-периодической функции.

Определение 2.1. Непрерывная функция $h(x)$ на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{C}$ называется *почти-периодической по Бору*, или *равномерно почти-периодической*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, что каждый его сдвиг $x + K$ содержит ϵ-почти-период функции h, т. е. такой вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$, что

$$\sup_x |h(x+\tau) - h(x)| < \epsilon.$$

Эквивалентное определение состоит в том, что семейство всех сдвинутых функций $\{h(\cdot+\tau) : \tau \in \mathbb{R}^n\}$ должно быть предкомпактно в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{R}^n$.

Для определения гипоэллиптичности символа Вейля и соответствующего оператора введем (следуя [7, с. 466]) понятие умеренной нормы на $\mathbb{C}^N$, параметризованной точками пространства $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$.

Определение 2.2. Норма $\|\cdot\|_{x,\xi}$ на $\mathbb{C}^N$, определенная для каждой точки $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, называется *умеренной*, если существуют такие положительные постоянные C и M, что

$$C^{-1}(1+|\xi|)^{-M}\|z\| \leqslant \|z\|_{x,\xi} \leqslant C(1+|\xi|)^M\|z\|, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi,\ z \in \mathbb{C}^N,$$

где

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2\right)^{1/2}.$$

Определение 2.3. *П.-п. гипоэллиптическим матричным символом* будем называть $N\times N$ матричную функцию $p(x,\xi)$, элементы которой принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ и являются п.-п. функциями по x, если для нее выполнены условия гипоэллиптичности на $\mathbb{R}^n$ (ср. [7, с. 466]):

1. $\|z\|'_{x,\xi} \leqslant C_0\|p(x,\xi)z\|''_{x,\xi},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R,\ z \in \mathbb{C}^N$;
2. $\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)z\|''_{x,\xi} \leqslant C_{\alpha\beta}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\|z\|'_{x,\xi},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R,\ z \in \mathbb{C}^N$,

где $\|\cdot\|'_{x,\xi}$, $\|\cdot\|''_{x,\xi}$ — две умеренные нормы на $\mathbb{C}^N$, параметризованные точками $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, α, β — любые мультииндексы, $C_0, C_{\alpha\beta}, R$ — некоторые положительные постоянные, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$.

Поясним смысл условий 1 и 2 в определении 2.3 при $N = 1$. В этом случае

$$\|z\|'_{x,\xi} = \widetilde{M}(x,\xi)\|z\|''_{x,\xi}$$

и сформулированные условия принимают вид

$$\widetilde{M}(x,\xi) \leqslant C|p(x,\xi)|, \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\widetilde{M}(x,\xi)(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R.$$

Поэтому функция $\widetilde{M}(x,\xi)$ эквивалентна $|p(x,\xi)|$ при большом $|\xi|$ и

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}|p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R.$$

Это неравенство вместе с полиномиальными оценками на p и $1/p$ при большом $|\xi|$ эквивалентно гипоэллиптичности в определении 2.3.

Пусть P — дифференциальный оператор с п.-п. гипоэллиптическим символом Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, принимающим значение в $L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ (комплексные матрицы $N \times N$), и пусть $\hat{p}(x,\xi)$ — положительно определенная эрмитова матрица при всех $(x,\xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$.

Обозначим через $\lambda_i(x,\xi)$ $(i = 1, \ldots, N)$ собственные числа матрицы $\hat{p}(x,\xi)$, где

$$\lambda_1(x,\xi) \leqslant \lambda_2(x,\xi) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N(x,\xi)$$

при фиксированных $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. Из непрерывной зависимости собственных чисел от элементов матрицы следует п.-п. по x и непрерывность по $\xi \in \mathbb{R}^n$ функций $\lambda_i(x,\xi)$, а из теоремы Коши о вычетах непосредственно получаем, что функции $\lambda_i(x,\xi)$ являются C^∞-гладкими по (x,ξ) во всех точках, кроме тех, где

$$\lambda_i(x,\xi) = \lambda_k(x,\xi),\ i \neq k\ (i,k = 1, \ldots, N).$$

Положим

$$V_i(\lambda) = (2\pi)^{-n} M_x \int\limits_{\lambda_i(x,\xi)<\lambda} d\xi, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{2.1}$$

где M_x — среднее значение п.-п. функции,

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\lambda), \tag{2.2}$$

$$W(\lambda, \tau) = V(\lambda + \tau) - V(\lambda - \tau). \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что функция $V(\lambda)$ конечна для любого λ. Для этого достаточно наложить на собственное значение $\lambda_1(x,\xi)$ матрицы $\hat{p}(x,\xi)$ условие

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \inf_x \lambda_1(x,\xi) = +\infty.$$

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях на оператор P для любого $\nu \in (0, (\rho - \delta)(3M)^{-1})$ существует такая постоянная C, что*

$$N(\lambda) = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\nu})) + O(W(\lambda, C\lambda^{1-\nu})) \text{ при } \lambda \to +\infty, \tag{2.4}$$

где $M = M' + M''$, а M' и M'' — постоянные в определении умеренных норм $\|z\|'_{x,\xi}$ и $\|z\|''_{x,\xi}$, а функции $V(\lambda)$ и $W(\lambda,\tau)$ определены формулами (2.2) *и* (2.3).

Обозначим через $S^m_{\rho,\delta}$, где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, множество $N \times N$ матричных функций с элементами из $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$, удовлетворяющих условиям

$$\|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi) z\| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\|z\|, \;\; (x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_\xi, \;\; z \in \mathbb{C}^N.$$

Теорема 2.2. *Если $\hat{p}(x,\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и, кроме того, $\hat{p}(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, то формула* (2.4) *верна для любого $\nu \in (0, (\rho - \delta)(3m)^{-1})$.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и пусть, кроме того, функция $V(\lambda)$ при больших λ непрерывно дифференцируема и*

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa-1}) \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

где $\varkappa \in [0, \nu)$. Тогда

$$N(\lambda) = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{\varkappa-\nu})) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{2.5}$$

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *и пусть при некотором $\varkappa \in [0, \nu)$ имеет место асимптотическая формула* (2.5). *Предположим еще, что функция $V(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при больших λ и*

$$V(\lambda)/V'(\lambda) = O(\lambda^{1-\mu}) \text{ при } \lambda \to +\infty, \tag{2.6}$$

где $\mu \in [0, \varkappa]$.

Тогда существует такая положительная постоянная K, что если интервал (a, b) не содержит спектра оператора P, то

$$|b - a| \leqslant K a^{1-\nu-\mu+\varkappa}. \tag{2.7}$$

Отметим здесь, что явную оценку остатка в асимптотике функции $N(\lambda)$ (типа формулы (2.5) с $\varkappa = 0$) и оценку длины лакуны вида (2.7) с $\mu = 0$ легко получить непосредственно из формулы (2.3) в случае, когда собственные числа $\lambda_j(x,\xi)$ $(j = 1, \dots, N)$ являются квазиэллиптическими многочленами по ξ. Под квазиэллиптическим здесь понимается многочлен вида

$$\sum_{\alpha\cdot\mu\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

где

$$\alpha \cdot \mu = \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n,$$

α — мультииндекс, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — фиксированный для данного многочлена набор натуральных чисел,

$$\sum_{\alpha\cdot\mu=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqslant \varepsilon > 0$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|_\mu = 1$. Здесь

$$|\xi|_\mu = \sum_{j=1}^{n} |\xi|^{\frac{1}{\mu_j}}.$$

Доказательство этого факта непосредственно следует из асимптотических формул для $V_j(\lambda)$, $j = 1, \ldots, N$, аналогичных соответствующей формуле в скалярном случае (см. [1]).

3. Псевдодифференциальные операторы с ограниченными символами

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ матричные п.д.о. с равномерными по x оценками символов. Класс соответствующих символов — это множество $S^m_{\rho,\delta}$, где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, определенное перед теоремой 2.2. Техника использования скалярных п.д.о. с равномерными по x оценками символов была разработана в [14] (см. также [1]). Перенос этой техники на матричный случай не представляет трудностей.

По символу Вейля $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ п.д.о. $P = Op\Big(p\Big(\dfrac{x+y}{2},\xi\Big)\Big)$ определяется по формуле

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, p(\frac{x+y}{2},\xi)\, u(y)\, dyd\xi, \tag{3.1}$$

где $u(y) \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C}^N)$,

$$C^\infty_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) : |\partial^\alpha v(x)| \leqslant C_\alpha \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^n\},$$

а интеграл понимается как осциллирующий [6].

Напомним, что один из способов регуляризации осциллирующих интегралов вида (3.1), не являющихся в общем случае абсолютно сходящимися, состоит в следующем. Пусть $\chi(x,y,\xi) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{3n})$, $\chi(0,0,0) = 1$ — гладкая срезающая функция. Тогда формула

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon\to+0} \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \chi(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon\xi)\, p(\frac{x+y}{2},\xi)\, u(y)\, dyd\xi \tag{3.2}$$

задает непрерывный линейный оператор

$$P : C^\infty_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

не зависящий от выбора срезающей функции $\chi(x,y,\xi)$. Кроме того, формула (3.2) корректно определяет линейный непрерывный оператор

$$P : H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$$

для любого $s \in \mathbb{R}$, где

$$H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \ldots, v_N) : v_j \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ — стандартное пространство Соболева в $\mathbb{R}^n$.

Класс операторов P вида (3.1) с символами Вейля $p \in S^m_{\rho,\delta}$ обозначается через $L^m_{\rho,\delta}$. Для этих классов имеется стандартное исчисление п.д.о. В частности, можно брать композиции любых двух операторов из

$$L^\infty_{\rho,\delta} = \bigcup_m L^m_{\rho,\delta}.$$

При этом в $L^\infty_{\rho,\delta}$ выполняются теоремы о композиции и о сопряженном операторе (доказательства для скалярного случая приведены, например, в [1]).

4. Функция $N(\lambda)$ для неограниченных операторов в алгебрах фон Неймана

Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, являющаяся фактором типа I_∞ или II_∞. Предположим, что на $\mathcal{A}$ фиксирован некоторый точный нормальный полуконечный след, обозначаемый Sp (см., например, [8, 12]). Пусть, далее, $A = A^*$ и оператор A присоединен к фактору $\mathcal{A}$, т. е. $E_\lambda \in \mathcal{A}$ для любого спектрального проектора E_λ оператора A. В этом случае спектр A называется дискретным относительно фактора $\mathcal{A}$, если $SpE_\lambda < +\infty$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

В описанной ситуации определена и конечна неубывающая функция

$$N(\lambda) = SpE_\lambda \ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

множество точек роста которой совпадает со спектром оператора A.

Следующая теорема (см. [1]), являющаяся обобщением на факторы схемы, приведенной в [5], позволяет находить асимптотику функции $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Обозначим через $S_1(\mathcal{A})$ двусторонний идеал в факторе $\mathcal{A}$, состоящий из всех таких операторов $B \in \mathcal{A}$, что $Sp|B| < +\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа I_∞ или II_∞. Пусть $A = A^*$, оператор A присоединен к $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_\lambda$ $(\lambda \geqslant 1)$ — такое семейство операторов из $\mathcal{A}$, что выполнены следующие условия:*

1. $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda^*$, $\ Sp\,|\mathcal{E}_\lambda| < +\infty$, $\ \operatorname{Im}\mathcal{E}_\lambda \subset D_A$;
2. $(-1/2)I \leqslant \mathcal{E}_\lambda \leqslant (3/2)I$ *при* $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$, *где* I — *единичный оператор*;
3. $Sp\,\mathcal{E}_\lambda = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\nu})) + O(W(\lambda, C_1\lambda^{1-\nu}))$ *при* $\lambda \to +\infty$, *где* $\mathcal{E}_{1\lambda} = \mathcal{E}_\lambda^2(3I - 2\mathcal{E}_\lambda)$, $V(\lambda)$ — *некоторая положительная неубывающая функция,* $W(t,\tau) = V(t+\tau) - V(t-\tau)$, $C_1 > 0$, $0 < \nu < 1$;
4. $Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(I - \mathcal{E}_{1\lambda})] = O(V(\lambda)\lambda^{-\nu}) + O(W(\lambda, C_2\lambda^{1-\nu}))$ *при* $\lambda \to +\infty$, $C_2 > 0$;
5. $\mathcal{E}_{1\lambda}(A - \lambda I)\mathcal{E}_\lambda \leqslant C_3\lambda^{1-\nu}I$, $C_3 > 0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$;
6. $(I - \mathcal{E}_{1\lambda})(A - \lambda I)(I - \mathcal{E}_{1\lambda}) \geqslant -C_4\lambda^{1-\nu}I$, $C_4 > 0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Тогда спектр оператора A дискретен относительно фактора $\mathcal{A}$ и

$$N(\lambda) = V(\lambda) + O(W(\lambda, C_3\lambda^{1-\nu})) \ \text{при} \ \lambda \to +\infty,$$

где $W(\lambda,\tau) = V(\lambda+\tau) - V(\lambda-\tau)$.

Для полноты изложения приведем доказательство этой леммы, основанное на вариационном принципе Глазмана. Доказательство основывается на двух леммах. Первая лемма является обобщением леммы Глазмана и доказана в работе [9].

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа I_∞ или II_∞, $A = A^*$ и оператор A присоединен к $\mathcal{A}$. Тогда*

$$N(\lambda) = \sup_{\substack{E \in Proj(\mathcal{A}),\\ E(\mathcal{H}) \subset D_A,\\ E(A-\lambda)E \leqslant 0}} SpE.$$

Будем обозначать через $\chi_{<a,b>}(x)$ характеристическую функцию промежутка $< a, b >$ на вещественной оси.

Лемма 4.2. *Положим* $\tilde{N}(\lambda) = Sp\,\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})$. *Тогда*

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Доказательство. Оценим сначала $\tilde{N}(\lambda)$ снизу. Имеем

$$\tilde{N}(\lambda) = Sp\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}) = Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] + Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \geqslant Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}]$$

при $\lambda \geqslant \lambda_0$, так как (в силу условия 2)) $0 \leqslant \mathcal{E}_{1\lambda} \leqslant 1$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$. С другой стороны при $\lambda \geqslant \lambda_0$ имеем

$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp\,\mathcal{E}_{1\lambda} - Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{2\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}],$$

$$Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] \leqslant 2Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] =$$
$$= 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] - 2Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Отсюда при $\lambda \geqslant \lambda_0$ получаем

$$\tilde{N}(\lambda) \geqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] =$$
$$= V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})) = V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})).$$

Теперь оценим $\tilde{N}(\lambda)$ сверху. Имеем

$$\tilde{N}(\lambda) = Sp\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}) = Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] + Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Далее, при $\lambda \geqslant \lambda_0$ получаем

$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] \leqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda};$$
$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant$$
$$\leqslant Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] -$$
$$-2Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{N}(\lambda) \leqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})),$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 4.1. Оценим $N(\lambda)$ снизу. Пусть $L_\lambda = \chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})$. Тогда $L_\lambda \in Proj(\mathcal{A})$ и при $\lambda \to +\infty$

$$SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})).$$

Из условия 5 получаем

$$L_\lambda\mathcal{E}_{1\lambda}(A-\lambda)\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda \leqslant C_1\lambda^{1-\nu}L_\lambda^2 \leqslant 4C_1\lambda^{1-\nu}L_\lambda\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda,$$

или

$$L_\lambda\mathcal{E}_{1\lambda}(A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda \leqslant 0.$$

Так как

$$\operatorname{Im}(\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda) = \operatorname{Im}L_\lambda,$$

то

$$((A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})u,u) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad u \in \operatorname{Im}L_\lambda,$$

то есть

$$L_\lambda(A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})L_\lambda \leqslant 0.$$

По лемме 4.1 при $\lambda \to +\infty$ имеем

$$N(\lambda+4C_1\lambda^{1-\nu}) \geqslant SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})),$$

следовательно,

$$N(\lambda) \geqslant V(\lambda - C_3'\lambda^{1-\nu}) + O(V(\lambda + C_3'\lambda^{1-\nu})) - V(\lambda - C_3'\lambda^{1-\nu}) \geqslant$$
$$\geqslant V(\lambda) + O(W(\lambda, C_3'\lambda^{1-\nu})).$$

Оценим теперь $N(\lambda)$ сверху. Пусть

$$M_\lambda = I - L_\lambda = I - \chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}).$$

Тогда

$$M_\lambda(I-\mathcal{E}_{1\lambda})^2M_\lambda \geqslant 1/4M_\lambda^2.$$

Из условия 6 вытекает, что

$$(1-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda(A_\lambda)(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda + C_2\lambda^{1-\nu}M_\lambda^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda(A_\lambda)(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda + 4C_2\lambda^{I-\nu}(I-\mathcal{E}_{1\lambda})^2M_\lambda.$$

Так как

$$\operatorname{Im}[(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda] = \operatorname{Im}M_\lambda,$$

то

$$M_\lambda(A-\lambda+4C_2\lambda^{I-\nu})M_\lambda \geqslant 0.$$

Положим

$$\tau = \lambda - 4C_2\lambda^{I-\nu},$$

и пусть E_τ — спектральный проектор оператора A. Тогда $E_\tau\mathcal{H} \cap M_\lambda\mathcal{H} = 0$, так как

$$E_\tau(A-\tau)E_\tau \leqslant 0.$$

Таким образом, $B = L_\lambda E_\tau$ мономорфно отображает $E_\tau\mathcal{H}$ в $L_\lambda\mathcal{H}$, а значит,

$$N(\tau) = SpE_\tau \leqslant SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})) \leqslant V(\tau) + O(W(\tau, C_3''\tau^{1-\nu})) \text{ при } \tau \to +\infty.$$

□

5. Представление алгебры п.-п. п.д.о.

Обозначим через $CAP(\mathbb{R}^n)$ множество всех п.-п. по Бору функций на $\mathbb{R}^n$. Поскольку любая п.-п. функция $h(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^n$, то множество $CAP(\mathbb{R}^n)$ является коммутативной банаховой алгеброй с обычными операциями сложения и умножения функций и нормой

$$||h||_\infty = \sup_x |h(x)|.$$

В пространстве $CAP(\mathbb{R}^n)$ плотным является множество $Trig(\mathbb{R}^n)$ всех тригонометрических многочленов, т. е. конечных сумм вида

$$h(x) = \sum_\xi h_\xi e^{i\xi\cdot x}.$$

Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $CAP(\mathbb{R}^n)$ называется *компактом Бора* и обозначается $\mathbb{R}^n_B$. Имеется естественное непрерывное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n_B$, при котором $\mathbb{R}^n$ становится плотным подмножеством в $\mathbb{R}^n_B$. Сложение в $\mathbb{R}^n$ продолжается по непрерывности до операции, превращающей $\mathbb{R}^n_B$ в компактную топологическую группу. Среднее значение п.-п. функции h определяется формулой

$$M\{h\} = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^n} \int\limits_{|x_j|<\frac{R}{2}} h(x)dx.$$

При этом предел существует для любой функции $h \in CAP(\mathbb{R}^n)$. Среднее значение функции $h \in CAP(\mathbb{R}^n)$ можно также записать в виде

$$M\{h\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_B} \hat{h}\, d\mu_n,$$

где $d\mu_n$ — мера Хаара на $\mathbb{R}^n$ (нормированная так, что мера всей группы $\mathbb{R}^n_B$ равна 1), а $\hat{h}$ — продолжение функции h с $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_B$ по непрерывности.

Пусть, далее, $B^2(\mathbb{R}^n)$ — несепарабельное гильбертово пространство Безиковича, т. е. пополнение всех тригонометрических полиномов на $\mathbb{R}^n$ по норме, определяемой скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = M_x[\varphi(x)\overline{\psi(x)}],$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — тригонометрические полиномы на $\mathbb{R}^n$.

Введем гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = B^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n_B \times \mathbb{R}^n)$$

(тензорное произведение предполагается пополненным по естественной гильбертовой норме). Далее, рассмотрим алгебру фон Неймана $\mathcal{A}_B$, порожденную двумя семействами операторов на $\mathcal{H}$:

$$\{e_\xi \otimes e_\xi,\, \xi \in \mathbb{R}^n\}, \quad \{I \otimes T_\xi,\, \xi \in \mathbb{R}^n\},$$

где e_ξ — оператор умножения на $e^{i\xi\cdot x}$ в $B^2(\mathbb{R}^n)$ или в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а T_ξ — оператор сдвига на вектор ξ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$T_\xi u(x) = u(x-\xi).$$

Пространство $\mathcal{H}$ можно интерпретировать как пространство функций двух n-мерных переменных z и x, где $z \in \mathbb{R}^n_B$, $x \in \mathbb{R}^n$. Алгебра $\mathcal{A}_B$ является II_∞-фактором (см. [8]) и пусть Sp — относительный след на факторе $\mathcal{A}_B$.

Обозначим через $APS^m_{\rho,\delta}$ пространство всех функций $p(x,\xi)$ из $S^m_{\rho,\delta}$, для которых $p(x,\xi)$ является п.-п. по x функцией (со значениями в $L(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$).

Пусть теперь $b(x,\xi)\in APS^m_{\rho,\delta}$ и $B=Op\Big(b\Big(\dfrac{x+y}{2},\xi\Big)\Big)$ (см. формулу (3.1)). Положим

$$\tilde\rho(B)=\tilde B,$$

где

$$\tilde B:\mathcal{H}^N\to\mathcal{H}^N,$$

$\mathcal{H}=B^2(\mathbb{R}^n)\otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ (тензорное произведение подразумевается пополненным по естественной гильбертовой норме), $\mathcal{H}^N=\underbrace{\mathcal{H}\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}}_{N\text{ раз}}$,

$$\tilde Bu(x,y)=[B_xu(x,\cdot)](y),\ \ B_x=T_{-x}BT_x.$$

В качестве области определения оператора $\tilde B$ берется пространство

$$\mathcal{H}^N_\infty=\underbrace{\mathcal{H}_\infty\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_\infty}_{N},\ \text{ где }\ \mathcal{H}_\infty=\bigcap_m\mathcal{H}_m,\ \ \mathcal{H}_m=B^2(\mathbb{R}^n)\otimes L^2(\mathbb{R}^n).$$

Отображение $\tilde\rho:B\to\tilde B$ является $*$-представлением алгебры операторов вида

$$B=O_P\Big(b\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)\Big),\quad\text{где}\quad b(x,\xi)\in APS^{-\infty}_{\rho,\delta}=\bigcap_m APS^m_{\rho,\delta}.$$

Областью определения оператора B является пространство

$$H^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)=\bigcap_m H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N).$$

Через $B^\#$ обозначается замыкание оператора $\tilde B$ в $\mathcal{H}^N$.

Определим теперь в алгебре $L(\mathcal{H}^N,\mathcal{H}^N)$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}^N$ подалгебру $\mathcal{A}^N_B$, которая будет фактором типа II_∞, т. е. на этой подалгебре однозначно (с точностью до множителя) определен точный нормальный полуконечный след. Алгебра $\mathcal{A}^N_B$ порождается семейством матричных операторов $A=(A_{ij})^N_{i,j=1}$, где

$$A_{ij}=e_{z_{ij}}\otimes e_{z_{ij}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad z_{ij}\in\mathbb{R}^n,$$

или

$$A_{ij}=I\otimes T_{z_{ij}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad z_{ij}\in\mathbb{R}^n,$$

I — единичный оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$.

На факторе $\mathcal{A}^N_B$ фиксируется некоторый след, обозначаемый Sp, нормированный условием, которое будет указано ниже. Таким образом, Sp — функция из $\mathcal{A}^N_B$ в $[0,+\infty)$.

Пусть теперь $Q=Op\Big(q\Big(\dfrac{x+y}{2},\xi\Big)\Big)$, $q(x,\xi)\in APS^m_{\rho,\delta}$ тогда:

1. если $Q^\#$ самосопряжен, то его спектральные проекторы $E_\lambda\in\mathcal{A}^N_B$;
2. если $m=0$, то $Q^\#\in\mathcal{A}^N_B$;
3. если $m<-n$, то $Sp|Q^\#|<+\infty$ и

$$Sp\,Q^\#=(2\pi)^{-n}M_x\int\limits_{\mathbb{R}^n}Tr\,q(x,\xi)d\xi. \tag{5.1}$$

В утверждении 3 через $|Q^\#|$ обозначен оператор $\sqrt{Q^\#\,(Q^\#)^*}$, Tr — след матрицы из $L(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$. Кроме того, формула (5.1) определяет нормировочный множитель следа на $\mathcal{A}^N_B$.

Утверждения 1–3 доказаны при $N=1$ в [8]; доказательство этих утверждений переносится на случай $N>1$ непосредственно. Таким образом, оператор $P^\#$, построенный по исходному п.-п. гипоэллиптическому формально самосопряженному п.д.о. P, присоединен к фактору $\mathcal{A}^N_B$ (т. е. его проекторы E_λ принадлежат $\mathcal{A}^N_B$) и определена функция

$$N(\lambda)=SpE_\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Так же, как и в [1], используя существование параметрикса у оператора P, нетрудно доказать конечность функции $N(\lambda)$ при всех λ и совпадение спектров оператора $P^{\#}$ и оператора

$$P : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

а значит, и совпадение этих спектров со множеством точек роста функции $N(\lambda)$.

6. Приближенный спектральный проектор и асимптотика функции $N(\lambda)$

Для доказательства основной теоремы достаточно теперь построить приближенный спектральный проектор $\mathcal{E}_\lambda$ оператора $P^{\#}$, удовлетворяющий теореме 4.1 при некотором $\nu \in (0,1)$.

Положим $\mathcal{E}_\lambda = \tilde{\rho}(\mathcal{E}_\lambda^0)$, где

$$\mathcal{E}_\lambda^0 = O_P(e_\lambda(\frac{x+y}{2}, \xi)), \ \ e_\lambda(x,\xi) = \mathrm{X}(\hat{p}; (x,\xi); \lambda, \lambda^{1-\nu}), \ \ \nu \in (0,1), \ \ \lambda \geqslant 1,$$

а $\mathrm{X}(Y; \lambda, \tau)$ — специальная гладкая срезающая функция с параметрами λ и τ, отображающая матрицу $Y \in L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ в матрицу $\mathrm{X} \in L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$. Для этой функции, в частности, выполнены условия

$$\mathrm{X}(Y; \lambda, \tau) = \begin{cases} I_N \ \text{ при } Y < \lambda I_N, \\ O_N \ \text{ при } Y > (\lambda + \tau) I_N, \end{cases}$$

где O_N и I_N — нулевая и единичная матрицы $N \times N$. Более точно, функция $e_\lambda(x,\xi)$ определяется по формуле

$$e_\lambda(x,\xi) = \sum_k \varphi_k(x,\xi) e_{\lambda,k}(x,\xi),$$

где

$$\sum_k \varphi_k(x,\xi) \equiv 1$$

— некоторое специальное (для оператора P) разбиение единицы для соответствующего покрытия $\{U_k\}$ пространства $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$,

$$e_{\lambda,k}(x,\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma_{k\lambda}} (\hat{p}(x,\xi) - z)^{-1} dz, \quad (x,\xi) \in U_k,$$

а $\Gamma_{k\lambda}$ — специально построенные простые контуры в комплексной плоскости, в частности, содержащие внутри себя все собственные числа матрицы $\hat{p}(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in U_k$, меньшие λ. Такого типа конструкция для матричных операторов с дискретным спектром впервые была дана в работе [5].

Построенный по указанной схеме символ $e_\lambda(x,\xi)$ будет принадлежать пространству $APS_{\rho,\delta}^0$ при фиксированном λ, а соответствующий ему оператор $\mathcal{E}_\lambda$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 4.1 при $\nu \in (0, (\rho-\delta)(3M)^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Безяев В. И.* Асимптотика плотности состояний гипоэлиптических почти периодических операторов// Мат. сб. — 1978. — *24*, № 7. — С. 485–511.
2. *Левендорский С. З.* Метод приближенного спектрального проектора// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — *49*, № 6. — С. 1177–1228.
3. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1989. — *64*. — С. 5–242.
4. *Туловский В. Н., Шубин М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n// Мат. сб. — 1973. — *92*, № 4. — С. 571–588.
5. *Фейгин В. И.* Асимптотическое распределение собственных чисел для гипоэллиптических систем в $\mathbb{R}^n$// Мат. сб. — 1976. — *99*, № 4. — С. 594–614.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. — М.: Мир, 1986.
7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. — М.: Мир, 1987.
8. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1976. — *35*. — С. 103–164.

9. *Шубин М. А.* Теорема Вейля для оператора Шредингера с почти-периодическим потенциалом// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1976. — № 2. — С. 84–88.
10. *Шубин М. А.* Плотность состояний для самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1978. — *3*. — С. 243–275.
11. *Coburn L. A., Moyer R. D., Singer I. M.* C*-algebras of almost periodic pseudo-differential operators// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 279–307.
12. *Dixmier J.* Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (algebres de von Neumann). — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
13. *Karol' A. I.* Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators of variable order// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *207*, № 2. — С. 236–248.
14. *Kumano-go H.* Algebras of pseudo-differential operators// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A. — 1970. — *17*. — С. 31–50.

В. И. Безяев
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-593-604 UDC 517.43

On Asymptotics of the Density of States for Hypoelliptic Almost Periodic Systems

© 2019 **V. I. Bezyaev**

Abstract. In this paper, we find the asymptotics of integrated density of states with remainder estimate for hypoelliptic systems with almost periodic (a.p.) coefficients. We use the approximate spectral projector method for matrix a.p. operators with continuous spectrum.

REFERENCES

1. V. I. Bezyaev, "Asimptotika plotnosti sostoyaniy gipoelipticheskikh pochti periodicheskikh operatorov" [Asymptotics of the density of states of hypoelliptic almost periodic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **24**, No. 7, 485–511 (in Russian).
2. S. Z. Levendorskiy, "Metod priblizhennogo spektral'nogo proektora" [Method of approximate spectral projector], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1985, **49**, No. 6, 1177–1228 (in Russian).
3. G. V. Rozenblyum, M. Z. Solomyak, and M. A. Shubin, "Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov" [Spectral theory of differential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1989, **64**, 5–242 (in Russian).
4. V. N. Tulovskiy and M. A. Shubin, "Ob asimptoticheskom raspredelenii sobstvennykh znacheniy psevdodifferentsial'nykh operatorov v R^n" [On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in R^n], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **92**, No. 4, 571–588 (in Russian).
5. V. I. Feygin, "Asimptoticheskoe raspredelenie sobstvennykh chisel dlya gipoellipticheskikh sistem v $\mathbb{R}^n$" [Asymptotic distribution of eigenvalues for hypoelliptic systems in $\mathbb{R}^n$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1976, **99**, No. 4, 594–614 (in Russian).
6. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 3* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
8. M. A. Shubin, "Psevdodifferentsial'nye pochti-periodicheskie operatory i algebry fon Neymana" [Pseudodifferential almost periodic operators and von Neumann algebras], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1976, **35**, 103–164 (in Russian).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

9. M. A. Shubin, “Teorema Veylya dlya operatora Shredingera s pochti-periodicheskim potentsialom” [The Weil theorem for the Schrödinger operator with almost periodic potential], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1976, No. 2, 84–88 (in Russian).
10. M. A. Shubin, “Plotnost’ sostoyaniy dlya samosopryazhennykh ellipticheskikh operatorov s pochti-periodicheskimi koeffitsientami” [Density of states for self-adjoint elliptic operators with almost periodic coefficients], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1978, **3**, 243–275 (in Russian).
11. L. A. Coburn, R. D. Moyer, and I. M. Singer, “C*-algebras of almost periodic pseudo-differential operators,” *Acta Math.*, 1973, **130**, 279–307.
12. J. Dixmier, *Les algebres d’operateurs dans l’espace hilbertien (algebres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
13. A. I. Karol’, “Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators of variable order,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 236–248.
14. H. Kumano-go, “Algebras of pseudo-differential operators,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A*, 1970, **17**, 31–50.

V. I. Bezyaev
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: vbezyaev@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 605–612

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-605-612 УДК 517.956.25

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

© 2019 г. **Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. С помощью модифицированного метода пробных функций получены достаточные условия отсутствия нетривиальных решений ряда классов полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка и квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих неоднородные слагаемые (не зависящие от искомой функции).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В последние десятилетия многими математиками рассматриваются достаточные условия отсутствия нетривиальных (отличных от тождественного нуля или другой константы п.в.) решений нелинейных неравенств в соответствующих функциональных классах. Метод исследования этой проблемы, основанный на использовании пробных функций специального вида, был предложен С. И. Похожаевым [2] и развит в его совместных работах с Э. Митидиери, В. Галактионовым и другими авторами (см., в частности, монографии [1, 3]), а также в статьях авторов настоящей работы (см. [4, 5] и библиографию там). При этом до сих пор, как правило, рассматривались неравенства, не содержащие неоднородных (не зависящих от искомой функции) слагаемых. Здесь мы модифицируем метод пробных функций для получения достаточных условий отсутствия нетривиальных решений ряда классов полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка и квазилинейных эллиптических неравенств, содержащих такие слагаемые.

Основные результаты статьи сформулированы в разделе 1. В разделе 2 доказано отсутствие нетривиальных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка, в которых нелинейные слагаемые зависят от значений искомой функции, а в разделе 3 — для их квазилинейных аналогов с нелинейным слагаемым, зависящим от модуля градиента. В разделах 4 и 5 аналогичные результаты получены для неравенств, содержащих оператор p-Лапласа, определенный по формуле $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, и нелинейные слагаемые того же вида, как в разделах 2 и 3 соответственно.

Публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5–100».

1. Формулировка основных результатов

Будем рассматривать полулинейное эллиптическое неравенство высокого порядка

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha(A^\alpha(x,u)) \geqslant a(x)|u|^q + b(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

©Российский университет дружбы народов, 2019

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.1. Будем называть функцию $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *слабым решением* неравенства (1.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u \cdot \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} A^\alpha(x,u) D^\alpha \varphi \, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)|u|^q + b(x))\varphi \, dx. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Пусть $q > 0$ и $A^\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции Каратеодори, причем для всех $\alpha : |\alpha| \leqslant k$ существуют функции*

$$a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \ a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+),$$

такие, что

$$|A^\alpha(x,t)| \leqslant a_\alpha(x)|t|^p \text{ для п. в. } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \ p \in (0,q)$$

и

$$n - \frac{\beta p - kq}{q-p} \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Пусть, кроме того,

$$\limsup_{R\to\infty} \int\limits_{B_R(0)} b(x)\, dx \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Тогда неравенство (1.1) *не имеет слабых* (*в смысле определения* 1.1) *решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, отличных от тождественного нуля п.в.*

Далее рассмотрим квазилинейное эллиптическое неравенство

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha \left(A^\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geqslant a(x)|Du|^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.5}$$

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.2. Будем называть функцию $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *слабым решением* неравенства (1.5), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^k_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^{|\alpha|} \left(A^\alpha(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \varphi \, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)|Du|^q + b(x))\varphi \, dx. \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *Пусть $q > 1$, $A^\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции Каратеодори, причем для всех $\alpha : |\alpha| \leqslant k$ существуют функции*

$$a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \ a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+),$$

такие, что

$$|A^\alpha(x,t)| \leqslant a_\alpha(x)|t| \text{ для п. в. } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$

и

$$n - \frac{\beta - (k+1)q}{q-1} \leqslant 0, \tag{1.7}$$

а $b(x)$ удовлетворяет условию (1.4).

Тогда неравенство (1.5) *не имеет слабых решений $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, отличных от константы п.в.*

В качестве примера квазилинейных неравенств с противоположным знаком в главной части рассмотрим

$$\Delta_p u \geqslant a(x)u^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.8}$$

где $a(x) \geqslant c(1+|x|)^\beta$ с некоторыми константами $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, а $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 1.3. Будем говорить, что функция $u \in L^q(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}})$ удовлетворяет неравенству (1.8) *в слабом смысле* (*распределений*), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется следующее неравенство:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)u^q + b(x))\varphi\,dx. \tag{1.9}$$

Теорема 1.3. *Пусть* $q > p-1$ *и*

$$n - \frac{\beta(p-1) - pq}{q-p+1} \leqslant 0, \tag{1.10}$$

$$\limsup_{R\to\infty} \int\limits_{B_R(0)} b(x)\,dx < 0. \tag{1.11}$$

Тогда неравенство (1.9) *не имеет неотрицательных слабых решений, отличных от тождественного нуля п.в.*

В заключение рассмотрим неравенство

$$\Delta_p u \geqslant a(x)|Du|^q + b(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Определение 1.4. Будем говорить, что функция $u \in W^{1,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{loc}})$ удовлетворяет неравенству (1.12) *в слабом смысле* (*распределений*), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ выполняется следующее неравенство:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a(x)u^q + b(x))\varphi\,dx. \tag{1.13}$$

Теорема 1.4. *Пусть* $q > p-1$ *и*

$$n - \frac{\beta(p-1)}{q-p+1} \leqslant 0, \tag{1.14}$$

а b *удовлетворяет условию* (1.4).

Тогда неравенство (1.12) *не имеет слабых решений* $u \in W^{1,\max(p,q)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *отличных от константы п.в.*

2. Доказательство теоремы 1.1

Введем семейство пробных функций $\varphi = \varphi_R \in C^k_0(\mathbb{R}^n; [0,1])$ вида

$$\varphi_R(x) = \psi_R^{\varkappa}(x)$$

с $\varkappa > \dfrac{kq}{q-p}$ и $\psi_R \in C^k_0(\mathbb{R}^n; [0,1])$ такими, что

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqslant R), \\ 0 & (|x| \geqslant 2R), \end{cases} \tag{2.1}$$

причем существует константа $c > 0$ такая, что

$$|D^\alpha \psi_R(x)| \leqslant cR^{-|\alpha|} \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{2.2}$$

для всех мультииндексов α с $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$.

Теперь предположим, что решение u неравенства (1.1) существует. Подставляя $\varphi = \varphi_R$ в (1.2), получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u \sum_{|\alpha|\leqslant k} A^\alpha(x,u) D^\alpha \varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi_R\,dx \leqslant \\
&\leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^p \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x)\varphi_R\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx + c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства следующим образом:

$$\int\limits_{B_R(0)} u^q(1+|x|)^\beta \varphi_R\,dx \leqslant \int\limits_{B_{2R}(0)} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta p}{q-p}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} \varphi_R^{-\frac{p}{q-p}} - b(x)\varphi_R \right) dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (1.4)–(2.2), получим

$$\int\limits_{B_R(0)} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta p - kq}{q-p}},$$

что приводит к противоречию при $R \to \infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен, т. е. при строгом неравенстве в (1.3).

В случае показателя, равного нулю, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta\,dx < \infty,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Но из (2.3) вследствие неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \varphi_R|^{\frac{q}{q-p}} ((1+|x|)^{-\beta})^{\frac{p}{q-p}} \varphi^{-\frac{p}{q-p}} + b(x)\varphi_R \right) dx \right)^{\frac{p}{q}} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q(1+|x|)^\beta dx \right)^{\frac{q-p}{q}},
\end{aligned}$$

где при $R \to \infty$ первый множитель стремится к 0 по доказанному, а второй ограничен, что вновь приводит к противоречию, завершающему доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 1.2

Для доказательства этой теоремы возьмем $\varphi = \varphi_R \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^n; [0,1])$ вида

$$\varphi_R(x) = \psi_R^{\varkappa}(x)$$

с $\varkappa > (k+1)q'$ и $\psi_R \in C_0^{k+1}(\mathbb{R}^n;[0,1])$, удовлетворяющими условиям (2.1) и (2.2). Достаточно, чтобы условия (2.2) выполнялись при

$$0 \leqslant |\alpha| \leqslant k+1.$$

Как и выше, предположим, что решение u задачи (1.5) существует. Подставляя $\varphi = \varphi_R$ в (1.6), получаем

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q|x|^\beta \varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|\cdot|D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha\varphi_R)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx + c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}\left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}}|D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha\varphi_R)|^{q'}\varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R\right)dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx \leqslant c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R}\left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}}|D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha\varphi_R)|^{q'}\varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R\right)dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства следующим образом:

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx \leqslant c\int\limits_{B_{2R}(0)}\left((1+|x|)^{-\frac{\beta q'}{q}}|D(\sum_{|\alpha|\leqslant k} D^\alpha\varphi_R)|^{q'}\varphi_R^{1-q'} + b(x)\varphi_R\right)dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Используя условия (1.4)–(2.2), получим

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta-(k+1)q}{q-1}},$$

что приводит к противоречию при $R\to\infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен, т. е. при строгом неравенстве в (1.7). Случай показателя, равного нулю, рассматривается аналогично предыдущей теореме.

4. Доказательство теоремы 1.3

Предположим, что искомое решение существует. Обозначим $u_\varepsilon = u+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Подставляя в (1.9) $\varphi(x) = u_\varepsilon^\lambda(x)\varphi_R(x)$ с $\lambda>0$, где φ_R — функции из предыдущего раздела с $k=1$, получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(|Du|^{p-2}Du, D(u^\lambda\varphi_R))\,dx = \\ &= \lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(|Du|^{p-2}(Du,D\varphi_R) + u^\lambda b(x))\,dx \leqslant \\ &\leqslant \lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(|Du|^{p-1}|D\varphi_R| + u_\varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)\,dx\end{aligned}$$

и в силу неравенства Юнга

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx + |\lambda|\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx &\leqslant \\ \leqslant |\lambda|\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}|Du|^p\varphi_R\,dx + c(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^{\lambda+p-1}|D\varphi_R|^p\varphi_R^{1-p} + \varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)dx,\end{aligned}$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^q u_\varepsilon^\lambda(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx \leqslant c(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u^{\lambda+p-1}|D\varphi_R|^p\varphi_R^{1-p} + \varepsilon^\lambda b(x)\varphi_R)dx. \tag{4.1}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0_+$ и повторно применяя неравенство Юнга, приходим к

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx \leqslant c(\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(|D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(1+|x|)^{-\frac{\beta(\lambda+p-1)}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}})dx.$$

Сужая область интегрирования, получим в левой части этого неравенства

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx,$$

а в правой части будем иметь

$$\int\limits_{B_{2R}(0)} |D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(1+|x|)^{-\frac{\beta(\lambda+p-1)}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}\,dx.$$

Аналогично предыдущему разделу, получим

$$\int\limits_{B_R(0)} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}},$$

что приводит к противоречию при $R\to\infty$, если в (1.10) выполнено строгое неравенство. Если же в (1.10) имеет место равенство, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx < \infty,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Но из (4.1) с учетом знака $\lambda<0$ и неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{q+\lambda}(1+|x|)^{\beta}\,dx \leqslant c(\lambda)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda+p-1}(1+|x|)^{\beta}dx\right)^{\frac{q-p+1}{q+\lambda}}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\operatorname{supp}|D\varphi_R|} |D\varphi_R|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(\rho^{\gamma}|x|^{-\beta})^{\frac{\lambda+p-1}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}dx\right)^{\frac{\lambda+p-1}{q+\lambda}}$$

где при $R\to\infty$ первый множитель ограничен, а второй стремится к 0 по доказанному, что вновь приводит к противоречию, завершающему доказательство теоремы.

5. Доказательство теоремы 1.4

Подставляя $\varphi(x)=\varphi_R(x)$ в (1.9), получаем

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} (|Du|^{p-2}(Du,D\varphi_R)+b(x)\varphi_R)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} (|Du|^{p-1}\cdot|D\varphi_R|+b(x)\varphi_R)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^{\beta}\varphi_R\,dx + c\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} ((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}}|D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}}\varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}}+b(x)\varphi_R)\,dx,$$

откуда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} |Du|^q(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx \leqslant c \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi_R} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}}|D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}}\varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}} + b(x)\varphi_R\right)dx.$$

В силу выбора φ_R мы можем изменить области интегрирования в обеих частях неравенства аналогично предыдущему разделу:

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta\varphi_R\,dx \leqslant \int\limits_{B_{2R}(0)} \left((1+|x|)^{-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}}|D\varphi_R|^{\frac{q}{q-p+1}}\varphi_R^{-\frac{p-1}{q-p+1}} + b(x)\varphi_R\right)dx.$$

Заметим, что $\varphi_R \equiv 1$ во всей области интегрирования в левой части неравенства. Аналогично доказательствам предыдущих теорем, получим

$$\int\limits_{B_R(0)} |Du|^q(1+|x|)^\beta\,dx \leqslant cR^{n-\frac{\beta(p-1)}{q-p+1}},$$

что приводит к противоречию при $R\to\infty$, если показатель степени в правой части неравенства отрицателен. Случай показателя, равного нулю, рассматривается аналогично предыдущей теореме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Теоремы Лиувилля для некоторых классов нелинейных нелокальных задач// Тр. МИАН. — 2005. — *248*. — С. 158–178.
2. *Похожаев С.И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357*. — С. 592–594.
3. *Galaktionov V., Mitidieri E., Pohozaev S.* Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations. — Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2014.
4. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*. — С. 102–113.
5. *Salieva O.* On nonexistence of solutions to some nonlinear parabolic inequalities// Commun. Pure Appl. Anal. — 2017. — *16*, № 3. — С. 843–853.

Е. И. Галахов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: galakhov@rambler.ru

О. А. Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
127055, Москва, Вадковский пер., д. 1
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-605-612 UDC 517.956.25

Absence of Solutions for Some Nonhomogeneous Elliptic Inequalities

© 2019 **E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. By means of the modified method of test functions, we obtain sufficient conditions of absence of nontrivial solutions for some classes of semilinear elliptic inequalities of higher order and quasilinear elliptic inequalities containing nonhomogeneous terms (independent of the unknown function).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

REFERENCES

1. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, “Teoremy Liuvillya dlya nekotorykh klassov nelineynykh nelokal’nykh zadach” [Liouville theorems for some classes of nonlinear nonlocal problems], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 158–178 (in Russian).
2. S. I. Pohozaev, “Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial’nymi operatorami” [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, 592–594 (in Russian).
3. V. Galaktionov, E. Mitidieri, and S. Pohozaev, *Blow-up for Higher-Order Parabolic, Hyperbolic, Dispersion and Schrödinger Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2014.
4. E. Galakhov and O. Salieva, “On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
5. O. Salieva, “On nonexistence of solutions to some nonlinear parabolic inequalities,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2017, **16**, No. 3, 843–853.

E. I. Galakhov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: galakhov@rambler.ru

O. A. Salieva
Moscow State Technological University “Stankin,” Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 613–622

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-613-622 УДК 517.929

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ, СВОДЯЩИЕСЯ К НЕЛОКАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

© 2019 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащие несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Показано, что для случая, когда орбиты точек границы области, сгенерированные множеством сдвигов разностного оператора, конечны, исходная задача может быть сведена к краевой задаче для дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах А. Л. Скубачевского [1, 4]. В частности, им было показано, что в случае невырожденного разностного оператора краевая задача для дифференциально-разностного уравнения на ограниченной области эквивалентна краевой задаче для дифференциального уравнения на этой области с нелокальными краевыми условиями. Был предложен метод исследования задач для дифференциально-разностных уравнений с помощью нелокальных задач.

Для дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами этот метод в общем случае неприменим. Однако в случае, когда множество сдвигов разностного оператора порождает конечную орбиту границы заданной области, исходная краевая задача также может быть сведена к нелокальной. Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти, основанное не на аддитивной группе сдвигов, как в работах А. Л. Скубачевского, а на графе, ассоциированном с множеством сдвигов.

Это разбиение описано в работах [2, 3]; оно применяется для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами [3] и получения условий сильной эллиптичности (выполнения неравенства Гординга) [2]. В данной статье исследуется разрешимость краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента методом сведения их к нелокальным задачам. Этот метод применим и в случае, когда дифференциально-разностный оператор не является сильно эллиптическим. Сведение к нелокальной задаче позволяет строить аналитические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента. В данной статье приводятся примеры таких решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00401).

©Российский университет дружбы народов, 2019

1. Разностные операторы и орбиты границ

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$(Ru)(x) = \sum_{h \in M} a_h[u(x+h) + u(x-h)], \tag{1.1}$$

где $a_h, h \in \mathbb{R},\ M$ — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов h, $h_0 = 0 \in M$.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R})$, для которых

$$u(x) = 0,\ x \notin Q = (0, d). \tag{1.2}$$

Для учета однородных краевых условий (1.2) используем операторы I_Q, P_Q:

$I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q,

$P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Введем также оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Обозначим $\widehat{M} := M \cup (-M)$.

Введем множества

$$S_1 := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} h\Big) \bigcap \bar{Q},$$

$$S_2 := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_1 + h)\Big) \bigcap \bar{Q}, \ldots,$$

$$S_k := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_{k-1} + h)\Big) \bigcap \bar{Q}, \ldots$$

В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$. Введем множество

$$S^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Аналогичное множество S^d построим для правой границы (точки d). Обозначим $S := S^0 \cup S^d$. Возможно существование 2-х случаев.

Случай 1. На некотором шаге $S_{k+1} = S_k$. Тогда и все $S_{k+p} = S_k$ $(p \geqslant 1)$, и процесс построения прервется. В этом случае множество S^0 состоит из конечного числа точек $S^0 = S_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < d$.

Назовем S^0 *орбитой* точки 0, $S = orb(0)$, а x_i точками орбиты. Аналогичную орбиту S^d построим для точки d, $S^d = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$, $0 < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_N = d$. В силу симметричности разностного оператора эти орбиты идентичны.

Случай 2. Множество S состоит из бесконечного числа точек.

В данной работе мы будем рассматривать только случай 1.

Замечание 1.1. Для бесконечной орбиты, когда число различных множеств S_k счетно, множество S может быть даже всюду плотным в $\bar{Q}$ (см. [4, пример 3.10]).

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \backslash (S^0 \cup S^d)$. Оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2 \ldots)$ и

$$G = \bigcup_r Q_r, \quad S^0 \cup S^d = \bigcup_r \partial Q_r.$$

Замечание 1.2. В работе А. Л. Скубачевского [4] для исследования свойств разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M. Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такое разбиение не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [2].

Определение 1.1. Назовем $\Re_0$ *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти $Q_r (r = 1{,}2, \ldots)$, если:

1. $\bigcup\limits_r \bar{Q}_r = \overline{Q}$;
2. для любой Q_{r_1} и $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ или найдется Q_{r_2} так, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, или $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R} \backslash Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1.1).

В силу [2, теорема 2.1] справедлива

Лемма 1.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением $\Re_0$ области Q.*

Разбиению $\Re_0$ поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины этого графа — подобласти Q_r, дуги графа — сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1} соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1.1).

Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π: подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \Re_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\Re_0$ на классы эквивалентности.

Обозначим подобласти Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Обозначим $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1, \ldots, N(s))$. Обозначим $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$. В силу [4, лемма 8.5] $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ}, при этом $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) \ = u(x + h_{sl}) \ (x \in Q_{s1}),$$

где $l = \ 1, \ldots, N = N(s)$, h_{sl} такое, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \ 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) \ = \prod\limits_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [4, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q {U_s}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, элементы матрицы r_{km}^s вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h \ (h = h_{sm} - h_{sk} \in M), \\ 0 \ (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \tag{1.3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\Re_0$ граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

В силу [4, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. Отсюда следует

Лемма 1.2. *Оператор R_Q невырожден тогда и только тогда, когда все матрицы R_s невырождены.*

Присвоим первый номер классу интервалов, левой границей которых являются точки x_i орбиты нуля: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < d$. Оператор $R_{Q1} : L_2^N\left(Q_{11}\right) \to L_2^N\left(Q_{11}\right)$, заданный формулой $R_{Q1} = U_1 R_Q U_1^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_1 порядка $N \times N$.

Пример 1.1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x) = a_0u(x) + a_1(u(x+1+\tau) + u(x-1-\tau)) + a_2(u(x+1+2\tau) + u(x-1-2\tau)), \qquad (1.4)$$

где $\frac{1}{3} < \tau < \frac{1}{2}$, τ — иррациональное.

Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = (0, 2)$.

Орбиты границы:

$$S^0 = orb(0) = \{0, \tau, 1+\tau, 1+2\tau\},$$
$$S^d = orb(d) = \{1-2\tau, 1-\tau, 2-\tau, 2\}.$$

Разбиение области Q состоит из трех классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1-2\tau), \qquad Q_{12} = (\tau, 1-\tau),$$
$$Q_{13} = (1+\tau, 2-\tau), \quad Q_{14} = (1+\tau, 2);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1-2\tau, \tau), \quad Q_{22} = (2-\tau, 1+2\tau).$$

Третий класс состоит из одной области

$$Q_{13} = (1-\tau, 1+\tau).$$

Для первого класса $s = 1$ подобластей оператор $R_1 : L_2^4(Q_{11}) \to L_2^4(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q {U_1}^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Действию оператора R_1 в силу формулы (1.3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей оператор $R_2 : L_2^2(Q_{21}) \to L_2^2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q {U_2}^{-1}$.

Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

На третьем классе действию оператора R_Q соответствует умножение на a_0.

2. Действие разностного оператора в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$

Введем в рассмотрение $H^1(Q)$ $(Q = (0, d))$ — пространство Соболева функций, у которых существует и принадлежит пространству $L_2(Q)$ обобщенная производная:

$$\mathring{H}^1(Q) = \left\{u \in H^1(Q) | u(0) = u(d) = 0\right\}.$$

Эквивалентная норма $||u||_{\mathring{H}^1(Q)}$ в $\mathring{H}^1(Q)$ определяется формулой

$$||u||^2{}_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_0^d u' \ \bar{u}' dx.$$

Введем в рассмотрение также пространство $H^1_\gamma(0, d)$ функций $v \in H^1(0, d)$, для которых

$$v(0) = \sum_{i=1}^N \gamma_i v(x_i), \qquad (2.1)$$

$$v(d) = \sum_{i=1}^N \gamma_i v(d - x_i). \qquad (2.2)$$

Пусть R_1 — матрица первого класса подобластей разбиения области Q, определенная формулой (1.3). Обозначим через R_1^1 матрицу, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием первого столбца. Обозначим e_i i-ю строку матрицы R_1^1, R_1^2 — матрицу, полученную из R_1 вычеркиванием первого столбца и строки. Предположим, что $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда первая строка матрицы R_1 есть линейная комбинация остальных ее строк:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e_{i+1}. \tag{2.3}$$

Доказательство теоремы 2.1 следует схеме доказательства работы [4, теорема 2.1].

Теорема 2.1. *Пусть R_Q — невырожденный оператор и $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда существуют γ_i $(i = 1, \ldots, N)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H_\gamma^1(0, d)$ непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. 1. Покажем, что существуют такие γ_i $(i = 1, \ldots, N)$, что

$$R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) \subset H_\gamma^1(0, d).$$

В силу [4, лемма 2.10] $R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) \subset H^1(0, d)$.

Для $v \in \mathring{H}^1(Q)$

$$(R_Q v)(0) = (U_1 P_1 R_Q v)_1(0) = (R_1 U_1 P_1 v)_1(0) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_1 U_1 P_1 v)_{i+1}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_Q v)(x_i).$$

Аналогично доказывается, что

$$(R_Q v)(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_Q v)(d - x_i).$$

Следовательно, $R_Q(\mathring{H}^1(0, d)) \subset H_\gamma^1(0, d)$.

2. Докажем, что

$$H_\gamma^1(0, d) \subset R_Q(\mathring{H}^1(0, d)).$$

Пусть $u \in H_\gamma^1(0, d)$. В силу [4, лемма 2.7] оператор R_Q имеет ограниченный обратный $R_Q^{-1} : L_2(0, d) \to L_2(0, d)$.

Покажем, что

$$v = R_Q^{-1} u \in \mathring{H}^1(0, d)).$$

В силу [4, лемма 2.12] $v \in H^1(Q_{si})$ для всех подобластей Q_{si} разбиения $\Re_0$. Достаточно показать, что для точек x_i орбиты нуля

$$v|_{t=x_i+0} = v|_{t=x_i-0}, \quad x_i = 1, \ldots, N, \\ v(0) = 0,$$

где

$$v|_{t=x+0} = \lim_{\substack{t \to x, \\ t > x}} v(t), \\ v|_{t=x-0} = \lim_{\substack{t \to x, \\ t < x}} v(t).$$

Аналогичные равенства должны быть также выполнены и для точек орбиты d.

Обозначим

$$\varphi_i = v|_{t=x_i+0}, \ i = 0, \ldots, N, \\ \psi_j = v|_{t=x_j-0}, \quad j = 1, \ldots, N, \\ \psi_0 = 0.$$

Все значения φ_i в силу построения определяются значениями функции v на областях $Q_{1,i+1}$ первого класса разбиения. Функции ψ_i могут определяться на областях различных классов, в том числе и на первом (см. примеры 1.1, 2.1). При этом действию оператора R_Q на первом классе соответствует умножение на матрицу R_1, действию оператора R_Q на других классах соответствует умножение на различные матрицы.

Для того, чтобы унифицировать действие оператора R_Q, введем в рассмотрение область $Q^\delta = (-\delta, d)$ и окрестности G_i точек орбиты x_i:

$$G_i = (x_i - \delta, x_i + \delta) \quad (i = 0, \dots, N).$$

Выберем δ достаточно малым, так, чтобы интервалы

$$G_i^- = (x_i - \delta, x_i) \quad (i = 1, \dots, N),$$
$$G_i^+ = (x_i, x_i + \delta) \quad (i = 0, \dots, N)$$

содержались целиком в соответствующих подобластях разбиения.

Действию оператора $R_{Q^\delta} = P_{Q^\delta} R I_{Q^\delta}$ на $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i\Big)$ соответствует умножение на матрицу R_1.

Эта же матрица соответствует действию оператора R_Q на $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i^-\Big)$ и $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i^+\Big)$. При этом будем рассматривать только функции $v(x) = 0$, $x \in G_0^-$.

Из этого следует, что $\psi_0 = 0$. Тогда

$$(R_{Q^\delta} v)(x) = (R_Q v)(x), \quad x \in Q.$$

Поскольку $R_Q v \in H_\gamma^1(0, d)$,

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}. \tag{2.4}$$

В силу условия (2.3)

$$r_{1,p} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,p}, \quad p = 2, \dots, N+1.$$

Тогда левая часть равенства (2.4) примет вид

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = r_{11}\varphi_0 + \sum_{p=2}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = r_{11}\varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}.$$

Подставив это выражение в (2.4), получим

$$r_{11}\varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}.$$

Отсюда

$$r_{11}\varphi_0 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,1}\varphi_0,$$

или

$$(r_{11} - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,1})\varphi_0 = 0.$$

Выражение в скобках не может быть равным нулю, иначе вся первая строка матрицы R_1 была бы линейной комбинацией остальных ее строк, что противоречит условию невырожденности матрицы R_1. Следовательно, $\varphi_0 = 0$.

Поскольку $R_Q v \in H^1(0, d)$,

$$(R_Q v)\big|_{t=x_i+0} = (R_Q v)\big|_{t=x_i-0}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Отсюда

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\psi_{p-1}, \quad i = 1, .., N. \tag{2.6}$$

В силу того, что $\psi_0 = 0$ по построению и $\varphi_0 = 0$ в силу доказанного выше, из (2.6) следует

$$\sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\psi_{p-1},\ i = 1,..,N.$$

Отсюда

$$\sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}(\varphi_{p-1} - \psi_{p-1}) = \sum_{p=1}^{N} r_{i+1,p+1}(\varphi_p - \psi_p) = 0,\ i = 1,..,N.$$

Поскольку $\det R_1^2 \neq 0$, отсюда следует, что $\varphi_p = \psi_p,\ p = 1,\dots,N$ и $H^1_\gamma(0,d) \subset R_Q(\mathring{H}^1(0,d))$. □

Пример 2.1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x) = a_0u(x) + a_1(u(x+1) + u(x-1)) + a_2(u(x+1+\tau) + u(x-1-\tau)), \tag{2.7}$$

где $0{,}25 < \tau < 0{,}5$, τ — иррациональное. Рассмотрим оператор $R_Q = P_QRI_Q$, где $Q = (0,2)$.

Орбиты границы:

$$S^0 = orb(0) = \{0, \tau, 1, 1+\tau\},$$
$$S^d = orb(d) = \{1-\tau, 1, 2-\tau, 2\}.$$

Разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1-\tau),\quad Q_{12} = (\tau, 1),\quad Q_{13} = (1, 2-\tau),\quad Q_{14} = (1+\tau, 2);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1-\tau, \tau),\quad Q_{22} = (2-\tau, 1+\tau).$$

На первом классе подобластей действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу R_1, определенную формулой (1.5). Ее определитель

$$\det R_1 = ({a_0}^2 - {a_1}^2 - a_0a_2)({a_0}^2 - {a_1}^2 + a_0a_2).$$

На втором классе действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу R_2, определенную формулой (1.6). Ее определитель $\det R_2 = ({a_0}^2 - {a_1}^2)$. В силу леммы 1.2 необходимое и достаточное условие невырожденности оператора R_Q:

$$\begin{gathered} |a_0| \neq |a_1|, \\ ({a_0}^2 - {a_1}^2 - a_0a_2)({a_0}^2 - {a_1}^2 + a_0a_2) \neq 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Матрицы R_1^1, R_1^2 :

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix},\quad R_1^2 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности R_1^2 :

$$\det R_1^2 = a_0({a_0}^2 - {a_1}^2) \neq 0. \tag{2.9}$$

Пусть выполнены условия (2.8), (2.9). Тогда в силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1,\dots,3)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,d))$ на $H^1_\gamma(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H^1_\gamma(0,d)$ — подпространство функций $u \in H^1(0,2)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \gamma_1u(\tau) + \gamma_2u(1) + \gamma_3u(1+\tau), \tag{2.10}$$

$$u(2) = \gamma_1u(2-\tau) + \gamma_2u(1) + \gamma_3u(1-\tau), \tag{2.11}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в силу формулы (2.3) и симметричности матрицы R_1 находятся из системы:

$$(R_1^1)^t\gamma = 0\quad (\gamma = (-1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^t),$$

где $(R_1^1)^t$ — транспонированная матрица R_1^1.

Решение этой системы существует и единственно:

$$\gamma_1 = \frac{a_1a_2}{{a_1}^2 - {a_0}^2},\quad \gamma_2 = \frac{a_1}{a_0},\quad \gamma_3 = -\frac{a_0a_2}{{a_1}^2 - {a_0}^2}. \tag{2.12}$$

3. Дифференциально-разностные уравнения и их связь с нелокальными задачами

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-(Rv)''(x) + A_1 v - \lambda v(x) = f(x) \quad (x \in Q = (0,d)) \tag{3.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$v(x) = 0 \ (\ x \notin Q). \tag{3.2}$$

Здесь R — разностный оператор с несоизмеримыми сдвигами, определенный формулой (1.1), $A_1 : \mathring{H}^1(Q) \to L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, $f \in L_2(Q)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, λ — спектральный параметр.

Пусть $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — неограниченный оператор, заданный следующим образом:

$$\begin{gathered} D(A_R) = \{v \in \mathring{H}^1(Q) |\ R_Q v \in H^2(Q)\}, \\ A_R v = -(R_Q v)''(x) + A_1 v \quad (v \in D(A_R)). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Задача (3.1), (3.2) для целочисленных сдвигов разностного оператора R исследована в работе [4]. А. Л. Скубачевским предложен метод сведения этой задачи к краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Разбиение, описанное в разделе 1, позволяет обобщить этот метод на случай несоизмеримых сдвигов (если орбита границы конечна).

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (3.1), (3.2), вообще говоря, не имеют гладких классических решений и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [4]).

Определение 3.1. Функцию $v \in D(A_R)$ назовем *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), если

$$A_R v - \lambda v = f. \tag{3.4}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 3.2. Функцию $v \in \mathring{H}^1(Q)$ назовем *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), если для любой функции $w \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено тождество

$$(R_Q v', w')_{L_2(Q)} + (A_1 v, w)_{L_2(Q)} - (\lambda v, w)_{L_2(Q)} = (f, w)_{L_2(Q)}, \tag{3.5}$$

где $(v, w)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор R_Q невырожден и $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ фредгольмов и $\operatorname{ind} A_R = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1, \ldots, N)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,d)$ на $H^1_\gamma(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно. Обозначим $u = R_Q v$. Здесь $H^1_\gamma(0,d)$ — подпространство функций из $H^1(0,d)$, удовлетворяющих условиям:

$$u(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i u(x_i), \tag{3.6}$$

$$u(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i u(d - x_i). \tag{3.7}$$

Оператор $A_R = A_\gamma R_Q$, где

$$A_\gamma u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u,$$

$u \in H^2(0,d) \cap H^1_\gamma(0,d)$. Задача (3.1), (3.2) эквивалентна уравнению

$$A_\gamma u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u = f \tag{3.8}$$

с нелокальными краевыми условиями (3.6), (3.7).

В силу [4, теорема 1.2] оператор A_γ фредгольмов и $\operatorname{ind} A_\gamma = 0$. Следовательно, из [4, теорема 1.A] следует, что оператор A_R фредгольмов и $\operatorname{ind} A_R = 0$. □

Пример 3.1. Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-(R_Q v))'' = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.9}$$

где $Q = (0,2)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, R — разностный оператор, определенный формулой (2.7) (см. пример 2.1). Предположим, что оператор R_Q является невырожденным (условие (2.8)) и выполнено условие (2.9). Обозначим $u = R_Q v$.

В силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1, \ldots, 3)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,2)$ на $H^1_\gamma(0,2)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H^1_\gamma(0,2)$ — подпространство функций $u \in H^1(0,2)$, удовлетворяющих условиям (2.10), (2.11).

Краевая задача (3.9) эквивалентна уравнению

$$-u''(x) = f(x), \; x \in (0,2) \tag{3.10}$$

с нелокальными краевыми условиями (2.10), (2.11).

Решаем задачу с помощью программы Maple для значений параметров

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 1, a_2 = 2, \quad \tau = \sqrt{3} - 1, \quad f = 2.$$

По формуле (2.12) находим значения

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4}.$$

Решение u задачи (3.10), (2.10), (2.11) существует и единственно:

$$u(x) = x^2 - 4x - 6{,}17.$$

Поскольку оператор R_Q имеет ограниченный обратный, мы можем найти обобщенное решение v задачи (3.9) по формуле

$$v(x) = R_Q^{-1} u(x).$$

Находим решение задачи (3.9) на первом классе подобластей разбиения, используя обратную матрицу R_1^{-1}:

$$(U_1 v)(x) = \begin{pmatrix} 0{,}14x^2 - 2{,}77x, \\ 0{,}29x^2 - 1{,}08x - 0{,}96, \\ 0{,}29x^2 + 0{,}92x - 1{,}23, \\ 0{,}14x^2 - 2{,}77x \end{pmatrix}, \quad x \in Q_{11} = (0, 1-\tau).$$

Находим решение на втором классе подобластей разбиения, используя обратную матрицу R_2^{-1}:

$$(U_2 v)(x) = \begin{pmatrix} 0{,}25x^2 - 0{,}61x - 0{,}73 \\ 0{,}25x^2 + 0{,}38x - 0{,}96 \end{pmatrix}, \quad x \in Q_{21} = (1-\tau, 1).$$

Далее находим

$$v(x) = U^{-1}((Uv)(x)).$$

Производная функции v терпит разрывы в точках орбит границы, но гладкость решения внутри подобластей разбиения сохраняется.

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за внимание и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *32*, № 2. — С. 261–278.
2. *Ivanova E. P.* On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2019. — *239*, № 6. — С. 802–816.
3. *Ivanova E. P.* On smooth solutions of differential-Difference equations with incommensurable shifts of arguments// Math. Notes. — 2019. — *105*, № 1. — С. 140–144.
4. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: elpaliv@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-613-622 UDC 517.929

Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations with Incommeasurable Shifts of Arguments Reducible to Nonlocal Problems

© 2019 **E. P. Ivanova**

Abstract. We consider boundary-value problems for differential-difference equations containing incommeasurable shifts of arguments in higher-order terms. We prove that in the case of finite orbits of boundary points generated by the set of shifts of the difference operator, the original problem is reduced to the boundary-value problem for differential equation with nonlocal boundary conditions.

REFERENCES

1. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **32**, No. 2, 261–278 (in Russian).
2. E. P. Ivanova, “On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2019, **239**, No. 6, 802–816.
3. E. P. Ivanova, “On smooth solutions of differential-Difference equations with incommensurable shifts of arguments,” *Math. Notes*, 2019, **105**, No. 1, 140–144.
4. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and aplications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

E. P. Ivanova
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: elpaliv@yandex.ru

©Peoples’ Friendship University of Russia, 2019

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 623–634

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-623-634 УДК 514.13+514.132

О ПРИМЕНЕНИИ СОВРЕМЕННОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛЫ СФОРЦА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБЪЕМОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ТЕТРАЭДРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. **В. А. КРАСНОВ**

Аннотация. В настоящей работе мы, используя современное доказательство формулы Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра, предложенное Н. В. Абросимовым и А. Д. Медных, выведем новые формулы, выражающие объемы гиперболических тетраэдров специального вида (ортосхемы и тетраэдры с группой симметрии S_4) через двугранные углы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Вычисление объемов неевклидовых многогранников является очень старой и сложной проблемой, которая и в настоящее время остается актуальной.

Первые результаты о вычислении объемов неевклидовых многогранников специального вида были получены Н. И. Лобачевским [3], Я. Бойяи [5] и Л. Шлефли [14], которые вычислили объем ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра).

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь сравнительно недавно эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [6], Дж. Мураками и У. Яно [13], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [12], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [7], а также Дж. Мураками [11].

Однако формула, выражающая объем произвольного неевклидова тетраэдра через двугранные углы, впервые была получена еще в 1906 году Г. Сфорца [15]. Оригинальное доказательство этой формулы основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама [15]. Однако позднее, в работе Н. В. Абросимова и А. Д. Медных [4], было предложено новое доказательство формулы Сфорца, которое базируется на использовании дифференциальной формулы Шлефли [14] и рассмотрении деформации, при которой меняется только один двугранный угол тетраэдра.

Известно, что в случае многогранника специального вида формула для вычисления его объема существенно упрощается. Этот факт был замечен самим Н. И. Лобачевским, который еще в 1835 году вычислил объем идеального гиперболического тетраэдра, а в 1982 году Дж. Милнор [10] представил этот результат в более элегантной форме.

В настоящей работе мы, используя современное доказательство Абросимова—Медных формулы Сфорца, выведем формулу, выражающую объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через двугранные углы, а также получим новые альтернативные формулы для объема гиперболической ортосхемы. Мы увидим, что если тетраэдр задается малым числом независимых

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100».

©Российский университет дружбы народов, 2019

параметров, то данный подход зачастую приводит к довольно простым и обозримым формулам объема.

1. Некоторые предварительные результаты

Пусть $\mathbb{H}^3$ и $\mathbb{S}^3$ — гиперболическое пространство размерности $n = 3$ и трехмерная сфера с постоянными кривизнами $K = -1$ и $K = 1$ соответственно.

Одним из основных инструментов при вычислении объемов неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Данная формула была доказана Л. Шлефли [14] для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [9] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 1.1 (дифференциальная формула Шлефли)**.** *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается по формуле*:

$$K\,dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\,d\alpha_i, \tag{1.1}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

Приведем теперь некоторые вспомогательные результаты, касающиеся произвольных неевклидовых тетраэдров.

Пусть T — гиперболический (или сферический) тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы (рис. 1).

Обозначим через

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij-й минор матрицы G.

В следующей теореме содержатся некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер неевклидова тетраэдра.

Теорема 1.2. *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический* (*сферический*) *тетраэдр* (*рис.* 1) *с матрицей Грама* (1.2). *Кроме того, пусть l_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины v_i и v_j. Тогда*:

(i) $\det G < 0$ $(\det G > 0)$;

(ii) $c_{ii} > 0$;

(iii) $\operatorname{ch} l_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$ $\quad \Bigl(\cos l_{ij} = \dfrac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}\Bigr)$.

В свою очередь, критерии существования гиперболического и сферического тетраэдра с наперед заданным набором двугранных углов задаются следующими теоремами (см. [2, 16]).

Теорема 1.3. *Для существования компактного гиперболического тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$ необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G вида* (1.2) *имела сигнатуру* $(3, 1)$, *а все элементы матрицы H были положительные.*

Теорема 1.4. *Для существования сферического тетраэдра $T = T(A, B, C, D, E, F)$ необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G вида* (1.2) *была положительно определена.*

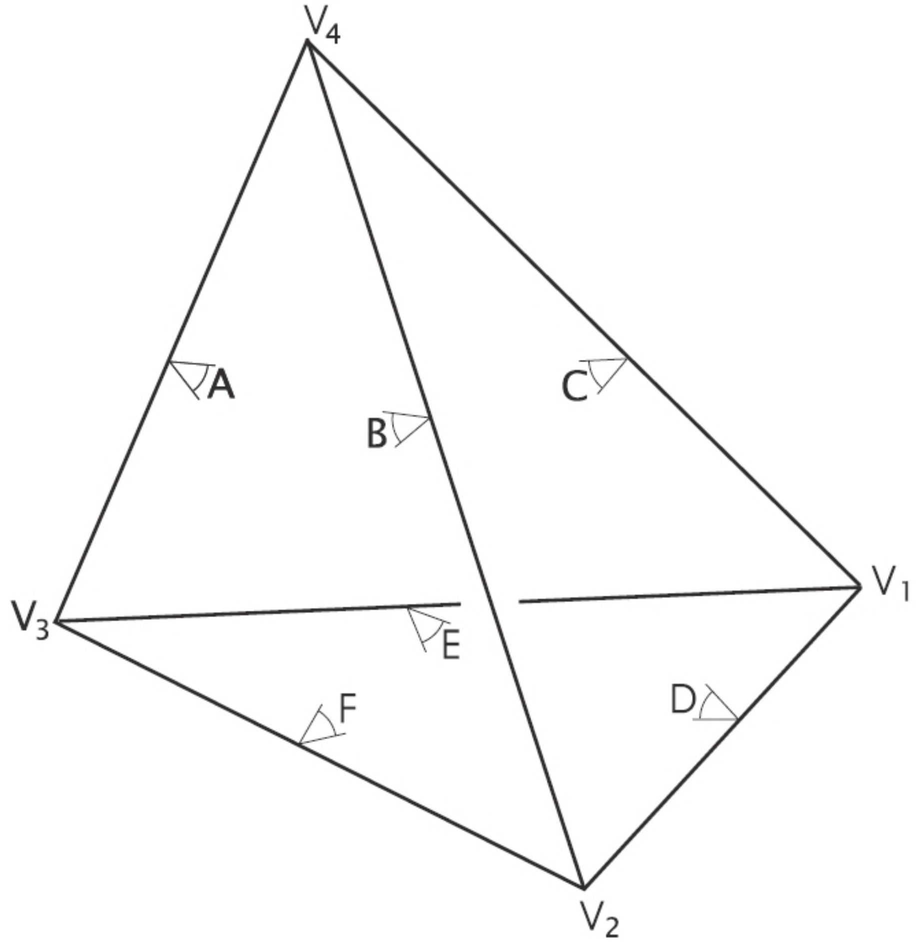

Рис. 1

Наконец, нам понадобится также следующее утверждение, впервые доказанное Якоби (см., напр., [4]).

Теорема 1.5 (Якоби). *Пусть* $M = \langle m_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$ — *матрица с определителем*

$$\Delta = \det M.$$

Далее, пусть $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$, *где*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

а M_{ij} — ij*-й минор матрицы* G. *Тогда для любых* $k, 1 \leqslant k \leqslant n-1$ *имеет место равенство*:

$$\det\langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,k} = \Delta^{k-1} \det\langle m_{ij} \rangle_{i,j=k+1,\dots,n}. \tag{1.3}$$

2. Формула Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра

Как было отмечено во введении к настоящей работе, задача о вычислении объема произвольного неевклидова тетраэдра через двугранные углы впервые была решена в 1906 году Г. Сфорца.

Оригинальное доказательство формулы Сфорца, помимо использования дифференциального тождества Шлефли (1.1), основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама [15]. В данном разделе будет приведено современное доказательство данной формулы, принадлежащее Н. В. Абросимову и А. Д. Медных [4]. Схема изложенного ниже доказательства будет использоваться нами для вывода формул объема гиперболических тетраэдров специального вида.

Теорема 2.1 (G. Sforza, 1907). *Пусть T — произвольный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$ (рис. 1) с матрицей Грама* (1.2). *Будем рассматривать*

$$\mathrm{det}G = \mathrm{det}G(A)$$

как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра $V = V(T)$ задается формулой:

$$V = \frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A} \ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}dA, \tag{2.1}$$

где угол A_0 есть решение уравнения $\mathrm{det}G(A) = 0$, а $c_{34} = c_{34}(A)$ — алгебраическое дополнение к элементу 34 *матрицы $G(A)$.*

Доказательство. (Абросимов, Медных, 2014). Обозначим $\det G$ через Δ, а длину ребра двугранного угла A через l_A. К матрице G применим формулу (1.3). При $n = 4$ и $k = 2$ имеем:

$$c_{33}c_{44} - c_{34}^2 = \Delta(1 - \cos^2 A).$$

Применяя формулу (iii) теоремы 1.2, получим

$$\operatorname{ch} l_A = \frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} l_A = \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_A - 1} = \sqrt{\frac{c_{34}^2 - c_{33}c_{44}}{c_{33}c_{44}}} = \frac{\sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Так как

$$\exp(\pm l_A) = \operatorname{ch} l_A \pm \operatorname{sh} l_A,$$

то:

$$\exp(\pm l_A) = \frac{c_{34} \pm \sqrt{-\Delta}\sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Таким образом,

$$\exp(2l_A) = \frac{\exp(l_A)}{\exp(-l_A)} = \frac{c_{34} + \Delta\sin A}{c_{34} - \Delta\sin A}$$

и

$$l_A = \frac{1}{2}\ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}.$$

Теперь запишем для тетраэдра T формулу Шлефли (1.1):

$$-dV = \frac{1}{2}l_A dA.$$

Учтем тот факт, что $\Delta \to 0$ при $A \to A_0$. Следовательно, $V \to 0$ при $A \to A_0$. Наконец, интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$V = \int\limits_{A_0}^{A}\left(-\frac{l_A}{2}\right)dA = \frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A}\ln\frac{c_{34} - \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + \sqrt{-\mathrm{det}G(A)}\sin A}dA.$$

□

В свою очередь, следующая теорема представляет собой сферический вариант формулы Сфорца.

Теорема 2.2. *Пусть T — произвольный сферический тетраэдр (рис. 1) с матрицей Грама* (1.2). *Будем рассматривать*

$$G = G(A)$$

как функцию от двугранного угла A. Тогда объем тетраэдра $V = V(T)$ задается формулой:

$$V = \frac{1}{4i}\int\limits_{A_0}^{A}\ln\frac{c_{34} - i\sqrt{\mathrm{det}G(A)}\sin A}{c_{34} + i\sqrt{\mathrm{det}G(A)}\sin A}dA, \tag{2.2}$$

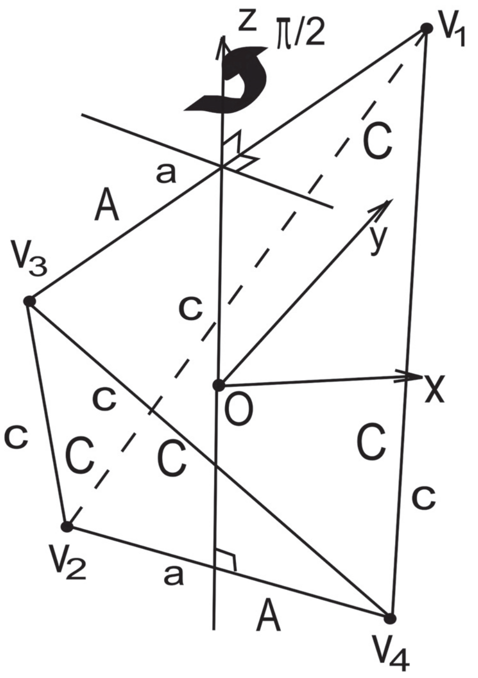

Рис. 2. Тетраэдр с группой симметрии S_4.

где угол A_0 — *решение уравнения* $\det G(A) = 0$, *а* $c_{34} = c_{34}(A)$ *есть алгебраическое дополнение к элементу* 34 *матрицы* $G(A)$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству для гиперболического случая.

3. Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4

В настоящем разделе будут приведены формулы, выражающие объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через его *двугранные углы*.

Определение 3.1. Мы скажем, что тетраэдр T имеет *группу симметрии* S_4, если он остается инвариантным относительно поворота вокруг некоторой оси на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и последующего отражения относительно перпендикулярной к ней плоскости.

Введем прямоугольную систему координат Oxyz и рассмотрим тетраэдр T с группой симметрии S_4, который переводится в себя вращением вокруг оси Oz на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и последующим отражением относительно плоскости Oxy (рис. 2).

Из определения 3.1 следует, что рассматриваемый гиперболический тетраэдр с группой симметрии S_4 однозначно с точностью до движения определяется двумя независимыми параметрами (двугранными углами) A и C. Однако для вычисления объема такого тетраэдра можно использовать длины ребер a и c, связанные с двугранными углами формулами [1]:

$$\cos A = \frac{\mathrm{ch} a + \mathrm{ch}^2 a - 2\mathrm{ch}^2 c}{1 + \mathrm{ch} a - 2\mathrm{ch}^2 c},$$

$$\cos C = \frac{\mathrm{ch} c(1 - \mathrm{ch} a)}{1 + \mathrm{ch} a - 2\mathrm{ch}^2 c}.$$

Таким образом, $T = T(A, C) = T(a, c)$ (см. рис. 2).

Формула объема, выражающая объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 через *длины ребер*, выражается теоремой [1].

Теорема 3.1 (Абросимов, Вьонг Хыу, 2017). *Объем $V = V(T)$ гиперболического тетраэдра $T = T(a,c)$ с группой симметрии S_4, заданного длинами ребер a и c, может быть вычислен по одной из следующих формул*:

$$V(T) = \int_0^a \frac{a((1+\mathrm{ch}a)^2 - 4\mathrm{ch}^2 c\cdot \mathrm{ch}a) + 4c\cdot \mathrm{sh}c\cdot \mathrm{ch}c\cdot \mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}2c - \mathrm{ch}a)\sqrt{4\mathrm{ch}^2 c - (1+\mathrm{ch}a)^2}}da,$$

$$V(T) = \int_{\mathrm{arch}(\mathrm{ch}a+1)/2}^{c} \frac{2c(1-\mathrm{ch}a)(1+\mathrm{ch}a + 2\mathrm{ch}^2 c) + 4a\cdot \mathrm{sh}c\cdot \mathrm{ch}c\cdot \mathrm{sh}a}{(\mathrm{ch}2c - \mathrm{ch}a)\sqrt{4\mathrm{ch}^2 c - (1+\mathrm{ch}a)^2}}dc.$$

Подробное доказательство теоремы 3.1 приведено в работе [1] и основано на подходе, при котором соответствующий евклидов многогранник помещается в проективную модель Кэли—Клейна гиперболического пространства.

Вычислим теперь объем гиперболического тетраэдра $T = T(A,C)$ с группой симметрии S_4 через *двугранные углы*.

Прежде чем перейти к вычислению объема, исследуем сначала проблему существования $T = T(A,C)$ в $\mathbb{H}^3$.

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Для существования компактного гиперболического тетраэдра T с группой симметрии S_4, заданного набором двугранных углов (A,B), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств*:

$$\begin{cases} 0 < C < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 - 2\cos^2 C < \cos A < 1 - 2\cos C, \\ \cos A + 2\cos A\cos^2 C + 2\cos^2 C - \cos^3 A > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.1 воспользуемся теоремой 1.3.

Рассмотрим гиперболический тетраэдр $T = T(A,C)$ с группой симметрии S_4 и его матрицу Грама $G = G(T)$:

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos C & -\cos C \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos C \\ -\cos C & -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos C & -\cos C & -\cos A & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями найдем алгебраические дополнения (элементы присоединенной матрицы) и определитель Δ матрицы $G = G(T)$. Имеем:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = (1+\cos A)(1 - \cos A - 2\cos^2 C),$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{34} = c_{43} = \cos A + 2\cos A\cos^2 C + 2\cos^2 C - \cos^3 A,$$

$$c_{13} = c_{31} = c_{14} = c_{41} = c_{24} = c_{42} = \cos C\cdot(1+\cos A)^2,$$

$$\Delta = (1+\cos A)^2(\cos A - 1 - 2\cos C)(\cos A - 1 + 2\cos C).$$

Таким образом, система (3.1) получается из неравенств $c_{ij} > 0, \Delta < 0$, которые непосредственно следуют из теоремы 1.3. □

Переходим теперь к вычислению объема гиперболического тетраэдра T с группой симметрии S_4. Объем такого тетраэдра может быть вычислен с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть $T = T(A,C)$ — компактный тетраэдр с группой симметрии S_4 в $\mathbb{H}^3$ (рис. 2). Тогда его объем $V = V(T)$ выражается формулой*:

$$V(T) = -2\int_{\arccos\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}^{C} \mathrm{arch}\frac{(1+\cos A)^2\cos t}{1 - 2\cos A\cos^2 t - 2\cos^2 t - \cos^2 A}dt. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3.3 воспользуемся схемой доказательства Абросимова—Медных формулы Сфорца (2.1) (см. теорему 2.1 и ее доказательство).

Рассмотрим сначала деформацию тетраэдра $T = T(A, C)$, при которой изменяется только один двугранный угол C (при этом угол A мы считаем фиксированным), т. е. $T = T(C)$. В этом случае формула Шлефли для дифференциала объема $V = V(C)$ тетраэдра T примет вид:

$$dV = -2 \cdot l \cdot dC, \tag{3.3}$$

где l — длина ребра V_2V_4 (рис. 2).

Вычислим теперь величину l с помощью формулы (iii) теоремы 1.2. Имеем:

$$l = \operatorname{arch}\frac{(1+\cos A)^2\cos C}{1 - 2\cos A\cos^2 C - 2\cos^2 C - \cos^2 C}. \tag{3.4}$$

В свою очередь, решая уравнение $\Delta = 0$ относительно C, получаем:

$$C = \arccos\left(\frac{1-\cos A}{2}\right).$$

Таким образом, формула (3.2) получается после интегрирования выражения (3.3) (после подстановки в него формулы (3.4) в пределах от $\arccos\left(\dfrac{1-\cos A}{2}\right)$ до C. □

Очевидно, что правильный тетраэдр $T = T(A)$ (т. е. тетраэдр, у которого все двугранные углы равны) является частным случаем тетраэдра с группой симметрии S_4 (при $A = B$). Формула объема гиперболического правильного тетраэдра, ранее полученная в работе [4], задается следующей теоремой.

Теорема 3.4 (Абросимов, Вьонг Хыу, 2017)**.** *Объем $V = V(T)$ правильного гиперболического тетраэдра $T = T(A)$ находится по формуле*:

$$V = -3\int\limits_{\arccos\frac{1}{3}}^{A} \operatorname{arch}\left(\frac{\cos t}{1-2\cos t}\right) dt. \tag{3.5}$$

В свою очередь, используя теорему 1.3, нетрудно доказать критерий существования гиперболического правильного тетраэдра. Справедлива

Теорема 3.5. *Для существования компактного правильного гиперболического тетраэдра $T = T(A)$ необходимо и достаточно, чтобы его двугранный угол A удовлетворял следующему двойному неравенству*:

$$\frac{1}{3} < \cos A < \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу Грама тетраэдра $T = T(A)$:

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos A & -\cos A \\ -\cos A & 1 & -\cos A & -\cos A \\ -\cos A & -\cos A & 1 & -\cos A \\ -\cos A & -\cos A & -\cos A & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями найдем элементы присоединенной матрицы для матрицы $G(T)$, а также собственные значения λ_i матрицы $G(T)$:

$$c_{ij} = \begin{cases} (\cos A + 1)^2(1 - 2\cos A), & \text{если } i = j, \\ \cos A \cdot (\cos A + 1)^2, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1 - 3\cos A, \quad \lambda_{2,3,4} = 1 + \cos A. \tag{3.7}$$

Таким образом, неравенство (3.6) получается после применения утверждения теоремы 1.3 к формулам (3.7). □

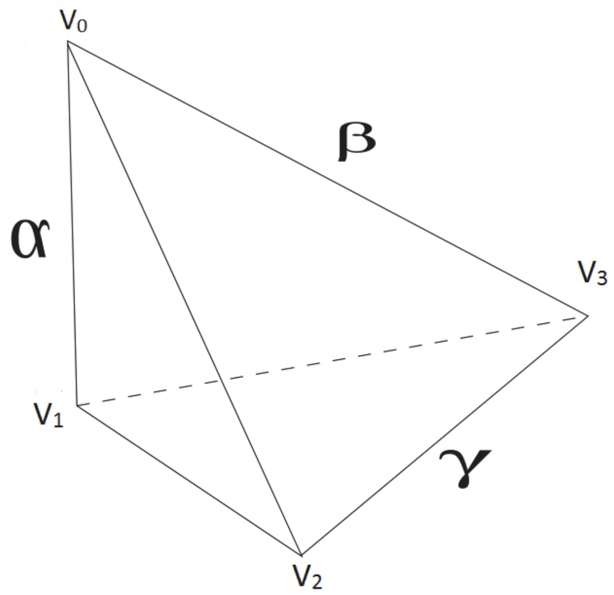

Рис. 3. Ортосхема (бипрямоугольный тетраэдр) $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Для численной проверки результата теоремы 3.3 вычислим сначала по формуле (3.2) объем правильного гиперболического тетраэдра (при $A = C$), а затем сравним полученный результат с формулой (3.5).

Пример 3.1. Рассмотрим правильный гиперболический тетраэдр с двугранным углом $A = \arccos\dfrac{8}{21}$. Вычислив его объем V в среде MathCad по формуле (3.5), получим, что $V = 0{,}012$.

В свою очередь, при вычислении объема гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4 по формуле (3.2) (если $A = C = \arccos\dfrac{8}{21}$), мы получим тот же самый результат.

4. Объем гиперболической ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра)

Заключительный раздел настоящей работы посвящен формулам объема гиперболической ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра).

Определение 4.1. *Ортосхемой* (или *бипрямоугольным тетраэдром*) называется тетраэдр $\mathrm{V_0V_1V_2V_3}$, у которого ребро $\mathrm{V_0V_1}$ перпендикулярно плоскости $\mathrm{V_1V_2V_3}$, а ребро $\mathrm{V_2V_3}$ перпендикулярно плоскости $\mathrm{V_0V_1V_2}$ (рис. 3).

Из определения 4.1 следует, что три из шести двугранных углов ортосхемы — прямые. Обозначим остальные углы через α, β и γ, как показано на рис. 3. Таким образом, $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Замечание 4.1. Ортосхема особенно интересна тем, что всякий тетраэдр можно разбить на бипрямоугольные тетраэдры, опустив из какой-либо его вершины перпендикуляры на плоскость противоположной грани и на прямые, ограничивающие эту грань (рис. 4). Таким образом, объем любого тетраэдра можно представить в виде алгебраической суммы объемов ортосхем.

Формула, выражающая объем гиперболической ортосхемы через двугранные углы, впервые была получена Н. И. Лобачевским [3].

Теорема 4.1 (Лобачевский, 1836). *Пусть T — гиперболический бипрямоугольный тетраэдр $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ с двугранными углами α, β, γ (см. рис. 3). Тогда его объем $V = V(T)$ задается формулой*:

$$V(T) = \frac{1}{4}[\Lambda(\alpha+\delta)-\Lambda(\alpha-\delta)+\Lambda(\gamma+\delta)-\Lambda(\gamma-\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}-\beta+\delta)+\Lambda(\frac{\pi}{2}-\beta-\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}+\delta)-\Lambda(\frac{\pi}{2}-\delta)], \quad (4.1)$$

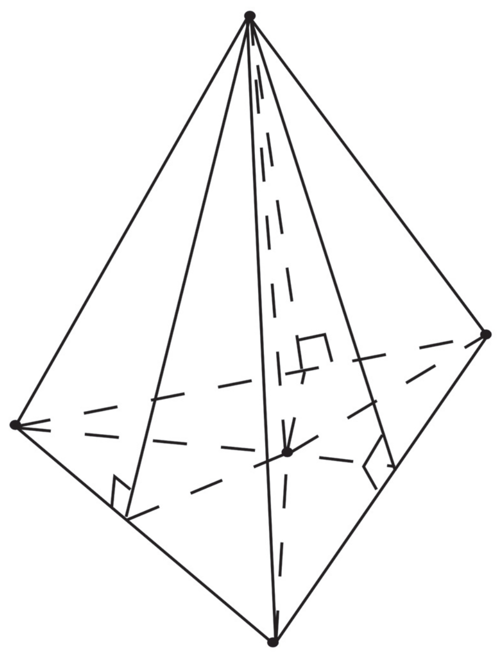

Рис. 4. Разбиение тетраэдра на ортосхемы

где

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\,\sin t|dt,$$

а острый угол δ *определяется из уравнения*:

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Замечание 4.2. Функция $\Lambda = \Lambda(x)$, введенная Дж. Милнором [10], называется *спецфункцией Лобачевского*. Стоит отметить, что Н. И. Лобачевский в своих исследованиях по «воображаемой геометрии» [3] для вычисления объемов использовал функцию:

$$L(x) = -\int_0^x \ln|\cos t|dt,$$

связанную с функцией $\Lambda = \Lambda(x)$ соотношением:

$$L(x) = \Lambda(x + \frac{\pi}{2}) + x\ln 2.$$

Формула (4.1), выражающая объем гиперболической ортосхемы в виде линейной комбинации семи значений спецфункции Лобачевского, была выведена Р. Келлерхальц и Э. Б. Винбергом в работах [2, 8].

Также в работе [2] показано, что для существования компактной гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha,\beta,\gamma)$ необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\beta,\gamma < \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin^2\alpha\cdot\sin^2\gamma - \cos^2\beta < 0, \\ \alpha + \beta > \dfrac{\pi}{2}, \\ \gamma + \beta > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Как и в случае гиперболического тетраэдра с группой симметрии S_4, мы поставим задачу получить формулы объема гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$, используя формулу Сфорца и схему ее доказательства, предложенного Н. В. Абросимовым и А. Д. Медных (см. теорему 2.1).

Рассмотрим сначала деформацию T, при которой изменяется только один двугранный угол α. В этом случае формула Шлефли для объема V тетраэдра $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ примет вид:

$$dV = -\frac{1}{2} l_\alpha dA, \tag{4.2}$$

где l_α — длина ребра двугранного угла α.

Используя формулу (iii) теоремы 1.2, выразим l_α через двугранные углы тетраэдра. Имеем:

$$l_\alpha = \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha}}. \tag{4.3}$$

Выразим теперь двугранный угол α из уравнения

$$\det G = 0,$$

где G — матрица Грама ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma \\ 0 & 0 & -\cos\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями находим:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right). \tag{4.4}$$

Подставив формулу (4.3) в (4.2) и проинтегрировав полученную формулу от (4.4) до A, мы получим, что объем V гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть найден по формуле:

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt.$$

Если рассмотреть деформации ортосхемы T, при которых изменяется только лишь двугранный угол β (или γ), то проделав аналогичные выкладки, мы получим следующие формулы для вычисления объема V:

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arccos(\sin\alpha \sin\gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \cos\gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2\gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2\alpha - \cos^2 t)}} dt,$$

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.2. *Объем $V = V(T)$ гиперболической ортосхемы $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть вычислен по одной из следующих трех формул*:

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos\gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2\beta - \cos^2 t}} dt, \tag{4.5}$$

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arccos(\sin\alpha \sin\gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \cos\gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2\gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2\alpha - \cos^2 t)}} dt, \tag{4.6}$$

$$V = -\frac{1}{2} \int\limits_{\arcsin\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos\alpha \sin t}{\sqrt{1-\cos^2\beta - \cos^2 t}} dt. \tag{4.7}$$

Пример 4.1. Рассмотрим гиперболическую ортосхему $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$, двугранные углы которой равны:

$$\alpha = \gamma = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = 1{,}0001 \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Вычислив объем $V = V(T)$ данного тетраэдра по формулам (4.1), (4.5)–(4.7), мы получим одинаковый результат для $V = V(T)$:

$$V(T) = 0{,}253.$$

Замечание 4.3. Формулы (3.2), (4.5)–(4.7) можно обобщить на случай сферического пространства $\mathbb{S}^3$. В этом случае в правых частях соответствующих формул для сферических тетраэдров будет отсутствовать знак «минус», а вместо функции $y = \operatorname{arch}(x)$ под знаками интегралов будет присутствовать обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$. Это следует из формулы (iii) теоремы 1.2, формулы Шлефли (1.1) и схемы доказательства Абросимова—Медных формулы Сфорца (см. теоремы 2.1 и 2.2 раздела 2).

Автор благодарит В. П. Лексина за полезные обсуждения и ценные замечания, способствовавшие написанию настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В., Выонг Хыу Б.* Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрий S_4// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2017. — *23*, № 4. — С. 7–17.
2. *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2. — С. 17–46.
3. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия// В сб.: «Полное собр. соч. Т. 3». — М.—Л., 1949.
4. *Abrosimov N. V., Mednykh A. D.* Volumes of polytopes in spaces of constant curvature// Rigidity and Symmetry. — 2014. — *70*. — С. 1–26.
5. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
6. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — С. 347–366.
7. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Russ. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 2. — С. 346–348.
8. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra// Math. Ann. — 1989. — *285*. — С. 541–569.
9. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — *1*. — С. 337–340.
10. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — С. 307–332.
11. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv. — 2011. — 1011.2584v4.
12. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — С. 153–163.
13. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Comm. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — С. 379–400.
14. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.
15. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — *8*, № 3. — С. 3–66.
16. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — *581*. — С. 249–265.

В. А. Краснов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: krasnov_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-623-634 UDC 514.13+514.132

On Application of Contemporary Proof of the Sforza Formula to Computation of Volumes of Hyperbolic Tetrahedra of Special Kind

© 2019 **V. A. Krasnov**

Abstract. In this paper, we use the contemporary proof (by Abrosimov and Mednykh) of the Sforza formula for volume of an arbitrary non-Euclidean tetrahedron to derive new formulas that express volumes of hyperbolic tetrahedra of special kind (orthoschemes and tetrahedra with the symmetry group S_4) via dihedral angles.

REFERENCES

1. N. V. Abrosimov and B. Vuong Huu, "Obyem giperbolicheskogo tetraedra s gruppoy simmetriy S_4" [Volume of hyperbolic tetrahedron with the group of symmetry S_4], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2017, **23**, No. 4, 7–17 (in Russian).
2. E. B. Vinberg, "Obyemy neevklidovykh mnogogrannikov" [Volumes of non-Euclidean polyhedra], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 2, 17–46 (in Russian).
3. N. I. Lobachevskiy, "Voobrazhaemaya geometriya" [Imaginary geometry], In: *Polnoe sobr. soch. T. 3* [Full Collection of Works. Vol. 3], Moscow–Leningrad, 1949 (in Russian).
4. N. V. Abrosimov and A. D. Mednykh, "Volumes of polytopes in spaces of constant curvature," *Rigidity and Symmetry*, 2014, **70**, 1–26.
5. J. Bolyai, "Appendix. The theory of space," In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
6. Yu. Cho and H. Kim, "On the volume formula for hyperbolic tetrahedra," *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
7. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, "A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron," *Russ. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 2, 346–348.
8. R. Kellerhals, "On the volume of hyperbolic polyhedra," *Math. Ann.*, 1989, **285**, 541–569.
9. H. Kneser, "Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie," *Deutsche Math.*, 1936, **1**, 337–340.
10. J. Milnor, "Hyperbolic geometry: the first 150 years," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
11. J. Murakami, "The volume formulas for a spherical tetrahedron," *Arxiv*, 2011, 1011.2584v4.
12. J. Murakami and A. Ushijima, "A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths," *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
13. J. Murakami and M. Yano, "On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron," *Comm. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
14. L. Schläfli, "Theorie der vielfachen Kontinuität," In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.
15. G. Sforza, "Spazi metrico-proiettivi," *Ric. Esten. Different. Ser.*, 1906, **8**, No. 3, 3–66.
16. A. Ushijima, "A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra," *Non-Euclid. Geom.*, 2006, **581**, 249–265.

V. A. Krasnov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `krasnov_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 635–654

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654 УДК 517.929

СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. **В. В. ЛИЙКО, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. Рассматриваются сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области. Показана взаимосвязь таких задач с нелокальными смешанными задачами для сильно эллиптических дифференциальных уравнений, а также их однозначная разрешимость.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений изучалась многими авторами: А. Б. Антоневичем [1], Ф. Хартманом и Г. Стампакья [15], В. С. Рабиновичем [7] и др. Интерес к этим уравнениям связан с их важными приложениями: к теории многослойных пластин и оболочек [17–19], к нелинейной оптике [10], к теории многомерных диффузионных процессов [19], к теории нелокальных эллиптических задач [2, 10, 13, 14, 19], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [10, 16, 20] и др.

Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [8, 10, 19], см. также имеющуюся там библиографию. В работе [19] была доказана эквивалентность задачи Дирихле для эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптического дифференциального уравнения с нелокальными условиями на сдвигах границы. Нелинейные эллиптические функционально-дифференциальные уравнения и их применение к исследованию нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными условиями рассматривались в работах [12, 21].

Смешанные краевые задачи для сильно эллиптических систем дифференциально-разностных уравнений, описывающие упругие деформации трехслойной пластины с гофрированным заполнителем, рассматривались в [18].

Систематическое исследование широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений методами спектральной теории содержится в работах [3–5].

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» и гранта РФФИ № 17-01-00401.

©Российский университет дружбы народов, 2019

В настоящей работе исследуется краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в цилиндрической области. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости такой задачи и о гладкости ее обобщенных решений. Эти результаты применяются для доказательства однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для уравнения Пуассона. Доказана теорема о гладкости обобщенных решений такой задачи. В свою очередь, эти результаты применяются к исследованию гладкости обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений, которые не обязательно являются сильно эллиптическими.

1. Свойства разностных операторов

Приведем вспомогательные результаты о свойствах разностных операторов в цилиндре, доказательства см. в [19, §8, гл. II].

1.1. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вида

$$Ru(x) = \sum_{j=-k}^{k} a_j u(x_1 + j, x_2, \dots, x_n), \tag{1.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$.

Пусть $Q = (0, d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a, b)$, если $n = 2$).

Заметим, что оператор R нелокальный: сдвиги по первой переменной могут отображать точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q$ в точки $(x_1 + j, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus Q$.

Поэтому естественно ввести ограниченный разностный оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_2(Q)$ нулем вне Q, а $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Итак, оператор R_Q действует следующим образом на функцию $u(x)$: сначала мы продолжаем эту функцию нулем вне Q, затем применяем к полученному продолжению разностный оператор R, действующий во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и, наконец, рассматриваем сужение функции $RI_Q u(x)$ на Q.

Не ограничивая общности, будем считать, что $d = k + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$.

Очевидно, операторы R_Q, $R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограниченные, причем

$$R_Q^* = P_Q R^* I_Q, \quad R^* u(x) = \sum_{j=-k}^{k} \overline{a}_{-j} u(x_1 + j, x_2, \dots, x_n). \tag{1.2}$$

1.2. Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}\Big)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}$, где $N = N(s)$; $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $s = 1$, если $\theta = 1$; $N(s) = k + 1$ при $s = 1$; $N(s) = k$ при $s = 2$;

$$Q_{1l} = (l - 1, l - 1 + \theta) \times G \quad (l = 1, \dots, k + 1),$$
$$Q_{2l} = (l - 1 + \theta, l) \times G \quad (l = 1, \dots, k).$$

Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\Big)$.

Очевидно,

$$L_2(Q) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{s=1,2} L_2\left(\bigcup\limits_{l} Q_{sl}\right), & \text{если} \quad \theta < 1, \\ L_2\left(\bigcup\limits_{l} Q_{1l}\right), & \text{если} \quad \theta = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Множество подобластей $\{Q_{sl}\}$ обозначим через $\mathscr{R}$ и назовем *разбиением* области Q.

Очевидно следующее утверждение:

Лемма 1.1. $L_2(\bigcup\limits_l Q_{sl})$ — *инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_{l=1}^{N} Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x_1 + l - 1, x_2, \dots, x_n), \quad l = 1, \dots, N, \quad x \in Q_{s1}, \tag{1.4}$$

где

$$L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1}).$$

Введем матрицы R_1 порядка $(k+1) \times (k+1)$ с элементами

$$r_{ij}^1 = a_{j-i} \quad (i, j = 1, \dots, k+1) \tag{1.5}$$

и R_2 порядка $k \times k$ с элементами

$$r_{ij}^2 = a_{j-i} \quad (i, j = 1, \dots, k). \tag{1.6}$$

Матрица R_2 получается из матрицы R_1 вычеркиванием последнего столбца и последней строки. Справедлива следующая лемма (см. [19, лемма 8.6]):

Лемма 1.2. *Оператор* $R_{Qs} : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенный по формуле*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{1.7}$$

является оператором умножения на матрицу R_s. *Здесь* $s = 1, 2$, *если* $0 < \theta < 1$; $s = 1$, *если* $\theta = 1$; $N(s) = k + 1$ *при* $s = 1$; $N(s) = k$ *при* $s = 2$.

Из леммы 1.2 вытекает следующий результат:

Лемма 1.3. *Если* $\theta < 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1) \cup \sigma(R_2)$; *если* $\theta = 1$, *то* $\sigma(R_Q) = \sigma(R_1)$. *Каждая точка спектра* $\sigma(R_Q)$ *имеет бесконечную кратность.*

Определение 1.1. Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ называется *невырожденным*, если $0 \notin \sigma(R_Q)$. В противном случае он называется *вырожденным*.

Определение 1.2. Разностный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ называется *регулярным*, если $\det R_s \neq 0$ $(s = 1, 2)$.

Замечание 1.1. Если $\theta < 1$, в силу леммы 1.3 невырожденность оператора R_Q эквивалентна невырожденности матриц R_s $(s = 1, 2)$. Таким образом, в случае $\theta < 1$ регулярность оператора R_Q эквивалентна его невырожденности. Следовательно, регулярный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Если же $\theta = 1$, невырожденность оператора R_Q эквивалентна невырожденности матрицы R_1. В этом случае оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ имеет ограниченный обратный. Невырожденный оператор R_Q будет регулярным, если к тому же $\det R_2 \neq 0$.

Пример 1.1. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(Ru)(x) = u(x) + u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2), \tag{1.8}$$

и пусть

$$Q = \left(0, 2\frac{1}{3}\right) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из двух классов подобластей (см. рис. 1):

$$Q_{1l} = (l - 1, l - \frac{2}{3}) \times (0, 1) \quad (l = 1, 2, 3),$$

$$Q_{2l} = (l - \frac{2}{3}, l) \times (0, 1) \quad (l = 1, 2).$$

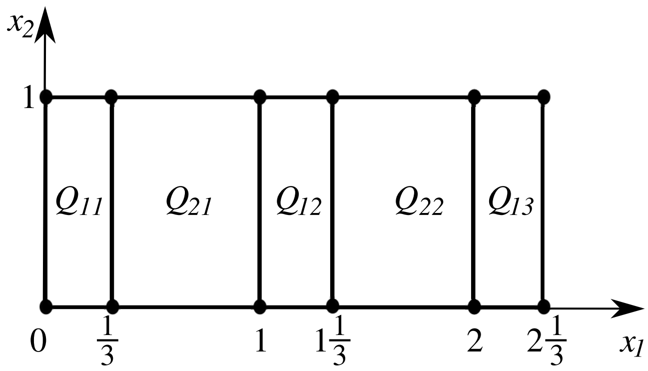

Рис. 1

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

В этом случае $\theta = \dfrac{1}{3} < 1$ и регулярность оператора R_Q эквивалентна его невырожденности. Так как

$$\det R_1 = -1, \quad \det R_2 = 0,$$

то оператор R_Q — вырожденный и нерегулярный.

Пример 1.2. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.8), и пусть $Q = (0,3) \times (0,1)$. Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_{1l} = (l-1, l) \times (0,1)$ $(l = 1,2,3)$ (см. рис. 2). Матрицы R_1 и R_2 имеют вид (1.9).

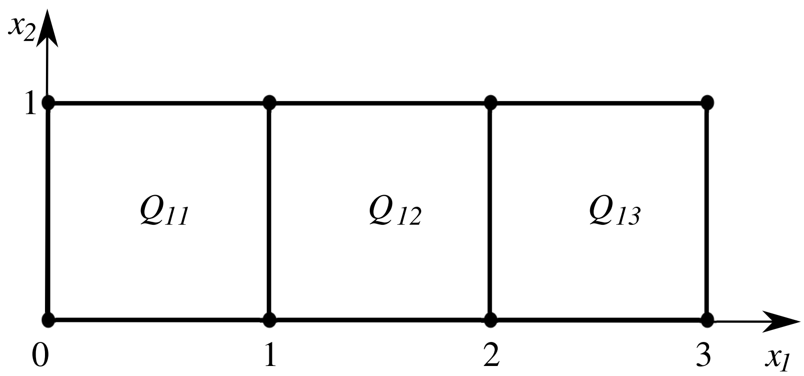

Рис. 2

В этом случае $\theta = 1$, $\det R_1 = -1$, $\det R_2 = 0$. Значит, оператор R_Q является невырожденным, однако при этом он нерегулярный.

Пример 1.3. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$(Ru)(x) = u(x) + 2u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2), \tag{1.10}$$

и пусть

$$Q = (0,3) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей (см. рис. 2)

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times (0,1) \quad (l = 1,2,3).$$

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

В этом случае $\theta = 1$,

$$\det R_1 = -3, \quad \det R_2 = -1.$$

Значит, оператор R_Q является невырожденным и регулярным.

2. Свойства разностных операторов в пространствах Соболева

2.1. Введем некоторые функциональные пространства.

Через $W_2^k(Q)$ обозначим пространство Соболева комплекснозначных функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(Q)$ до порядка k включительно, со скалярным произведением, заданным по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q \mathscr{D}^\alpha u \cdot \overline{\mathscr{D}^\alpha v} dx,$$

где

$$\mathscr{D}^\alpha = \mathscr{D}_1^{\alpha_1} \cdots \mathscr{D}_n^{\alpha_n}, \quad \mathscr{D}_j = -i(\partial / \partial x_j),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_j \geqslant 0.$$

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание множества финитных в Q, бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(Q)$ в пространстве $W_2^k(Q)$.

Пусть $S \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$-мерная поверхность класса C^k. Через $W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим пространство следов функций из $W_2^k(Q)$ с нормой

$$\|\phi\|_{W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)} = \inf \|u\|_{W_2^k(Q)} \quad (u \in W_2^k(Q) : u|_S = \phi).$$

Справедлива следующая лемма (доказательство см. в [19, §8, гл. II]):

Лемма 2.1. *Для любого $u \in L_2(Q)$ такого, что $u \in W_2^k(Q'_{sl})$ ($s = 1, 2$; $l = 1, \ldots, N$ при $\theta < 1$; $s = 1; l = 1, \ldots, N$ при $\theta = 1$; $N = k + 1$ при $s = 1$; $N = k$ при $s = 2$) имеем $R_Q u \in W_2^k(Q'_{sl})$ и*

$$\|R_Q u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leqslant c_1 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q'_{sj})}, \tag{2.1}$$

где $Q'_{sl} \subset Q_{sl}$ и $Q'_{sl} = Q'_{s1} + (l-1, 0, \ldots, 0)$ $(l = 1, \ldots, N)$.

Если, кроме того, $\det R_s \neq 0$ ($s = 1, 2$ при $\theta < 1$; $s = 1$ при $\theta = 1$), то $R_Q^{-1} u \in W_2^k(Q'_{sl})$ и

$$\|R_Q^{-1} u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q'_{sj})}. \tag{2.2}$$

Здесь постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от s и u.

Обозначим через $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0. \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ в $W_2^1(Q)$, при этом*

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j} \tag{2.4}$$

для любых $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Тогда, поскольку $R_Q u_{x_j} \in L_2(Q)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, достаточно показать, что для любого $v \in C_0^\infty(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = -\int\limits_Q R_Q u_{x_j} \overline{v} dx. \tag{2.5}$$

Действительно, из (2.5) будет следовать, что существует обобщенная производная $(R_Q u)_{x_j} \in L_2(Q)$ и

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j}.$$

Также из равенства (2.4) и ограниченности оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будет следовать ограниченность оператора $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_2(Q)$.

Покажем справедливость тождества (2.5).

2. Пусть $\theta < 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} \phi_i^+ &= u|_{x_1=i+0} && (i = 0, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^- &= u|_{x_1=i+\theta-1-0} && (i = 1, \dots, k+1), \\ \phi_i^- &= u|_{x_1=i-0} && (i = 1, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^+ &= u|_{x_1=i+\theta-1+0} && (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

По условию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Следовательно,

$$\phi_0^+ = 0, \tag{2.6}$$

$$\phi_j^+ = \phi_j^- \quad (j = 1, \dots, k), \tag{2.7}$$

$$\phi_{k+1,\theta}^- = 0, \tag{2.8}$$

$$\phi_{j,\theta}^+ = \phi_{j,\theta}^- \quad (j = 1, \dots, k). \tag{2.9}$$

В силу леммы 2.1 $R_Q u \in W^1_2(Q_{sl})$ $(s = 1, 2;\ l = 1, \dots, k+1$, если $s = 1; l = 1, \dots, k$, если $s = 2)$. Обозначим

$$v_i = v|_{x_1=i} \quad (i = 0, \dots, k),$$
$$v_{i,\theta} = v|_{x_1=i-1+\theta} \quad (i = 1, \dots, k+1).$$

Так как $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, то

$$v_0 = v_{k+1,\theta} = 0. \tag{2.10}$$

В силу леммы 1.1 $P_s R_Q = R_Q P_s$. Отсюда, а также из равенств (1.4)–(1.7), $v|_{\partial Q} = 0$ и формулы интегрирования по частям для подобластей Q_{sl} получим

$$\begin{aligned} \int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx &= \sum_s \sum_l \int\limits_{Q_{sl}} R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (U_s P_s R_Q u, U_s P_s v_{x_j}) dx = \\ &= \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u, U_s P_s v_{x_j}) dx = -\sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u_{x_j}, U_s P_s v) dx + \int\limits_G A(u,v) dx', \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$, $N = k+1$ при $s = 1$, $N = k$ при $s = 2$,

$$A(u,v) = -\sum_{i,l=0}^{k} a_{l-i} \phi_l^+ \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} \phi_l^- \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k+1} a_{l-i} \phi_{l,\theta}^- \overline{v}_{i,\theta} - \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} \phi_{l,\theta}^+ \overline{v}_{i,\theta}.$$

В силу равенств (2.6), (2.8) и (2.10) имеем

$$A(u,v) = \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_l^- - \phi_l^+) \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_{l,\theta}^- - \phi_{l,\theta}^+) \overline{v}_{i,\theta}.$$

Отсюда и из равенств (2.7) и (2.9) получим

$$A = 0. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12), используя равенства (1.4)–(1.7) и перестановочность операторов R_Q и P_s, выводим тождество

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = -\int\limits_Q R_Q u_{x_j} \cdot \overline{v} dx.$$

Таким образом, мы доказали интегральное тождество (2.5) в случае $\theta < 1$.

3. Пусть теперь $\theta = 1$. Обозначим

$$\phi_i^+ = u|_{x_1=i+0} \quad (i = 0, \dots, k),$$

$$\phi_i^- = u|_{x_1=i-0} \quad (i = 1, \dots, k+1).$$

По условию $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Следовательно,

$$\phi_0^+ = \phi_{k+1}^- = 0, \tag{2.13}$$

$$\phi_j^+ = \phi_j^- \quad (j = 1, \dots, k). \tag{2.14}$$

Из равенств (1.4)–(1.7), а также формулы интегрирования по частям для подобластей Q_{1l} получим

$$\int\limits_Q R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \sum_{l=1}^{k+1} \int\limits_{Q_{1l}} R_Q u \cdot \overline{v}_{x_j} dx = \int\limits_{Q_{11}} (U_1 R_Q u, U_1 v_{x_j}) dx =$$

$$= \int\limits_{Q_{11}} (R_1 U_1 u, U_1 v_{x_j}) dx = -\int\limits_{Q_{11}} (R_1 U_1 u_{x_j}, U_1 v) dx + \int\limits_G B(u,v) dx', \tag{2.15}$$

где

$$B(u,v) = -\sum_{i,l=0}^{k} a_{l-i} \phi_l^+ \overline{v}_i + \sum_{i,l=1}^{k+1} a_{l-i} \phi_l^- \overline{v}_i, \quad v_i = v|_{x_1=i} \quad (i = 0, \dots, k+1).$$

Так как $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, то $v_0 = v_{k+1} = 0$. Отсюда и из (2.13), (2.14) следует, что

$$B(u,v) = \sum_{i,l=1}^{k} a_{l-i} (\phi_l^- - \phi_l^+) \overline{v}_i = 0. \tag{2.16}$$

Вновь используя равенства (1.4)–(1.7), из (2.15), (2.16) получим (2.5). □

2.2. Далее мы докажем, что регулярный разностный оператор R_Q осуществляет изоморфизм между пространством $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ и подпространством функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Этот результат устанавливает связь между смешанной задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением со смешанными нелокальными условиями.

Введем матрицы R_1^1 (R_1^2) порядка $(k+1) \times k$, полученные из R_1 вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно. Обозначим через e_i и g_i $(i = 1, \dots, k+1)$ строки матриц R_1^1 и R_1^2 соответственно. В силу формул (1.5), (1.6) матрица порядка $k \times k$, полученная из R_1^1 вычеркиванием первой строки, совпадает с матрицей R_2.

Замечание 2.1. Пусть оператор R_Q регулярный. Тогда $\det R_2 \neq 0$. Следовательно, существуют такие коэффициенты γ_i^+, γ_i^- $(i = 1, \dots, k)$, что

$$e_1 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^+ e_{1+i}, \tag{2.17}$$

$$g_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^- g_{k+1-i}. \tag{2.18}$$

Обозначим через $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{cases} w|_{x_1=0} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^+ w|_{x_1=i}\,, \\ w|_{x_1=d} = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i^- w|_{x_1=d-i}\,, \end{cases} \tag{2.19}$$

где $\gamma = \{\gamma_i^\pm\}$,

$$\Gamma = \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x' \in G\} \cup \{x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n : x_1 = d, x' \in G\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть оператор* $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — *регулярный. Тогда* $R_Q : \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) \to W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — *изоморфизм.*

В силу леммы 2.1 доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству [9, лемма 6].

Пример 2.1. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.10), и пусть

$$Q = (0, 2) \times (0, 1).$$

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей (см. рис. 3)

$$Q_{1l} = (l - 1, l) \times (0, 1) \quad (l = 1, 2).$$

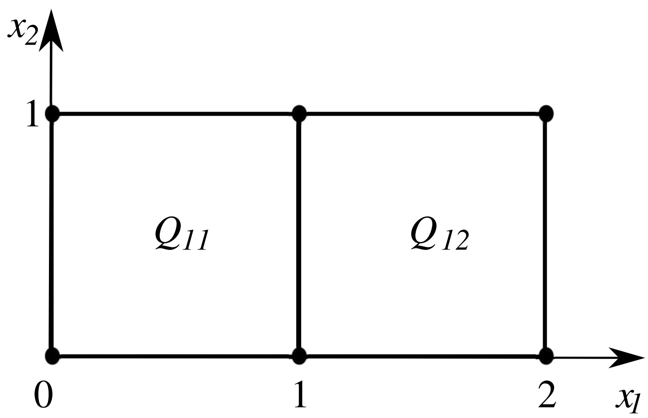

Рис. 3

Матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det R_1 = -1, \quad \det R_2 = 1.$$

Следовательно, оператор R_Q является регулярным. Тогда в силу теоремы 2.1 разностный оператор R_Q непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ на $W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$, где

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2, x_2 \in (0, 1)\};$$

$$\gamma = \{\gamma_1^\pm\}, \quad \gamma_1^+ = 2, \quad \gamma_1^- = 1,$$

$$\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q) = \{u \in W^1_2(Q) : u|_{x_1=0} = u|_{x_1=2} = 0\},$$

$W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — подпространство функций в $W^1_2(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w|_{x_1=0} = \gamma_1^+\, w|_{x_1=1}\,, \quad w|_{x_1=2} = \gamma_1^-\, w|_{x_1=1}\,.$$

2.3. При выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты регулярного оператора R_Q мы покажем, что если H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$ и $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, то подпространство $R_Q^{-1}(H_1)$ состоит из функций, имеющих нулевые следы на основаниях цилиндра Q.

Введем k-мерные векторы

$$b^1 = (a_k \dots a_1)^T, \quad b^2 = (a_{-1} \dots a_{-k})^T.$$

Теорема 2.2. *Пусть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный, и пусть*

$$\begin{cases} b^1 \neq 0,\ b^2 \neq 0, \ \text{если } \theta < 1, \\ \text{векторы } b^1 \text{ и } b^2 \text{ линейно независимы, если } \theta = 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Предположим также, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Тогда $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$.

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим случай $\theta < 1$.

1.1. Докажем, что $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$.

Пусть $u \in R_Q^{-1}(H_1)$. Тогда по условию теоремы $u \in W_2^1(Q)$. Следовательно, определены следы

$$\begin{aligned} \phi_i^+ &= u|_{x_1=i+0} && (i = 0, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^- &= u|_{x_1=i+\theta-1-0} && (i = 1, \dots, k+1), \\ \phi_i^- &= u|_{x_1=i-0} && (i = 1, \dots, k), \\ \phi_{i,\theta}^+ &= u|_{x_1=i+\theta-1+0} && (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Поскольку $u \in W_2^1(Q)$, то

$$\phi_j^+ = \phi_j^-, \quad j = 1, \dots, k, \tag{2.21}$$

$$\phi_{j,\theta}^+ = \phi_{j,\theta}^-, \quad j = 1, \dots, k. \tag{2.22}$$

По предположению $u \in R_Q^{-1}(H_1)$, H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Следовательно, $w = R_Q u \in W_2^1(Q)$ и справедливы следующие равенства для следов w в подобластях Q_{sl}:

$$w|_{x_1=t+0} = w|_{x_1=t-0}, \qquad t = 1, \dots, k, \tag{2.23}$$

$$w|_{x_1=\theta+t+0} = w|_{x_1=\theta+t-0}, \quad t = 0, \dots, k-1. \tag{2.24}$$

В силу (1.1) равенство (2.23) примет вид

$$\sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t+0} = \sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t-0} \quad (x' \in G; t = 1, \dots, k). \tag{2.25}$$

Полагая $j = t + i$, получим

$$\sum_{j=t-k}^{t+k} a_{j-t}\, u(x_1, x')\big|_{x_1=j+0} = \sum_{j=t-k}^{t+k} a_{j-t}\, u(x_1, x')\big|_{x_1=j-0} \quad (x' \in G; t = 1, \dots, k). \tag{2.26}$$

Так как функция $u(x)$ вне области Q принимает нулевые значения, то равенство (2.26) равносильно следующему:

$$\sum_{j=0}^{k} a_{j-t}\phi_j^+ = \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}\phi_j^- \quad (t = 1, \dots, k). \tag{2.27}$$

Из последнего равенства, используя (2.21), получим

$$0 = a_{-t}\phi_0^+ + \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}(\phi_j^+ - \phi_j^-) = a_{-t}\phi_0^+ \quad (t = 1, \dots, k). \tag{2.28}$$

Отсюда и из (2.20) следует, что
$$\phi_0^+ = 0. \tag{2.29}$$
Аналогично, используя равенства (2.24), получим
$$\phi_{k+1,\theta}^- = 0. \tag{2.30}$$
Таким образом, $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$.

1.2. Теперь покажем, что $H_1 \subset W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$.

Пусть $u \in H_1$. В силу вышедоказанного вложения $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, для функции $w = R_Q^{-1}u$ справедливо $w \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. В силу теоремы 2.1, $u = R_Q w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$.

2. Пусть теперь $\theta = 1$.

2.1. Докажем, что
$$R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q).$$
Пусть $u \in R_Q^{-1}(H_1)$. Тогда по условию теоремы $u \in W_2^1(Q)$. Следовательно, определены следы
$$\phi_i^+ = u|_{x_1=i+0} \quad (i = 0, \dots, k),$$
$$\phi_i^- = u|_{x_1=i-0} \quad (i = 1, \dots, k+1).$$
Поскольку $u \in W_2^1(Q)$, то
$$\phi_j^+ = \phi_j^- \qquad (j = 1, \dots, k). \tag{2.31}$$
По предположению $u \in R_Q^{-1}(H_1)$, H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$. Следовательно, $w = R_Q u \in W_2^1(Q)$ и справедливы следующие равенства для следов w в подобластях Q_{1l} ($l = 1, \dots, k+1$):
$$w|_{x_1=t+0} = w|_{x_1=t-0} \qquad (t = 1, \dots, k). \tag{2.32}$$
В силу (1.1) равенство (2.32) можно записать в виде
$$\sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t+0} = \sum_{i=-k}^{k} a_i\, u(x_1+i, x')\big|_{x_1=t-0} \qquad (x' \in G; t = 1, \dots, k). \tag{2.33}$$
Полагая $j = t + i$ и $u(x) = 0$ ($x \notin Q$), из последнего равенства мы получим
$$\sum_{j=0}^{k} a_{j-t}\phi_j^+ = \sum_{j=1}^{k+1} a_{j-t}\phi_j^- \qquad (t = 1, \dots, k). \tag{2.34}$$
Отсюда и из (2.31) следует, что
$$0 = a_{-t}\phi_0^+ - a_{k+1-t}\phi_{k+1}^- + \sum_{j=1}^{k} a_{j-t}(\phi_j^+ - \phi_j^-) = a_{-t}\phi_0^+ - a_{k+1-t}\phi_{k+1}^- \quad (t = 1, \dots, k). \tag{2.35}$$
По условию (2.20) векторы b^1 и b^2 линейно независимы. Поэтому
$$\phi_0^+ = \phi_{k+1}^- = 0.$$
Таким образом, $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$.

2.2. Справедливость вложения $H_1 \subset W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ доказывается аналогично части 1.1 текущего доказательства. □

Пример 2.2. Пусть разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид (1.10), и пусть
$$Q = (0, 2\frac{1}{3}) \times (0, 1).$$
Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из двух классов подобластей (см. рис. 1):
$$Q_{1l} = (l-1, l-\frac{2}{3}) \times (0,1) \quad (l = 1, 2, 3), \qquad Q_{2l} = (l-\frac{2}{3}, l) \times (0,1) \quad (l = 1, 2).$$
Матрицы R_1 и R_2 имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det R_1 = -3, \quad \det R_2 = -1,$$

оператор R_Q является регулярным. Векторы

$$b^1 = (0 \quad 2)^T, \quad b^2 = (1 \quad 0)^T$$

ненулевые. Следовательно, в силу теоремы 2.2, если $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$, где H_1 — линейное подпространство в $W_2^1(Q)$, то $R_Q^{-1}(H_1) \subset \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ и $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$. Здесь

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0,1)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2\frac{1}{3}, x_2 \in (0,1)\},$$

$\gamma = \{\gamma_i^{\pm}\}$ $(i = 1, 2)$, коэффициенты $\gamma_i^{\pm}$ определяются из систем линейных алгебраических уравнений (2.17), (2.18), которые имеют вид

$$\begin{cases} \gamma_1^+ + \gamma_2^+ = 2, \\ 2\gamma_1^+ + \gamma_2^+ = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1^- + \gamma_2^- = 0, \\ \gamma_1^- + 2\gamma_2^- = 1, \end{cases}$$

то есть $\gamma_1^+ = -2$, $\gamma_2^+ = 4$, $\gamma_1^- = -1, \gamma_2^- = 1$.

Таким образом,

$$\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u|_{x_1=0} = u|_{x_1=\frac{2}{3}} = 0\},$$

а $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ — подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w|_{x_1=0} = \gamma_1^+ \, w|_{x_1=1} + \gamma_2^+ \, w|_{x_1=2}\,,$$
$$w|_{x_1=2\frac{1}{3}} = \gamma_1^- \, w|_{x_1=1\frac{1}{3}} + \gamma_2^- \, w|_{x_1=\frac{1}{3}}\,.$$

Замечание 2.2. Теорема 2.2 показывает, что для регулярного разностного оператора R_Q, удовлетворяющего условиям (2.20), наличие «минимальной гладкости» функций из некоторого подпространства H_1 и его прообраза $R_Q^{-1}(H_1)$ означает, что функции из $R_Q^{-1}(H_1)$ имеют нулевые следы на основаниях цилиндра, а функции из H_1 удовлетворяют нелокальным краевым условиям.

Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (3.1) естественно задавать однородные условия Дирихле на основаниях цилиндра и краевые условия второго рода на боковой поверхности цилиндра (см. раздел 3). Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений (см. раздел 4).

Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями второго рода на сдвигах множества Γ, порожденных разностным оператором, приводит к переопределенным задачам.

3. Разрешимость смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения

3.1. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-\Delta R_Q u(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{3.1}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0, \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q_{sl} \cap ((0,d)\times \partial G)} = 0 \tag{3.3}$$

где $s = 1, 2$, $l = 1, \dots, N(s)$, если $\theta < 1$; $s = 1$, $l = 1, \dots, N(1)$, если $\theta = 1$; $N(1) = k + 1$, $N(2) = k$; $f_0 \in L_2(Q)$; ν — единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности $(0, d) \times \partial G$; R_Q — ограниченный разностный оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q),$$

оператор R задается по формуле (1.1).

Пусть матрица R_1, соответствующая разностному оператору R_Q, удовлетворяет условию

$$R_1 + R_1^* > 0. \tag{3.4}$$

Мы будем называть уравнение (3.1) *сильно эллиптическим*, если выполняется условие (3.4).

3.2. Рассмотрим разрешимость задачи (3.1)–(3.3).

Определение 3.1. Функция $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ называется *обобщенным решением* смешанной краевой задачи (3.1)–(3.3), если для любых $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla(R_Q u)\nabla\overline{v}dx = \int\limits_Q f_0\overline{v}dx. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* (3.4). *Тогда для любой функции* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *задачи* (3.1)–(3.3), *при этом*

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_0\|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{3.6}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство.

1. Введем в пространстве $L_2(Q)$ полуторалинейную форму a_R с областью определения $\mathscr{D}(a_R) = \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ по формуле

$$a_R[u, v] = (\nabla R_Q u, \nabla v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \tag{3.7}$$

Очевидно,

$$a_R[u, v] = p_R[u, v] + iq_R[u, v], \tag{3.8}$$

где

$$p_R[u, v] = \Big(\nabla\frac{R_Q + R_Q^*}{2}u, \nabla v\Big)_{L_2(Q)}, \tag{3.9}$$

$$q_R[u, v] = \Big(\nabla\frac{R_Q - R_Q^*}{2i}u, \nabla v\Big)_{L_2(Q)}. \tag{3.10}$$

В силу леммы 2.2

$$\nabla(R_Q u) = R_Q\nabla u, \quad \nabla(R_Q^* u) = R_Q^*\nabla u \quad \text{для всех} \quad u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q).$$

Поэтому формы $p_R[\cdot, \cdot]$ и $q_R[\cdot, \cdot]$ — симметричные.

2. Покажем, что в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)} = p_R[u, v] \quad (u, v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \tag{3.11}$$

Действительно, в силу ограниченности операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$ и неравенства Коши—Буняковского для любых $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ мы имеем

$$|p_R[u, u]| \leqslant k_1\|u\|^2_{W_2^1(Q)}, \tag{3.12}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

С другой стороны, в силу формул (1.4)–(1.7) и условия (3.4) имеем

$$p_R[u,u]=\sum_i\Big(\frac{R_Q+R_Q^*}{2}u_{x_i},u_{x_i}\Big)_{L_2(Q)}=\sum_s\sum_i(R_s^H(U_sP_su)_{x_i},(U_sP_su)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})}=$$
$$=\sum_s\sum_i((\sqrt{R_s^H}U_sP_su)_{x_i},(\sqrt{R_s^H}U_sP_su)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})}\geqslant k_2\sum_i\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}, \quad (3.13)$$

где $k_2>0$ — постоянная, не зависящая от u, $R_s^H=(R_s+R_s^*)/2$.

Очевидно, в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|''_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}=\Big\{\sum_i\|u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\Big\}^{\frac12}. \quad (3.14)$$

В силу (3.13), (3.14) для любых $u\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$

$$p_R[u,u]\geqslant k_3\|u\|^2_{W_2^1(Q)},$$

где $k_3>0$ — постоянная, не зависящая от u.

Таким образом, в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле (3.11).

3. Используя ограниченность операторов R_Q и R_Q^* в $L_2(Q)$, неравенство Коши—Буняковского и эквивалентное скалярное произведение в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, определенное по формуле (3.11), мы получим

$$|q_R[u,v]|\leqslant k_4\|u\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\|v\|'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}, \quad (3.15)$$

где $k_4>0$ — постоянная, не зависящая от u,v.

Из (3.15), теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и симметричности формы $q_R[\cdot,\cdot]$ в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ вытекает существование ограниченного самосопряженного оператора $S:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такого, что

$$q_R[u,v]=(Su,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\quad (u,v\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \quad (3.16)$$

Кроме того, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и неравенства Коши—Буняковского существует ограниченный оператор $B:L_2(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что

$$(f_0,v)_{L_2(Q)}=(Bf_0,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}\quad (f_0\in L_2(Q),v\in\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)). \quad (3.17)$$

Из равенств (3.5), (3.7)–(3.10), (3.11), (3.16), (3.17) получим

$$(u+iSu,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}=(Bf_0,v)'_{\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)}. \quad (3.18)$$

Поскольку v — произвольная функция в $\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$, мы получим эквивалентное тождеству (3.18) операторное уравнение

$$(I+iS)u=Bf_0. \quad (3.19)$$

Оператор $S:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — ограниченный и самосопряженный. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор $(I+iS)^{-1}:\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)\to\mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$. Таким образом, для любой $f_0\in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение

$$u=(I+iS)^{-1}Bf_0$$

задачи (3.1)–(3.3), при этом имеет место оценка (3.6). □

3.3. Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

Введем множество

$$\mathscr{K} = \bigcup_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i\neq j}} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_i) \cap \overline{[(\partial Q + h_j) \setminus (\partial Q + h_i)]}\}, \tag{3.20}$$

где $h_i = (i, 0, \ldots, 0)$.

Очевидно, множество $\mathscr{K}$ можно представить в виде

$$\mathscr{K} = \begin{cases} \Big(\bigcup\limits_{l=1}^{k+1}\{l-1\} \times \partial G\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{l=1}^{k+1}\{l-1+\theta\} \times \partial G\Big), & \text{если} \quad \theta < 1;\\ \bigcup\limits_{l=1}^{k+2}\{l-1\} \times \partial G, \quad \text{если} \quad \theta = 1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Обозначим

$$\mathscr{K}^{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}) < \varepsilon\}.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* (3.4)*, и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *— обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3)*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* s, l ($s = 1, 2$, $l = 1, \ldots, N(s)$, *если* $\theta < 1$; $s = 1$, $l = 1, \ldots, N(1)$, *если* $\theta = 1$; $N(1) = k + 1$, $N(2) = k$) *имеем* $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^{\varepsilon})$.

Доказательство.

1. Из неравенства (3.13) следует, что дифференциально-разностный оператор $-\Delta R_Q$ удовлетворяет условиям теоремы [19, теорема 11.1, гл. II] о локальной гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в подобластях Q_{sl} и условиям теоремы [19, теорема 11.2, гл. II] о гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вблизи части границы, на которой задается краевое условие Дирихле. Следовательно, для любого $\varepsilon_0 > 0$ имеем $u \in W^2_2((l-1, l-1+\theta) \times G_{\varepsilon_0})$ ($l = 1, \ldots, k+1$) и $u \in W^2_2((l-1+\theta, l) \times G_{\varepsilon_0})$ ($l = 1, \ldots, k$), если $\theta < 1$; $u \in W^2_2((l-1, l) \times G_{\varepsilon_0})$ ($l = 1, \ldots, k+1$), если $\theta = 1$. Здесь $G_{\varepsilon_0} = \{x' \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) > \varepsilon_0\}$.

2. С другой стороны, легко видеть, что дифференциально-разностный оператор $-\Delta R_Q$ удовлетворяет условиям теоремы [11, теорема 4] о гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вблизи части границы, на которой задается краевое условие второго рода. Следовательно, для любого $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \min\{\theta, 1-\theta\}/4$, имеем $u \in W^2_2((l-1+\varepsilon_0, l-1+\theta-\varepsilon_0) \times G)$ ($l = 1, \ldots, k+1$) и $u \in W^2_2((l-1+\theta+\varepsilon_0, l-\varepsilon_0) \times G)$ ($l = 1, \ldots, k$), если $\theta < 1$; $u \in W^2_2((l-1+\varepsilon_0, l-\varepsilon_0) \times G)$ ($l = 1, \ldots, k+1$), если $\theta = 1$.

Из этих утверждений, полагая $\varepsilon_0 = \varepsilon/\sqrt{2}$, получим $u \in W^2_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^{\varepsilon})$. □

3.4. Рассмотрим следствия из теоремы 3.2, которые объясняют, в каком смысле обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) удовлетворяет уравнению (3.1) и краевому условию (3.3).

Следствие 3.1. *Пусть выполняется условие* (3.4)*. Тогда обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3) $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *почти всюду в* Q_{sl} ($s = 1, 2$, $l = 1, \ldots, N(s)$, *если* $\theta < 1$; $s = 1$, $l = 1, \ldots, N(1)$, *если* $\theta = 1$; $N(1) = k + 1$, $N(2) = k$).

Доказательство. В силу теоремы 3.2 и леммы 2.1 $R_Q u_{x_j} \in W^1_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^{\varepsilon})$ для любых s, l и $\varepsilon > 0$. Выберем произвольным образом $s = s_0$ и $l = l_0$. Тогда для любой функции $v \in C_0^{\infty}(Q_{s_0 l_0})$, интегрируя по частям в тождестве (3.5), получим

$$-\int\limits_{Q_{s_0 l_0}} \Delta R_Q u \cdot \overline{v} dx = \int\limits_{Q_{s_0 l_0}} f_0 \overline{v} dx. \tag{3.22}$$

В силу произвольности функции v, мы убеждаемся, что уравнение (3.1) удовлетворяется почти всюду в $Q_{s_0 l_0}$. □

Следствие 3.2. *Пусть выполняется условие* (3.4), *и пусть* $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — *обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* s, l *определен след функции* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ *на поверхности* $(\partial Q_{sl} \cap ((0,d) \times \partial G)) \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$, *при этом краевое условие второго рода* (3.3) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

Доказательство. Выберем произвольным образом s и l. По теореме 3.2 мы можем проинтегрировать по частям левую часть тождества (3.5) для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ такой, что $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q_{sl}} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon$. В силу теоремы 3.2 и леммы 2.1 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in W^1_2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ $(i = 1, \dots, n)$ и определен след функции $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ на поверхности

$$M^{sl}_\varepsilon = (\partial Q_{sl} \cap ((0,d) \times \partial G)) \setminus \mathscr{K}^\varepsilon.$$

Проинтегрировав левую часть тождества (3.5) по частям, в силу следствия 3.1 и равенства $v|_{x_1=0} = v|_{x_1=d} = 0$ имеем

$$\int\limits_{M^{sl}_\varepsilon} \sum_{i=1}^n (R_Q u)_{x_i}|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) \cdot \overline{v}|_{M^{sl}_\varepsilon}\, dS_x = 0. \tag{3.23}$$

В силу произвольности функции v мы видим, что почти всюду на M^{sl}_ε выполняется следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^n (R_Q u)_{x_i}|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) = 0. \tag{3.24}$$

В силу леммы 2.2 равенство (3.24) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n (R_Q u_{x_i})|_{M^{sl}_\varepsilon} \cos(\nu, x_i) = 0. \tag{3.25}$$

Обозначим через

$$\phi_l(x) = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{M^{sl}_\varepsilon}$$

след нормальной производной функции $u(x)$ на границе M^{sl}_ε.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай $\theta = 1$.

Тогда разбиение $\mathscr{R}$ состоит из одного класса подобластей

$$Q_{1l} = (l-1, l) \times G \quad (l = 1, \dots, k+1).$$

В силу (1.1), для области Q_{1l} $(l = 1, \dots, k+1)$ условие (3.25) примет вид

$$\sum_{j=-k}^{k} a_j \phi_l(x_1 + j, x') = 0 \quad (l - 1 + \varepsilon < x_1 < l - \varepsilon, x' \in \partial G), \tag{3.26}$$

что равносильно

$$\sum_{j=-k}^{k} a_j \phi_l(x_1 + j + l - 1, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.27}$$

Полагая $t = j + l - 1$, получим:

$$\sum_{t=-k+l-1}^{k+l-1} a_{t-l+1} \phi_l(x_1 + t, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.28}$$

Так как функция $u(x)$ вне области Q принимает нулевые значения, то равенство (3.28) равносильно следующему:

$$\sum_{t=0}^{k} a_{t-l+1} \phi_l(x_1 + t, x') = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in \partial G). \tag{3.29}$$

Объединяя равенства (3.29) для всех $l = 1, \dots, k+1$, получим:

$$R_1 \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(x_1, x') \\ \phi_2(x_1 + 1.x') \\ \dots \\ \phi_{k+1}(x_1 + k, x') \end{pmatrix} = 0 \quad (\varepsilon < x_1 < 1 - \varepsilon, x' \in G). \tag{3.30}$$

В силу (3.4) матрица R_1 невырождена. Следовательно, $\phi_l(x) = 0$ почти всюду на M_ε^{sl} для всех $l = 1, \dots, k+1$, что и требовалось доказать.

□

4. Разрешимость нелокальной смешанной задачи для эллиптических дифференциальных уравнений

4.1. Рассмотрим приложения результатов раздела 3 о разрешимости смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения к вопросу о разрешимости нелокальной смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta w(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \tag{4.1}$$

с нелокальными смешанными краевыми условиями

$$w\big|_{x_1=0} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^+ w\big|_{x_1=i}, \quad w\big|_{x_1=d} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^- w\big|_{x_1=d-i}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{(0,d)\times\partial G} = 0. \tag{4.3}$$

Здесь $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a,b)$, если $n = 2$; ν — единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности $(0,d) \times \partial G$, $\gamma_i^\pm$ $(i = 1, \dots, n)$ — комплексные числа.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

$$\begin{cases} \textit{Для заданных чисел } \gamma_i^\pm \in \mathbb{C} \ (i = 1, \dots, n) \textit{ существуют числа } a_j \\ (j = 0, \pm 1, \dots, \pm k) \textit{ такие, что выполняются равенства } (2.17), (2.18), \\ \textit{при этом матрица } R_1 \textit{ вида } (1.5) \textit{ удовлетворяет условию } (3.4). \end{cases} \tag{4.4}$$

Напомним, что через $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ мы обозначили подпространство функций в $W_2^1(Q)$, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (2.19).

Определение 4.1. Функция $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ называется *обобщенным решением* нелокальной смешанной краевой задачи (4.1)–(4.3), если для любых $v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla w \nabla \overline{v} dx = \int\limits_Q f_0 \overline{v} dx. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* (4.4). *Тогда для любой* $f_0 \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3), *при этом*

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c_1 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{4.6}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* f_0.

Доказательство. В силу условий (4.4) матрицы R_1 и R_2, определенные по формулам (1.5), (1.6), невырождены, то есть оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ регулярный. Следовательно, в силу теоремы 2.1 $R_Q : \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q) \to W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ — изоморфизм. Пусть

$$w = R_Q u, \quad \text{где} \quad u = R_Q^{-1} w \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q).$$

Тогда интегральное тождество (4.5) примет вид

$$\int\limits_Q \nabla(R_Q u)\nabla\overline{v}dx = \int\limits_Q f_0\overline{v}dx. \tag{4.7}$$

Следовательно, функция $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ является обобщенным решением задачи (3.1)–(3.3). В силу теоремы 3.1 существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ задачи (3.1)–(3.3), при этом выполняется априорная оценка (3.6). Значит, существует единственное обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3)

$$w = R_Q u \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q),$$

при этом в силу леммы 2.2 и неравенства (3.6) имеем

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} = \|R_Q u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_1\|u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_1 c_0\|f_0\|_{L_2(Q)}, \tag{4.8}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

Таким образом, доказано неравенство (4.6). □

4.2. Рассмотрим теперь теорему о гладкости обобщенных решений задачи (4.1)–(4.3) и ее применение к исследованию гладкости обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 4.2. *Пусть $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $w \in W^2_2(Q \setminus K^\varepsilon)$, где*

$$K = (\{0\} \times \partial G) \cup (\{d\} \times \partial G),$$

$$K^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\}.$$

Доказательство. В силу теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач вблизи гладкого куска границы имеем $w \in W_2^2((\delta, d-\delta) \times G)$ для любого $\delta > 0$ такого, что $\delta < \dfrac{\theta}{4}$ (см. [6, теорема 10.1, §10, гл. III]). Отсюда и из краевых условий (4.2) следует, что

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=d} \in W_2^{3/2}(G).$$

Применяя теорему о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач с неоднородными краевыми условиями вблизи плоского куска границы, получим $w \in W_2^2((0,d) \times G_\delta)$. Полагая $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$, имеем $w \in W_2^2(Q \setminus K^\varepsilon)$. □

4.3. Аналогично доказательству следствий 3.1, 3.2 можно доказать следующие утверждения, вытекающие из теоремы 4.2.

Следствие 4.1. *Пусть $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда $w(x)$ удовлетворяет уравнению* (4.1) *почти всюду в Q.*

Следствие 4.2. *Пусть $w \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ определен след функции $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ на поверхности $(\varepsilon, d-\varepsilon) \times \partial G$, при этом краевое условие* (4.3) *выполняется почти всюду на этой поверхности.*

4.4. Кроме того, из теоремы 4.2 легко получить обобщение теоремы 3.2 о гладкости обобщенных решений смешанной краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения, предполагая, что оператор R_Q регулярный.

Теорема 4.3. *Пусть оператор R_Q — регулярный. Предположим, что $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи* (3.1)–(3.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всех s, l $(s = 1, 2,\ l = 1, \ldots, N(s)$, если $\theta < 1$; $s = 1, l = 1, \ldots, N(1)$, если $\theta = 1$; $N(1) = k+1$, $N(2) = k)$ имеем $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q — регулярный. Пусть, кроме того, $u \in \mathring{W}^1_{2,\Gamma}(Q)$ — обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3). Тогда в силу теоремы 2.1

$$w = R_Q u \in W^1_{2,\Gamma,\gamma}(Q),$$

при этом, используя тождество (2.4), мы убеждаемся, что w — обобщенное решение задачи (4.1)–(4.3). Поэтому согласно теореме 4.2 мы имеем $w = R_Q u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех s, l. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathscr{K}^\varepsilon)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
7. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
8. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
9. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
10. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
11. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
12. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 417–428.
13. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
14. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
15. *Hartman F., Stampacchia G.* On some non-linear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–230.
16. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
17. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — С. 192–207.
18. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — С. 491–500.
19. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem// Math. Nachr. — 2018. — *291*. — С. 2660–2692.
21. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional-differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — *9*. — С. 847–868.

В. В. Лийко
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `vikalijko@gmail.com`

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `skub@lector.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-635-654 UDC 517.929

Strongly Elliptic Differential-Difference Equations with Mixed Boundary Conditions in a Cylindric Domain

© 2019 **V. V. Liiko, A. L. Skubachevskii**

Abstract. We consider strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindrical domain. We establish the connection between such problems and nonlocal mixed problems for strongly elliptic differential equations, and prove the uniqueness of solutions.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, "Ob indekse i normal'noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse" [On the index and normal solvability of general elliptic boundary-value problem with a finite group of shifts on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, "Issledovanie vol'terrovykh integro-differentsial'nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra" [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending of a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Issledovanie funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami" [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
6. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
7. V. S. Rabinovich, "O razreshimosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve" [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "O spektre nekotorykh nelokal'nykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
12. O. V. Solonukha, "Ob odnoy nelineynoy nelokal'noy zadache ellipticheskogo tipa" [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 417–428 (in Russian).
13. F. Browder, "Non-local elliptic boundary value problems," *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
14. T. Carleman, "Sur la théorie des équations intégrales et ses applications," *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
15. F. Hartman and G. Stampacchia, "On some non-linear elliptic differential-functional equations," *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–230.

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

16. T. Kato, “Fractional powers of dissipative operators,” *J. Math. Soc. Jpn.*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
17. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
18. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
19. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
20. A. L. Skubachevskii, “Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem,” *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.
21. O. V. Solonukha, “On nonlinear and quasilinear elliptic functional-differential equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, 847–868.

V. V. Liiko
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: vikalijko@gmail.com

A. L. Skubachevskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: skub@lector.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 655–671

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-655-671 УДК 517.929

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. **Д. А. НЕВЕРОВА**

Аннотация. Данная статья посвящена изучению качественных свойств решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Ранее были получены результаты о существовании обобщенных решений рассматриваемых задач и доказано, что гладкость этих решений сохраняется в некоторых подобластях, но может нарушаться на их границах даже для бесконечно гладкой функции правой части. Для случая дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на отрезке, с непрерывными правыми частями и краевыми условиями первого, второго и третьего рода автором были получены условия на коэффициенты разностных операторов, при выполнении которых существует классическое решение задачи, совпадающее с обобщенным. Кроме того, для задачи Дирихле для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенного решения в пространствах Гельдера на границе соседних подобластей. Гладкость решений внутри некоторых подобластей за исключением ε-окрестностей угловых точек была также доказана ранее. Однако проблема гладкости обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений оставалась неисследованной.

В данной работе для того, чтобы повысить в шкале пространств Соболева гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения внутри подобластей, применен подход, использующий метод аппроксимации оператора дифференцирования конечноразностными операторами и доказана соответствующая теорема.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Общей теории функционально-дифференциальных уравнений посвящен целый ряд монографий, среди которых широко известны работы А. Д. Мышкиса [11], Р. Беллмана и К. Кука [2], Дж. Хейла [24]. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах Ф. Хартмана и Г. Стампакья [26], А. Б. Антоневича [1], В. С. Рабиновича [17] и др.

Интерес к изучению функционально-дифференциальных уравнений связан с их приложениями в теории многослойных пластин и оболочек [13,29], в нелинейной оптике [4], в теории многомерных диффузионных процессов [32], в теории нелокальных эллиптических задач [3,22], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [9] и др.

Общая теория краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [18,22,32]. Систематическое исследование широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений методами спектральной теории содержится в работах [5–7].

©Российский университет дружбы народов, 2019

В работе [32] для краевых задач для дифференциально-разностных уравнений были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева, а также изучена гладкость обобщенных решений. В частности, было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемых правых частях уравнений и сохраняется лишь в некоторых подобластях.

Исследования теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, такие как спектральная асимптотика, операторы с вырождением, краевые задачи для параболического уравнения со сдвигом по пространственным переменным, нашли свое продолжение в работах [15, 16, 19, 20, 23, 25].

Результаты о существования классического решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с непрерывной правой частью, изучение гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения с правой частью из пространств Гельдера приведены в работах [12, 27, 28].

В настоящей работе изучается гладкость обобщенных решений в подобластях в шкале пространств Соболева второй и третьей краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i}=f(x) \qquad (x\in Q\subset\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu,x_i)+\sigma(x)u=0 \qquad (x\in\partial Q), \tag{1.2}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q, $\sigma\in C^k(\partial Q)$ — неотрицательная вещественнозначная функция; операторы R_{ijQ} определены по формуле

$$R_{ijQ}=P_QR_{ij}I_Q: L_2(Q)\to L_2(Q);$$

$I_Q\colon L_2(Q)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n\setminus Q$; $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q; $R_{ij}: L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — разностные операторы вида

$$(R_{ij}u)(x)=\sum_{h\in\mathcal{M}}a_{ijh}u(x+h) \quad (i,j=1,\dots,n), \tag{1.3}$$

где a_{ijh} — вещественные числа; $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами.

2. Геометрические вопросы

В этом разделе мы рассмотрим свойства разностных операторов. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [32, гл. 2].

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q=\bigcup_i\overline{X}_i$ $(i=1,\dots,N_1)$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n\geqslant 2$. При этом в окрестности каждой точки $x^0\in\partial Q\setminus\bigcup_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

В частности, $Q\subset\mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q\in C^\infty$, а также цилиндром $(0,d)\times G$ или прямоугольником, где $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G\in C^\infty$, если $n\geqslant 3$).

Пусть $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q\setminus\bigcup_{h\in M}(\partial Q+h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r ($r = 1, 2, \ldots$) назовем *разбиением области* Q.

Заметим, что множество $\mathcal{R}$ не более, чем счетно.

Лемма 2.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \left(\bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)\right) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 2.2.

1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых* Q_{r_1} *и* $h \in M$ *либо найдется такое* Q_{r_2}, *что* $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, *либо* $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса ($s = 1, 2, \ldots$), а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и

$$N(s) \leqslant ([\mathrm{diam}\ Q] + 1)^n.$$

Введем множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}. \tag{2.1}$$

Из определения множества $\mathcal{K}$ следуют следующие леммы.

Лемма 2.3. *Пусть* $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.4. *Пусть* $x^0 \in \bigcap\limits_i \partial Q_{s_i l_i}$ *и* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Будем считать, что выполнено

Условие 2.2.

$$\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0,$$

где $\mu_{n-1}(\cdot)$ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Обозначим через Γ_p компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 2.5. *Если*

$$(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$$

при некотором $h \in M$, *то либо* $\Gamma_p + h \subset Q$, *либо существует* $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ *такое, что* $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 2.5 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \ldots, h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что
$$\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h,$$
2. в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать только одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \ldots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе ($1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q, \quad \Gamma_{r,J_0+1}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q \quad (0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)).$$

Лемма 2.6. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ *существует подобласть* Q_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 2.7. *Для любого* $r = 1, 2, \ldots$ *существует единственное* $s = s(r)$ *такое, что* $N(s) = J(r)$, *и при этом подобласти s-го класса* Q_{sl} *можно перенумеровать так, что* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \ldots, N(s))$.

Лемма 2.8. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset Q$ *существуют подобласти* $Q_{s_1 l_1}$ *и* $Q_{s_2 l_2}$ *такие, что* $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$ *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

Пример 2.1. Рассмотрим случай прямоугольника

$$Q = (0, 2) \times (0, 1), \quad \mathcal{M} = \{(1, 0)\}.$$

Разобьем прямоугольник Q на подобласти. В этом примере разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей

$$Q_1 = Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1), \quad Q_2 = Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$$

(см. рис. 1). Легко видеть, что

$$\mathcal{K} = \{(0, 0); (1, 0); (2, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)\}.$$

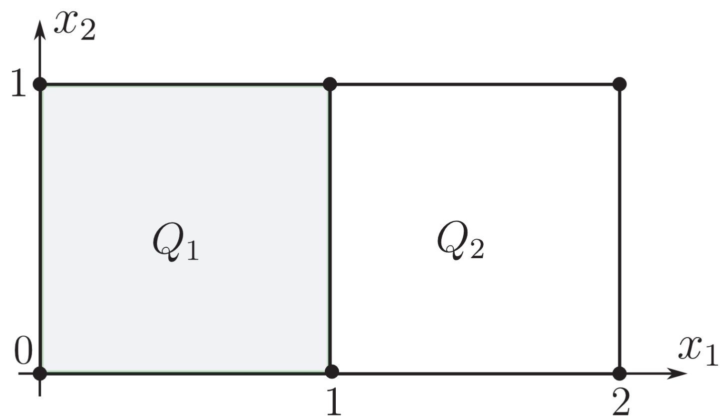

Рис. 1. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.1. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Пример 2.2. Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^2$ вне окружностей $S_{1/3}((1/3, 1/3))$, $S_{1/3}((1, 1))$ совпадает с границами квадрата $(0, 4/3) \times (0, 4/3)$, а множество $\mathcal{M} = \{(1, 1)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$, состоящее из двух классов, классы границ и множество

$$\mathcal{K} = \{(1/3, 0), (4/3, 1), (0, 1/3), (1, 4/3)\}$$

изображены на рис. 2.

Пример 2.3. Рассмотрим случай, когда множество Q представляет собой единичный круг

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}, \quad \mathcal{M} = \{(1, 0)\}.$$

Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек:

$$\mathcal{K} = \{(0, 0),\ (1, 0),\ (-1, 0),\ (-1/2, -\sqrt{3}/2),\ (-1/2, \sqrt{3}/2),\ (1/2, -\sqrt{3}/2),\ (1/2, \sqrt{3}/2)\}.$$

Разбиение $\mathcal{R}$ области Q и классы границ, а также множество $\mathcal{K}$ представлены на рис. 3.

3. Разностные операторы

Введенные по формуле (1.3), разностные операторы R_{ij} действуют во всем $\mathbb{R}^n$, чтобы рассмотреть их в области Q, введем линейные операторы I_Q, P_Q, R_{ijQ}. Оператор $I_Q \colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ является оператором продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, оператор $P_Q \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, операторы $R_{ijQ} \colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ определены по формулам $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$, соответственно.

Лемма 3.1. *Операторы* $R_{ij} \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_{ijQ} \colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ *являются ограниченными.*

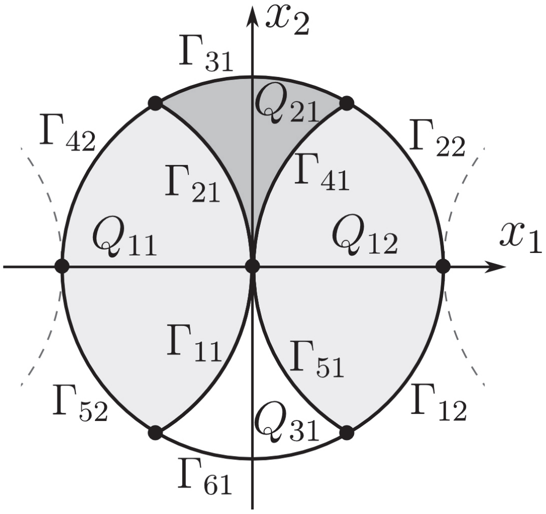

Рис. 2. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.2. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

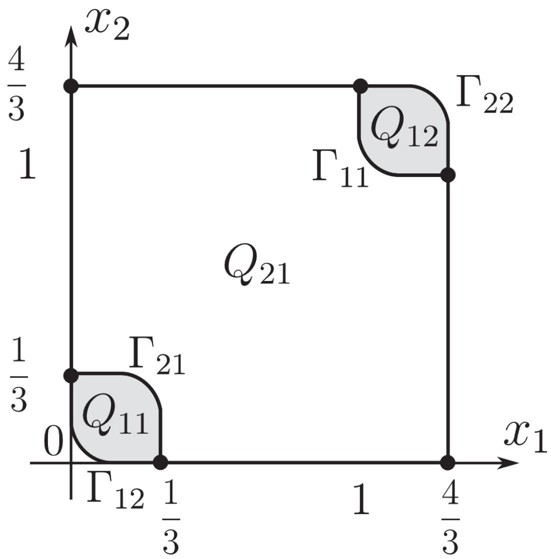

Рис. 3. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.3. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Далее мы рассмотрим некоторые свойства разностных операторов R_{ijQ} в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из коэффициентов разностного оператора и нулей.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ $(l = 1,\dots,N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right), \tag{3.1}$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2. $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — *инвариантное подпространство операторов* R_{ijQ}.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s\colon L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \to L_2^N(Q_{s1}), \tag{3.2}$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{3.3}$$

где $l = 1, \ldots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \bar{0})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{sl})$.

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 3.3. *Операторы* $R_{ijQs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенные по формуле*

$$R_{ijQs} = U_s R_{ijQ} U_s^{-1}, \tag{3.5}$$

являются операторами умножения на квадратные матрицы R_{ijs} *соответственно.*

Замечание 3.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_{ijs} состоят из конечного множества чисел a_{ijh} и нулей, то множество различных матриц конечно (см. [31]).

Введем блочную матрицу R_s вида

$$R_s = \|R_{ijs}\|_{i,j=1}^n.$$

Условие 3.1. *Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию* **(SE)**, *если матрицы* $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *положительно определены. Здесь матрица* R_s^* *является сопряженной к* R_s.

Поэтому если уравнение (1.1) удовлетворяет условию **(SE)**, то существует константа $c > 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \ldots$ и всех $Y \in \mathbb{C}^{nN(s)}$

$$\mathrm{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c(Y, Y),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{nN(s)}$.

Всюду далее мы будем считать, что дифференциально-разностное уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Определение 3.1. Краевую задачу (1.1)-(1.2) будем называть *второй краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, если $\sigma(x) \equiv 0$ $(x \in \partial Q)$, и *третьей краевой задачей*, если $\sigma(x) \not\equiv 0$ $(x \in \partial Q)$.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q)$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q)$. В пространстве $W_2^k(Q)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание пространства $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в пространстве $W_2^k(Q)$.

Обозначим $W_{2,loc}^k(Q)$ $(k > 0)$ пространство комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q')$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q')$, где Q' — произвольная внутренняя подобласть области Q, т. е. $Q' \Subset Q$.

Лемма 3.4. *Операторы R_{ijQ} непрерывно отображают пространство $\mathring{W}_2^k(Q)$ в пространство $W_2^k(Q)$. Если $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$, то*

$$D^\alpha R_{ijQ}u = R_{ijQ}D^\alpha u \quad (|\alpha| \leqslant k).$$

Введем полуторалинейную форму $a_R[u,v]$ в $L_2(Q)$ с областью определения $D(a_R) = W_2^1(Q)$ по формуле

$$a_R[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ}u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma u, v)_{L_2(\partial Q)}, \tag{3.6}$$

где

$$(\sigma u, v)_{L_2(\partial Q)} = ((\sigma u)|_{\partial Q}, v|_{\partial Q})_{L_2(\partial Q)}.$$

Всюду далее через $(f,g)_{L_2(\partial Q)}$ будем обозначать скалярное произведение следов функций f, g, т. е.

$$(f,g)_{L_2(\partial Q)} = (f|_{\partial Q}, g|_{\partial Q})_{L_2(\partial Q)}.$$

Из [8, лемма 1, §13, гл. II] получим следующий результат.

Лемма 3.5. *Пусть выполнено условие* **(SE)**. *Тогда существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$|a_R[u,v]| \leqslant c_1\|u\|_{W_2^1(Q)}\|v\|_{W_2^1(Q)} \quad (u,v \in W_2^1(Q)), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{Re} a_R[u,u] \geqslant c_2|u|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in W_2^1(Q)), \tag{3.8}$$

где

$$|u|^2_{W_2^1(Q)} = \int\limits_Q |\bigtriangledown u(x)|^2 dx \tag{3.9}$$

задает квадрат полунормы функции $u \in W_2^1(Q)$. Данная полунорма в случае третьей краевой задачи $|u|^2_{W_2^1(Q)}$ является эквивалентной нормой функции $u \in W_2^1(Q)$.

Из неравенств (3.7)–(3.9) и [9, теорема 1.11, §1, гл. VI] следует, что форма $a_R[u,v]$ $(u, v \in W_2^1(Q))$ является плотно определенной, замкнутой, секториальной полуторалинейной формой в $L_2(Q)$. Поэтому в силу [9, теорема 2.1, §2, гл. VI] существует m-секториальный оператор $A_R : L_2(Q) \subset D(A_R) \to L_2(Q)$ такой, что $D(A_R) \subset D(a_R) = W_2^1(Q)$ и

$$a_R[u,v] = (A_R u, v)_{L_2(Q)} \quad (u \in D(A_R), v \in D(a_R)). \tag{3.10}$$

Отсюда и из леммы 3.5 вытекает

Лемма 3.6. *Пусть выполнено условие* **(SE)**. *Тогда в случае второй краевой задачи для любого $c_3 > 0$ существует $c_4 > 0$ такое, что*

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} + c_3\|u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_4\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in D(A_R))), \tag{3.11}$$

а в случае третьей краевой задачи существует $c_5 > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_5\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in D(A_R)). \tag{3.12}$$

4. Обобщенные и классические решения

Введем пространство $C^k(\overline{Q})$ как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{Q}$ с нормой

$$\|u\|_{C^k(\overline{Q})} = \max_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{Q}} |D^\beta u(x)|. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Функцию u будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $u \in W_2^1(Q)$ и для всех $v \in W_2^1(Q)$

$$a_R[u,v] = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{4.2}$$

Используя методы, изложенные в [10, гл. IV, §1] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда вторая краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_Q f(x)dx = 0. \tag{4.3}$$

При этом существует единственное обобщенное решение $u(x)$ *такое, что*

$$\int\limits_Q u(x)dx = 0.$$

Всякое другое решение имеет вид

$$\tilde{u}(x) = u(x) + c,$$

где c — *некоторая константа.*

Обобщенное решение третьей краевой задачи существует и единственно для любой $f \in L_2(Q)$.

Приведенная теорема доказана в [23].

Определение 4.2. Функцию $u \in C^2(Q) \bigcap C^1(\overline{Q})$ назовем *классическим решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $R_{ijQ}u_{x_j} \in C^1(\overline{Q})$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ и $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $x \in Q$ и краевому условию (1.2) на ∂Q.

Из определений 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.2. *Пусть* $u(x)$ — *классическое решение задачи* (1.1)-(1.2), *и пусть* $u \in C^1(\overline{Q})$ *и* $R_{ijQ}u_{x_j} \in C^1(\overline{Q})$. *Тогда* $u(x)$ *является обобщенным решением задачи* (1.1)-(1.2).

5. Гладкость обобщенных решений вблизи границ подобластей в шкале пространств W_2^k

В данном разделе мы изучим гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений внутри подобластей Q_{sl} и вблизи их границ. Данный результат приблизит нас к ответу на вопрос об условиях существования классического решения краевой задачи (1.1)-(1.2).

Всюду в дальнейшем при рассмотрении второй краевой задачи условие ее разрешимости (4.3) будем считать выполненным. Ниже приведем некоторые результаты, которые понадобятся нам для доказательства теоремы о гладкости.

Теорема 5.1. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) *и ее правая часть* $f \in L_2(Q) \bigcap W^k_{2,loc}(Q_{sl})$ $(s = p, q;\ l = 1,\ldots,N(s))$. *Тогда* $u \in W^{k+2}_{2,loc}(Q_{sl})$.

Доказательство содержится в [31, с. 347].

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда почти всюду в* Q_{sl} $(s = p, q;$ $l = 1,\ldots,N(s))$ *обобщенное решение* $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1).

См. доказательство в [23, с. 1769].

В дальнейшем при исследовании гладкости обобщенных решений краевой задачи (1.1)-(1.2) вблизи границ подобластей Q_{sl} важную роль играет ε-окрестность множества $\mathcal{K}$, определенного в (2.1):

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Лемма 5.1. *Для любой функции* $u \in W_2^1(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\big|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant \|u\|_{W_2^1(Q)}.$$

См. доказательство в [10, §5, гл. III].

Теорема 5.2. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^1(\partial Q)$ *и* $f \in L_2(Q)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2\ldots;\ l = 1,\ldots,N(s))$.

Доказательство содержится в [8, теорема 2, §11].

Рассмотрим вопрос о гладкости обобщенных решений вблизи границ подобластей Q_{sl} ($s = 1, 2\dots$; $l = 1, \dots, N(s)$) для случая $f \in W_2^k(Q)$.

Теорема 5.3. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнено условие* **(SE)**. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^{k+1}(\partial Q)$ *и* $f \in W_2^k(Q)$ ($k \geqslant 0$). *Тогда* $u \in W_2^{k+2}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ ($s = 1, 2\dots$; $l = 1, \dots, N(s)$).

Доказательство. В силу теоремы 5.1 достаточно показать, что для любой точки $y \in \partial Q_{pi} \setminus \mathcal{K}$ существует шар $B_a(y)$ такой, что $u \in W_2^{k+2}(Q_{pi} \bigcap B_a(y))$, где $B_a(y)$ — шар радиуса a с центром в точке y.

Доказательство этого утверждения основано на известном методе аппроксимации оператора дифференцирования конечноразностным оператором. Однако, в отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, эллиптические дифференциально-разностные уравнения являются нелокальными. Поэтому, изучая гладкость решения в окрестности точки $y \in \partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$, мы одновременно должны рассматривать соответствующие окрестности всех точек $y + h \in \overline{Q}$, где $h \in M$.

Методы доказательства являются дальнейшим развитием техники, разработанной в [25, теорема 3, с. 1143], [32, теорема 11.3, §11, Гл. II].

1. Зафиксируем некоторый класс подобластей $s = p$ и точку $y \in \partial Q_{pi} \setminus \mathcal{K}$. Пусть h_{pl} — вектор, удовлетворяющий условию

$$Q_{pl} = Q_{p1} + h_{pl} \quad (l = 1, \dots, N(p)), \quad h_{p1} = 0.$$

Введем точки $y^1, \dots, y^{N(p)}$ так, что

$$y^l = y^i - h_{pi} + h_{pl},$$

где $y^i = y$. Из определения множеств Γ_{sl} следует, что существует единственное r такое, что $J(r) \geqslant N(p)$, и после перенумерации множеств Q_{pl} и Γ_{rl} имеем

- $y^l \in \Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$ ($l = 1, \dots, N(p)$);
- $\Gamma_{rl} \subset Q$ ($l = 1, \dots, J_0 = J_0(r)$);
- $\Gamma_{rl} \subset \partial Q$ ($l = J_0 + 1, \dots, J(r)$).

Существует единственная подобласть $Q_{qm} \neq Q_{p1}$ такая, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{qm}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ ($l = 1, \dots, J_0$).

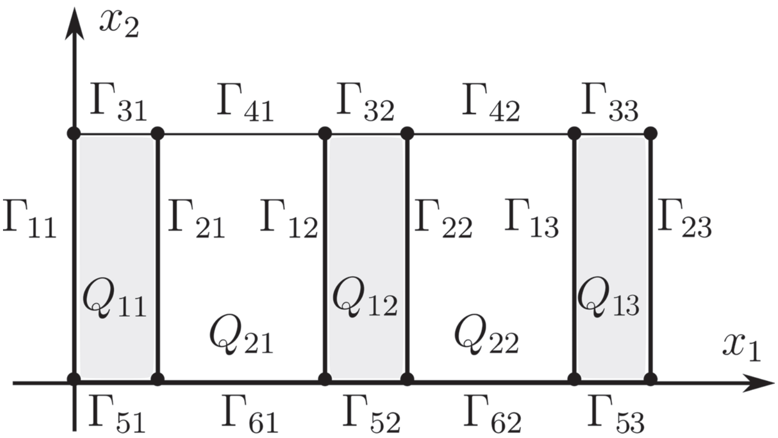

Рис. 4. Область Q и ее разбиение после перенумерации множеств Q_{pl} и Γ_{rl}. Здесь $q = 1$, $p = 2$, $N(q) = 3$, $N(p) = 2$, $r = 2$, $J(r) = r$, $J_0(r) = J_0 = 2$.

Введем точки $z^l \in \overline{Q}$ ($l = 1, \dots, N(q)$), так, что

$$z^l = y^1 + h_{ql} \quad (l = 1, \dots, N(q)).$$

По построению $y^l = z^l \in Q$ ($l = 1, \dots, J_0$), $z^l \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$, ($l = J_0 + 1, \dots, N(q)$).

В силу леммы 2.8 существует единственная подобласть $Q_{qj} \neq Q_{p1}$ такая, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{qj}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ ($l = 1, \dots, J_0$). Введем точки $z^1, \dots, z^N \in \overline{Q}$

так, что $z^l = y^1 + h_{ql}$ $(l = 1, \dots, N(q) \geqslant J_0)$. По построению $z^l = y^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$; $z^l \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(q))$. Кроме того, по лемме 2.6

$$\left(\bigcup_{l>J_0} y^l\right) \bigcap \left(\bigcup_{l>J_0} z^l\right) = \varnothing.$$

Рассмотрим шары $B_{4\delta}(x^{sl})$ $(s = p, q; l = 1, \dots, N(s))$, где $x^{pl} = y^l$, $x^{ql} = z^l$. В силу условия $\partial Q \setminus \bigcup\limits_i \Gamma_i = \mathcal{K}$ и лемм 2.3, 2.4 мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- $4\delta < \min\limits_{s,l} \min\{\rho(x^{sl}, \mathcal{K}), 1/2\}$;
- множества $\partial Q_{sl} \bigcap B_{4\delta}(x^{sl})$ — связные и принадлежат классу C^∞ $(l = 1, \dots, N(s); s = p, q)$;
- $B_{4\delta}(x^{sl}) \subset \Gamma_{rl} \bigcup Q_{pl} \bigcup Q_{ql}$ $(s = p, q; l = 1, \dots, J_0)$;
- $B_{4\delta}(x^{sl}) \bigcap Q = B_{4\delta}(x^{sl}) \bigcap Q_{sl}$ $(s = p, q; l = J_0 + 1, \dots, N(s))$.

2. Не ограничивая общности, будем считать, что $y^1 = 0$, а уравнение поверхности

$$\gamma = \Gamma_{p1} \bigcap B_{4\delta}(0)$$

имеет вид $x_n = 0$. В противном случае можно применить стандартную процедуру распрямления границы (см., например, [10, теорема 4, §2, гл. 4]).

Пусть

$$\xi(x) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(p)} \eta(x - h_{pl}) + \sum_{J_0 \leqslant l \leqslant N(q)} \eta(x - h_{ql}),$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ $(x \in B_{2\delta}(0))$,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_\delta(0), \\ 0, & x \notin B_{2\delta(0)}. \end{cases}$$

Введем пространство функций

$$W_a^1 = \{u \in W_2^1(Q) : u(x) \equiv 0, x \in Q \setminus \Omega_a\},$$

где

$$\Omega_a = \bigcup_{s=p,q} \bigcup_l B_a(x^{sl}).$$

В интегральном тождестве (4.2) положим $v = \xi v_0$, где $v_0 \in W_{4\delta}^1$. Так как операторы R_{ijQ} коммутируют с операторами умножения на $\xi(x)$, $\xi_{x_i}(x)$ $(i = 1, \dots, n)$, легко видеть, что

$$a_R[u, \xi v_0] = a_R[\xi u, v_0] + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, \xi_{x_i} v_0)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j} u), v_{0x_i})_{L_2(Q)} \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$a_R[w, v_0] = (F, v_0)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j} u), v_{0x_i})_{L_2(Q)}, \tag{5.2}$$

где

$$w = \xi u, \quad F = \xi f - \sum_{i,j=1}^n \xi_{x_i} R_{ijQ} u_{x_j} \in L_2(Q).$$

В формуле (5.2) положим $v_0 = \delta_{-t}^r v_1$ $(1 \leqslant r \leqslant n-1; 0 < t < \delta)$, $v_1 \in W_{3\delta}^1$, а оператор δ_{-t}^r определен по формулам

$$(\delta_{\pm t}^r v_1)(x) = \frac{(v_1)_{\pm t}^r - v_1}{\pm t} \quad (x \in \Omega_{3\delta}),$$

где

$$(v_1)_{\pm t}^r = v_1(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r \pm t, x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Отметим также, что для финитных в $\mathbb{R}^n \setminus Q$ функций v и w, продолженных нулем, справедливы следующие формулы:

$$(\delta_t^r v, w)_{L_2(Q)} = -(v, \delta_{-t}^r w)_{L_2(Q)},$$

$$\delta_t^r(vw) = v\delta_t^r w + w_t^r \delta_t^r v.$$

По построению $v_0 \in W^1_{4\delta}$. Из (3.6) получим

$$a_R[\delta_t^r w, v_1] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}\delta_t^r w_{x_j}, v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma\delta_t^r w, v_1)_{L_2(\partial Q)} =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}w_{x_j}, \delta_{-t}^r v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\delta_t^r(\sigma w) - w_t^r\delta_t^r\sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)} =$$
$$= -a_R[w, v_0] - (w_t^r\delta_t^r\sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)}, \quad (5.3)$$

где

$$a_R[w, v_0] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}w_{x_j}, \delta_{-t}^r v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma w, \delta_{-t}^r v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

С другой стороны, подставляя равенство (5.2) в (5.3), имеем

$$a_R[\delta_t^r w, v_1] = a_1(v_1) + a_2(v_1) + a_3(v_1), \quad (5.4)$$

где

$$a_1(v_1) = -(F, \delta_{-t}^r v_1)_{L_2(Q)},$$
$$a_2(v_1) = \sum_{i,j=1}^n (\delta_t^r R_{ijQ}(\xi_{x_j}u), (v_1)_{x_i})_{L_2(Q)},$$
$$a_3(v_1) = -(w_t^r\delta_t^r\sigma(x), v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

По теореме о конечных разностях [10, теорема 4, §3, гл. III] получим следующие оценки слагаемых $a_1(v_1)$, $a_2(v_1)$, $a_3(v_1)$:

$$|a_1(v_1)| \leqslant k_1\|F\|_{L_2(Q)}\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)}, \quad (5.5)$$

$$|a_2(v_1)| \leqslant k_3\|u\|_{W_2^1(Q)}|v_1|_{W_2^1(Q)}. \quad (5.6)$$

Используя предположение о гладкости $\sigma(x)$ и лемму 5.1, получим

$$a_3(v_1) = 0, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.7)$$

$$|a_3(v_1)| \leqslant k_4\|w|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)}\|v_1|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant k_5\|w\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.8)$$

Из соотношений (5.4)–(5.7) получим

$$|a_R[\delta_t^r w, v_1]| \leqslant k_7(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})|v_1|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.9)$$

$$|a_R[\delta_t^r w, v_1]| \leqslant |a_1(v_1)| + |a_2(v_1)| + |a_3(v_1)| \leqslant$$
$$\leqslant k_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)} + k_3\|u\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)} + k_5\|w\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_1\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.10)$$

3. Положим $v_1 = \delta_t^r w$. Очевидно, что $v_1 \in W^1_{3\delta}$. В силу леммы 3.5

$$|a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w]| \geqslant \operatorname{Re} a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w] \geqslant c_2|\delta_t^r w|^2_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.11)$$

$$|a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w]| \geqslant \operatorname{Re} a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w] \geqslant k_8\|\delta_t^r w\|^2_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.12)$$

Из оценок (5.9), (5.11) и (5.10), (5.12) получим

$$|\delta_t^r w|_{W_2^1(Q)} \leqslant \frac{k_7}{c_2}(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.13)$$

$$|\delta_t^r w|_{W_2^1(Q)} \leqslant \|\delta_t^r w\|_{W_2^1(Q)} \leqslant \frac{k_6}{k_8}(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.14)$$

Используя теорему об аппроксимации обобщенных производных конечно-разностными отношениями (см. [10, теорема 4, §3, гл. III]), мы имеем $w_{x_ix_r} \in L_2(Q)$ $(i + r < 2n)$, т. е. $u_{x_ix_r} \in L_2(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl}))$ $(l = 1, \dots, N(p))$.

4. Докажем теперь, что
$$u_{x_nx_n} \in L_2(Q_{pl})\bigcap B_\delta(x^{pl}).$$
Используя изоморфизм $U_p : L_2(\bigcup\limits_l Q_{pl}) \to L_2^{N(p)}(Q_{p1})$, введенный выше, получим, что $(U_pP_pu)_{x_ix_j} \in L_2(Q_{p1}\bigcap B_\delta(0))$, где $i+j<2n$.

Согласно следствию 5.1 функция $u(x)$ в $B_\delta(0)\bigcap Q_{p1}$ удовлетворяет уравнению
$$-R_{nnp}(U_pP_pu)_{x_nx_n} = \Psi(x), \tag{5.15}$$
где
$$\Psi(x) = \sum_{i+j<2n} R_{ijp}(U_pP_pu)_{x_ix_j} + U_pP_pf \in L_2^{N(p)}(Q_{p1}\bigcap B_\delta(0)).$$

В виду сильной эллиптичности задачи (1.1)-(1.2), матрица R_{nnp} имеет обратную. Таким образом,
$$(U_pP_pu)_{x_nx_n} \in L_2^{N(p)}(Q_{p1}\bigcap B_\delta(0))),$$
т. е. $u_{x_nx_n} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$.

Таким образом, теорема 5.3 для $k=0$ доказана.

5. Пусть $k\in\mathbb{N}$ — любое. В силу доказанного выше нам достаточно установить, что для произвольной фиксированной точки границы $y\in\partial Q_{pi}\setminus\mathcal{K}$ существует шар $B_\delta(y)$ такой, что
$$u\in W_2^{k+2}(Q_{pi}\bigcap B_\delta(y)),$$
а точнее
$$u\in W_2^{k+2}(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl})) \quad (l=1,\dots,N(p)).$$

Из предыдущих рассуждений нам известно, что $u\in W_2^2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$ и выполнено равенство (5.4).

Покажем, что для любого $m=1,2,\dots,k$ выполнено $u\in W_2^{m+2}(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$, и что будет справедливо равенство
$$a_R[\delta_t^rD^\alpha w, v_{m+1}] = a_1^m(v_{m+1}) + a_2^m(v_{m+1}) + a_3^m(v_{m+1}), \tag{5.4$_m$}$$
где
$$\begin{aligned}
&a_1^m(v_{m+1}) = -(D^\alpha F, \delta_{-t}^r v_{m+1})_{L_2(Q)},\\
&a_2^m(v_{m+1}) = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}\delta_t^r(D^\alpha(\xi_{x_j}u)), (v_{m+1})_{x_i})_{L_2(Q)},\\
&a_3^m(v_{m+1}) = -\sum_{\lambda,\beta} b_{\lambda,\beta}\left(((D^\lambda w)_t^r\delta_t^r(D^\beta\sigma), v_{m+1})_{L_2(\partial Q)} + (\delta_t^r(D^\lambda w)D^\beta\sigma, v_{m+1})_{L_2(\partial Q)}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1},0)$, $|\alpha|\leqslant m$, $r=1,\dots,n-1$, $0<|t|<\delta$, суммирование по λ, β осуществляется по всем индексам таким, что $\beta+\lambda=\alpha$, $|\lambda|\leqslant m-1$, $b_{\lambda,\beta}\in\mathbb{R}$, $v_{m+1}\in W_{3\delta}^1$.

Докажем это утверждение при $m=1$. Для этого запишем $a_1(v_1)$ из равенства (5.4) следующим образом:
$$a_1^0(v_1) = a_1(v_1) = -(F,\delta_{-t}^r v_1)_{L_2(Q)} = (\delta_t^rF, v_1)_{L_2(Q)}$$
и перейдем к пределу при $t\to 0$ в равенстве (5.4), тогда
$$a_R[w_{x_r}, v_1] = (F_{x_r}, v_1)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j}u)_{x_r}, (v_1)_{x_i})_{L_2(Q)} - (w\sigma_{x_r}, v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

Положим $v_1=\delta_{-t}^g v_2$, где $g<n$, $0<|t|<\delta$, $v_2\in W_{3\delta}^1$. Тогда, используя (5.3), получим
$$a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2] = -a_R[w_{x_r}, v_1] - ((w_{x_r})_t^g\delta_t^g\sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)} = a_1^1(v_2) + a_2^1(v_2) + a_3^1(v_2), \tag{5.4$_1$}$$

где

$$a_1^1(v_2) = -(F_{x_r}, \delta_{-t}^g v_2)_{L_2(Q)},$$
$$a_2^1(v_2) = \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ}\delta_t^g((\xi_{x_j}u)_{x_r}), v_{2x_i})_{L_2(Q)},$$
$$a_3^1(v_2) = -(w\delta_t^g\sigma_{x_r}, v_2)_{L_2(\partial Q)} - (\sigma_t^g\delta_t^g w, v_2)_{L_2(\partial Q)}.$$

Используя теорему о конечных разностях и учитывая гладкость $\sigma(x)$, получим, аналогично предыдущим оценкам, следующие:

$$|a_1^1(v_2)| \leqslant k_1^1\|F_{x_r}\|_{L_2(Q)}\|v_{2x_g}\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2^1(\|f_{x_r}\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta})})|v_{2x_g}|_{L_2(Q)}, \qquad (5.5_1)$$

$$|a_2^1(v_2)| \leqslant k_3^1\|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}|v_2|_{W_2^1(Q)}, \qquad (5.6_1)$$

$$a_3^1(v_2) = 0, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \qquad (5.7_1)$$

$$|a_3^1(v_2)| \leqslant k_4^1\|w_{x_g}\|_{L_2(\partial Q)}\|v_2\|_{L_2(\partial Q)} + k_5^1\|w\|_{L_2(\partial Q)}\|v_2\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6^1(\|w_{x_g}\|_{W_2^1(Q)} + \|w\|_{W_2^1(Q)})\|v_2\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_7^1\|w\|_{W_2^2(Q)}\|v_2\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \qquad (5.8_1)$$

Из (5.4_1)–(5.7_1) получим

$$|a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2]| \leqslant k_8^1\left(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}\right)|v_2|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q) \qquad (5.9_1)$$

$$|a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2]| \leqslant k_9^1\left(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}\right)\|v_2\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \qquad (5.10_1)$$

Полагая $v_2 = \delta_t^g w_{x_r}$ $(v_2 \in W_{3\delta}^1)$, из (5.9_1), (5.10_1) в силу (5.11)–(5.14) получим

$$|\delta_t^g w_{x_r}|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_{10}^1(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}).$$

Отсюда, используя теорему об аппроксимации обобщенных производных конечно-разностными операторами, имеем

$$w_{x_rx_gx_i} \in L_2(Q) \quad (i = 1, \ldots, n;\ g, r = 1, \ldots, n-1),$$

т. е.

$$u_{x_rx_gx_i} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl})) \quad (l = 1, \ldots, N(p)).$$

Для оценки остальных производных третьего порядка $u_{x_gx_nx_n}$ $(g = 1, \ldots, n-1)$ продифференцируем равенство (5.15) по x_g $(g = 1, \ldots, n-1)$. Тогда в силу невырожденности матрицы R_{nnp} мы получим $u_{x_gx_nx_n} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$. Отсюда, дифференцируя (5.15) по x_n, имеем $u_{x_nx_nx_n} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$. Таким образом,

$$u \in W_2^3(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$$

и имеет место равенство (5.4_1).

Повторяя этот процесс m раз $(m \leqslant k)$, получим, что

$$u \in W_2^{m+2}(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$$

и имеет место равенство (5.4_m).

Таким образом, используя результат теоремы 5.1 о внутренней гладкости и итерационную схему, описанную выше, мы доказали теорему. □

Из теоремы 5.3 и теоремы вложения Соболева вытекает утверждение о принадлежности обобщенного решения пространству непрерывно-дифференцируемых функций внутри подобластей $Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ области Q.

Следствие 5.2. *Пусть уравнение* (1.1) — *сильно эллиптическое. Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^{k+1}(\partial Q)$ *и* $f \in W_2^k(Q)$ $(k \geqslant 0)$. *Тогда* $u \in C^{k+1-[\frac{n}{2}]}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2\ldots; l = 1, \ldots, N(s))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
4. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36
5. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
7. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
8. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1992.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
11. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
12. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
13. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
14. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — *35*. — С. 393–800.
15. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
16. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
17. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
18. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 31–38.
19. *Селицкий А. М.* Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 114–132.
20. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. — С. 324–347.
21. *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 127–136.
22. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
23. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
24. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
25. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
26. *Hartman F., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–310.
27. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the Second and third boundary value problem for difference-differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
28. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* On the smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 504–517.
29. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.

30. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *3*, № 4. — C. 491–500.
31. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — C. 332–361.
32. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Д. А. Неверова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: dneverova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-655-671 UDC 517.929

Smoothness of Generalized Solutions of the Second and Third Boundary-Value Problems for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations

© 2019 **D. A. Neverova**

Abstract. In this paper, we investigate qualitative properties of solutions of boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations.

Earlier results establish the existence of generalized solutions of these problems. It was proved that smoothness of such solutions is preserved in some subdomains but can be violated on their boundaries even for infinitely smooth function on the right-hand side. For differential-difference equations on a segment with continuous right-hand sides and boundary conditions of the first, second, or the third kind, earlier we had obtained conditions on the coefficients of difference operators under which there is a classical solution of the problem that coincides with its generalized solution. Also, for the Dirichlet problem for strongly elliptic differential-difference equations, the necessary and sufficient conditions for smoothness of the generalized solution in Hölder spaces on the boundaries between subdomains were obtained. The smoothness of solutions inside some subdomains except for ε-neighborhoods of angular points was established earlier as well. However, the problem of smoothness of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations remained uninvestigated.

In this paper, we use approximation of the differential operator by finite-difference operators in order to increase the smoothness of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations in the scale of Sobolev spaces inside subdomains. We prove the corresponding theorem.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, "Ob indekse i normal'noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse" [On the index and normal solvability of general elliptic boundary-value problem with a finite group of shifts on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
4. E. M. Varfolomeev, "O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional'no-differentsial'nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike" [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian)

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

5. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, “Issledovanie vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra” [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending of a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami” [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
8. G. A. Kamenskiy and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
9. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
10. V. P. Mikhaylov, *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
11. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial’nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
12. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, “O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
13. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Differentsial’nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela” [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of deformable bodies], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
14. V. V. Podyapol’skii and A. L. Skubachevskii, “Spektral’naya asimptotika sil’no ellipticheskikh differentsial’-no-raznostnykh operatorov” [Spectral asymptotics of strongly elliptic differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, 393–800 (in Russian).
15. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem” [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
16. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Gladkost’ obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial’no raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem” [Smoothness of generalized solutions of elliptic difference differential equations with degenerations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140 (in Russian).
17. V. S. Rabinovich, “O razreshimosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve” [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
18. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 31–38 (in Russian).
19. A. M. Selitskii, “Tret’ya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The third boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 114–132 (in Russian).
20. A. M. Selitskii and A. L. Skubachevskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The second boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347 (in Russian).
21. A. L. Skubachevskii, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadach” [On eigenvalues and eigenfunctions of some nonlocal boundary-value problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 127–136 (in Russian).
22. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
23. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).

24. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
25. E. L. Tsvetkov, "O gladkosti obobshchennykh resheniy tret'ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [On smoothness of generalized solutions of the third boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1993, **45**, No. 8, 1140–1150 (in Russian).
26. F. Hartman and G. Stampacchia, "On some nonlinear elliptic differential-functional equations," *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
27. D. A. Neverova, "Generalized and classical solutions to the Second and third boundary value problem for difference-differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
28. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "On the smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains," *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 504–517.
29. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.
30. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, "On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **3**, No. 4, 491–500.
31. A. L. Skubachevskii, "The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
32. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

D. A. Neverova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: dneverova@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 672–682

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-672-682 УДК 917.986.3

ОБ АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ ОБЪЕДИНЕНИЮ ГЛАДКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

© 2019 г. **Д. А. ПОЛУЭКТОВА, А. Ю. САВИН, Б. Ю. СТЕРНИН**

Аннотация. Для пары гладких трансверсально пересекающихся подмногообразий в некотором объемлющем гладком многообразии исследуется алгебра, порожденная псевдодифференциальными операторами и (ко)граничными операторами, отвечающими подмногообразиям. Устанавливается, что данная алгебра имеет 18 типов порождающих элементов. Для операторов из этой алгебры определяется понятие символа и устанавливается формула композиции.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим гладкое замкнутое многообразие X_0 и два его подмногообразия X_1 и X_2 произвольной размерности, которые пересекаются трансверсально. С этой геометрической ситуацией ассоциирован класс граничных задач с граничными условиями на указанных подмногообразиях. Эти задачи рассматривались, например, в работах [1, 9, 10] (см. также [6, 7]). В цитированных работах были установлены теоремы о фредгольмовости некоторых из задач такого вида, также были получены формулы индекса, учитывающие вклады в индекс стратов многообразия с особенностями — объединения $X_1 \cup X_2$. В дальнейшем эти результаты и методы применялись при исследовании некоторых нелокальных задач с граничными условиями на гладком подмногообразии (см. [2, 4]).

В настоящей работе мы исследуем алгебраические аспекты этой теории. А именно, рассматривается алгебра операторов, мультипликативно порожденная псевдодифференциальными операторами на основном многообразии и на подмногообразиях, а также операторами сужения функций на подмногообразия и соответствующими двойственными операторами продолжения функций с подмногообразия на объемлющее многообразие. Мы показываем, что рассматриваемая алгебра имеет 18 видов аддитивных порождающих элементов, а общий элемент этой алгебры записывается в виде матрицы размера 3×3 вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_0 + G_1 + G_2 + M_0 & C_1 + C_1' & C_2 + C_2' \\ B_1 + B_1' & D_1 + M_1 & T_{12} \\ B_2 + B_2' & T_{21} & D_2 + M_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}', \tag{1.1}$$

где через $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ обозначены прямые суммы пространств Соболева на многообразиях X_0, X_1, X_2 с некоторыми показателями гладкости для каждого из многообразий. Компоненты матрицы (1.1) имеют следующую природу:

- D_0, D_1, D_2 — псевдодифференциальные операторы (далее ПДО) на соответствующих многообразиях X_0, X_1, X_2;

©Российский университет дружбы народов, 2019

- B_1, B_2 и C_1, C_2 — граничные и кограничные операторы (см. [8]), сосредоточенные на подмногообразиях X_1, X_2;
- B'_1, B'_2 и C'_1, C'_2 — граничные и кограничные операторы, сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$;
- G_1, G_2 — операторы Грина (см., напр., [3, 11, 13]), сосредоточенные на подмногообразиях X_1, X_2;
- M_0, M_1, M_2 — операторы Меллина (см., напр., [7]), сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$;
- T_{12}, T_{21} — трансляторы (см. [10]), сосредоточенные на пересечении $X_1 \cap X_2$.

Отметим, что ранее большинство из указанных классов операторов исследовалось в литературе. Однако наш подход в данной работе позволяет рассматривать все эти операторы с единой точки зрения. Более того, мы показываем, что классификация (1.1) по существу дается в терминах того, на каком страте многообразия с особенностями рассматриваемый оператор сосредоточен. Кроме указанной классификации, в данной работе мы также даем формулу для символа таких операторов и устанавливаем формулу композиции.

Постановка задачи, которая решается в настоящей работе, а также формулировки основных результатов даны А. Ю. Савиным и Б. Ю. Стерниным. Работа над окончательной версией текста работы проводилась Д. А. Полуэктовой и А. Ю. Савиным.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 16-31-00176, 16-01-00373, 19-01-00574.

2. Постановка задачи

Рассмотрим пространство $X_0 = \mathbb{R}^n$ с фиксированными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $X_1, X_2 \subset X_0$ — некоторые координатные плоскости, такие что

$$\dim X_k < \dim X_0, \quad k = 1, 2,$$

и

$$\dim(X_1 \cap X_2) > 0.$$

При этом на плоскостях в качестве координат будем брать только соответствующие компоненты из координат $x_1, \ldots, x_n$ объемлющего пространства.

Для $k = 1, 2$ будем обозначать $n_k = \operatorname{codim}_{X_k}(X_1 \cap X_2)$ — коразмерность подпространства $X_1 \cap X_2$ в объемлющем пространстве X_k, $\nu_k = \operatorname{codim}_{X_0} X_k$. Также обозначим $\nu_3 = \operatorname{codim}_{X_0}(X_1 \cap X_2)$.

Тройке (X_0, X_1, X_2) сопоставим следующие операторы:

1. *Псевдодифференциальные операторы* на многообразиях X_0, X_1, X_2:
$$A_k \colon H^s(X_k) \longrightarrow H^{s-m}(X_k), \quad k = 0, 1, 2, \tag{2.1}$$
действующие в пространствах Соболева. Здесь и ниже будем рассматривать только псевдодифференциальные операторы (2.1) (ПДО), ядра Шварца которых имеют компактный носитель.
2. *Элементарные граничные операторы*, отвечающие подмногообразию X_k, $k = 1, 2$:
$$i^k \colon H^s(X_0) \longrightarrow H^{s-\nu_k/2}(X_k), \quad u(y, z) \longmapsto u(y, 0), \tag{2.2}$$
где $s - \nu_k/2 > 0$ и (y, z) — координаты на X_0, в которых $X_k = \{y = 0\}$.
3. *Элементарные кограничные операторы*, отвечающие подмногообразию X_k, $k = 1, 2$:
$$i_k \colon H^{-s+\nu_k/2}(X_k) \longrightarrow H^{-s}(X_0), \quad u(z) \longmapsto u(z) \otimes \delta(y), \tag{2.3}$$
где $s - \nu_k/2 > 0$, $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака и координаты (y, z) выбраны как в предыдущем пункте.

Далее будем считать, что для каждого оператора зафиксированы показатели порядков пространств Соболева, в которых он действует (при этом сами пространства будем обозначать через $H(Z)$, $Z \subset X_0$, не указывая явно их порядок). Кроме того, если рассматривается композиция операторов $D_1 D_2$, то будем предполагать, что пространство Соболева, на котором определен оператор D_1, совпадает с пространством Соболева, в которое действует оператор D_2.

Теперь для любых $k,l \in \{0,1,2\}$ рассмотрим линейное пространство, обозначаемое через $\mathrm{Mor}_{k,l}$, операторов $H(X_l) \to H(X_k)$ некоторого фиксированного порядка, которое мультипликативно порождается операторами (2.1), (2.2) и (2.3) как образующими. Более точно, операторы из $\mathrm{Mor}_{k,l}$ определим как конечные суммы операторов вида

$$\mathcal{D}_{kl} = D_{k,j_1} D_{j_1,j_2} \dots D_{j_N,l}, \tag{2.4}$$

где $D_{\alpha,\beta}\colon H(X_\beta) \to H(X_\alpha)$ — композиция псевдодифференциальных операторов на X_α и X_β с элементарным граничным оператором (если $X_\alpha \subset X_\beta$) или с элементарным кограничным оператором (если $X_\beta \subset X_\alpha$). Обозначим через Mor прямую сумму

$$\mathrm{Mor} = \bigoplus_{k,l=0,1,2} \mathrm{Mor}_{k,l}\,.$$

Элементы этой прямой суммы будем называть *морфизмами* (ср. [9]). Для определенности далее будем рассматривать только морфизмы нулевого порядка, действующие в пространстве

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{2} H^{s_k}(X_k) \tag{2.5}$$

для некоторых фиксированных чисел $s_k \in \mathbb{R}$. Из построения следует, что такие морфизмы определяют алгебру относительно композиции (ее по-прежнему будем обозначать через Mor).

Возникает задача об исследовании операторов из алгебры Mor . Более точно, речь идет об описании природы этих операторов, определения их символов и понятия эллиптичности, доказательстве фредгольмовости эллиптических операторов (теорема конечности) и получении формулы индекса.

В данной работе мы проведем классификацию возникающих операторов, определим понятие символа для них и установим формулу композиции. Вопросы, связанные с эллиптичностью, планируется рассмотреть в отдельной публикации.

3. Классификация морфизмов

Объединение $X_1 \cup X_2$ представляет собой многообразие с особенностями в X_0. Проведем классификацию элементов из Mor в соответствии с тем, на каком страте они сосредоточены. Сначала дадим определение понятия сосредоточенности.

Через $C_c^\infty(X_0)$ обозначим алгебру гладких финитных функций на X_0. Заметим, что пространство $\mathcal{H}$ (см. (2.5)) является $C_c^\infty(X_0)$-модулем относительно умножения на функции из $C_c^\infty(X_0)$ и их сужений на X_1 и X_2.

Определение 3.1. Будем говорить, что оператор $\mathcal{D}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *сосредоточен на подмногообразии* $Z \subset X_0$, если операторы $\varphi\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}\varphi$ являются операторами меньшего порядка, чем $\mathcal{D}$, для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(X_0 \setminus Z)$.

Несложно проверить, что элементарные граничный и кограничный операторы сосредоточены на подмногообразии, которому они отвечают. В самом деле, например, для оператора $i^1 : H(X_0) \to H(X_1)$ и всех функций $\varphi \in C_c^\infty(X_0 \setminus X_1)$ имеем

$$\varphi i^1 = i^1 \varphi = 0.$$

Отсюда вытекает следующая

Лемма 3.1. *Композиция* (2.4) *сосредоточена на пересечении подмногообразий*

$$X_k \cap X_{j_1} \cap \dots \cap X_{j_N} \cap X_l. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1 позволяет все композиции вида (2.4) разбить на четыре класса в соответствии с тем, чему равно пересечение (3.1): оно равно одному из подмногообразий $X_0, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$. Покажем, какой вид имеют операторы в каждом из четырех классов.

Далее все морфизмы из Mor будем представлять как 3×3 матричные операторы $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

1. *Пересечение* (3.1) *равно* X_0. Ясно, что этот случай реализуется тогда и только тогда, когда

$$X_k = X_{i_1} = \dots = X_{i_N} = X_l = X_0,$$

т. е. мы имеем дело с ПДО на X_0. Соответствующий матричный оператор равен

$$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

2. *Пересечение* (3.1) *равно* X_1. Этот случай реализуется тогда и только тогда, когда все многообразия в (3.1) равны либо X_0, либо X_1, так что мы имеем дело с композициями ПДО на X_0 и X_1 с, по крайней мере, одним элементарным граничным или когграничным операторами i_1, i^1. В соответствии с тем, между какими многообразиями эти композиции действуют, получаем матричные операторы вида

$$\begin{pmatrix} G_1 & C_1 & 0 \\ B_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Здесь оператор D_1 всегда является ПДО на X_1, поскольку композиция $i^1 A i_1$, где A — ПДО на X_0, является ПДО на X_1 (см. [5, 8]). Оператор B_1 называется *граничным* оператором и имеет вид

$$A_1\, i^1\, A_0, \tag{3.2}$$

где A_1, A_0 — ПДО на многообразиях X_1 и X_0, соответственно. Отметим, что «длинные» композиции

$$A_1\, i^1\, A_0\, i_1\, A_1'\, i^1\, A_0',$$

где A_1', A_0' — ПДО на X_1 и X_0, соответственно, всегда можно записать в виде (3.2), так как $i^1 A_1' i_1$ есть ПДО на X_1 (см. [5, 8]). Двойственным образом оператор C_1 называется *кограничным оператором* и имеет вид

$$A_0\, i_1\, A_1.$$

Наконец, оператор G_1 называется *оператором Грина*. Он сосредоточен на подмногообразии X_1 и записывается в виде

$$G_1 = A_0\, i_1\, A_1\, i^1\, A_0', \tag{3.3}$$

где A_0, A_0' — ПДО на X_0, A_1 — ПДО на X_1. Отметим, что длинные композиции вида

$$A_0\, i_1\, A_1\, i^1\, A_0' i_1\, A_1'\, i^1\, A_0''$$

сводятся к виду (3.3), поскольку оператор $i^1\, A_0' i_1$ является ПДО на X_1 в силу цитированных работ.

3. *Пересечение* (3.1) *равно* X_2. Этот случай аналогичен предыдущему. Получаем операторы вида

$$\begin{pmatrix} G_2 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$

включающие ПДО D_2 на X_2, (ко)граничные операторы C_2, B_2 и оператор Грина G_2, сосредоточенные на подмногообразии X_2.

4. *Пересечение* (3.1) *равно* $X_1 \cap X_2$. Возникающие в этом случае операторы запишем в виде

$$\begin{pmatrix} M_0 & C_1' & C_2' \\ B_1' & M_1 & T_{12} \\ B_2' & T_{21} & M_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Каждый из операторов в этой матрице является композицией, в которую входят не менее одного (ко)граничного оператора, отвечающих каждому из подмногообразий X_1 и X_2. Операторы M_0, M_1, M_2 называются *операторами Меллина*, сосредоточенными на подмногообразии $X_1 \cap X_2$. Операторы B_1', B_2' и C_1', C_2' называются *граничными* и *кограничными* операторами, сосредоточенными на подмногообразии $X_1 \cap X_2$. Операторы T_{12}, T_{21} называются *трансляторами*, действующими между многообразиями X_1 и X_2 (трансляторы были введены в работе [10]).

Операторы перечисленных выше классов представляют собой аддитивные образующие алгебры Mor. Таким образом, общий морфизм имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_0 + G_1 + G_2 + M_0 & C_1 + C_1' & C_2 + C_2' \\ B_1 + B_1' & D_1 + M_1 & T_{12} \\ B_2 + B_2' & T_{21} & D_2 + M_2 \end{pmatrix} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Итак, алгебра Mor имеет 18 типов аддитивных образующих.

Проиллюстрируем возникающие типы операторов графически. А именно, рассмотрим ориентированный граф с петлями, изображенный на рис. 1. Вершины этого графа отвечают пространствам Соболева на соответствующих многообразиях, петли отвечают ПДО, ребра $X_0 \to X_k$ — граничным операторам i^k, а ребра $X_k \to X_0$ — кограничным операторам i_k.

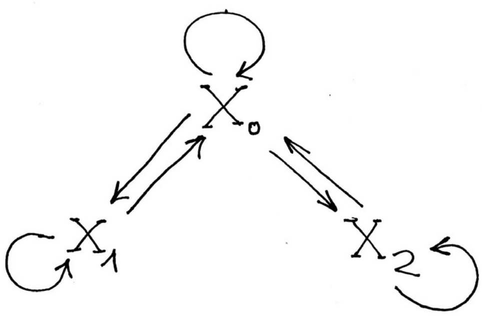

Рис. 1. Ориентированный граф с петлями.

Тогда композиции вида (2.4) отвечает путь

$$X_l \longrightarrow X_{j_1} \longrightarrow X_{j_2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{j_N} \longrightarrow X_k$$

в этом графе из вершины X_l в вершину X_k. При этом тип композиции полностью определяется соответствующим путем. Для путей малой длины соответствующая классификация дается на рис. 2, причем пути отвечают следующим классам операторов:

a) ПДО,
b) граничные операторы,
c) кограничные операторы,
d) операторы Грина;

и на рис. 3, где пути отвечают следующим классам операторов:

a) операторы Меллина на X_0,
b) граничные операторы, сосредоточенные на $X_1 \cap X_2$,
c) кограничные операторы, сосредоточенные на $X_1 \cap X_2$,
d) трансляторы,
e) операторы Меллина на X_1 и X_2.

4. Символы морфизмов

4.1. Символы ПДО и (ко)граничных операторов. Для построения символа общего морфизма из алгебры Mor определим символы образующих на разных подмногообразиях.

1. *Символ ПДО.* Пусть A — ПДО на X_0. Определим его символ[1] на подмногообразии $Z \subset X_0$. Ниже в качестве Z используются многообразия X_0, X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$. Выберем на X_0 координаты (z, y), в которых Z задается уравнениями $y = 0$. Соответствующие копеременные (в слоях T^*X_0) обозначим через (ζ, η). Символ ПДО A обозначим через $A(z, y, \zeta, \eta)$.

[1]Здесь и далее под символом оператора понимается его главный символ.

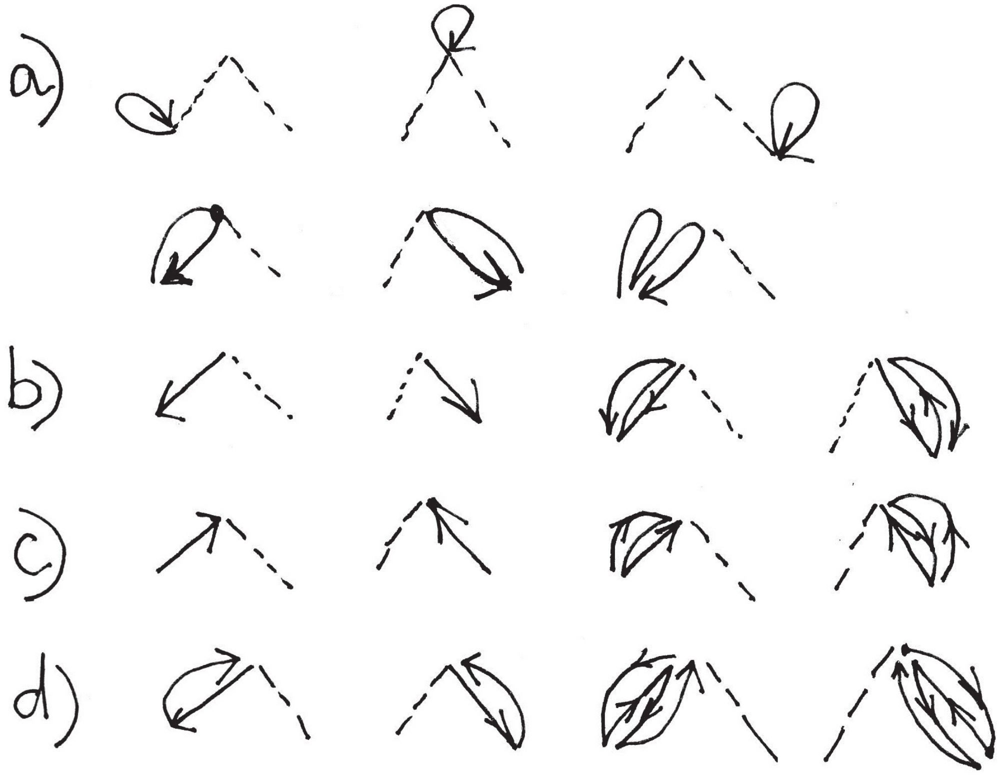

Рис. 2. Типы путей в графе.

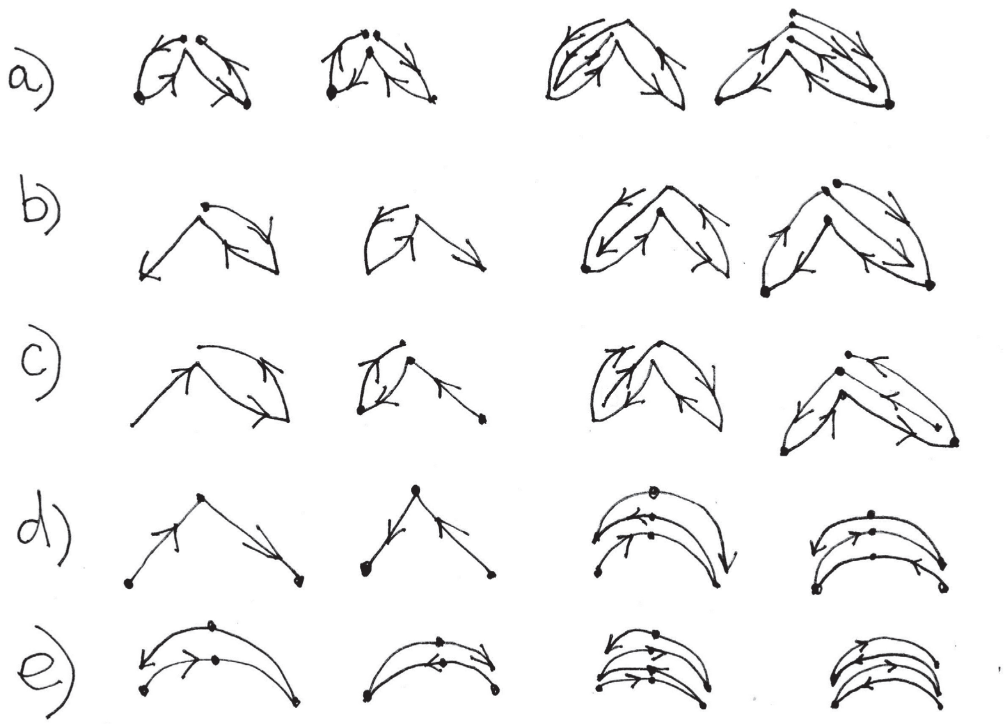

Рис. 3. Типы путей в графе.

Символом ПДО A на подмногообразии Z назовем оператор-функцию

$$\sigma_Z(A)(z,\zeta) = A\left(z,0,\zeta,-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\colon H(\mathbb{R}^k_y) \longrightarrow H(\mathbb{R}^k_y), \tag{4.1}$$

где $(z,\zeta) \in T^*_0 Z$. Аналогично определяются символы ПДО, действующих на X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$.

Ясно, что формула (4.1) получается стандартными операциями: замораживанием коэффициентов оператора на страте и последующим взятием преобразования Фурье по касательным к страту переменным.

2. *Символ граничного оператора.* Символ граничного оператора i^1 на страте X_1 есть оператор

$$\sigma_{X_1}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{\nu_1}_y) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u(y) \longmapsto u(0), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 Z,$$

где мы использовали координаты (z,y) на X_0, в которых $X_1 = \{y=0\}$.

Чтобы определить символ $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)$ оператора i^1 на страте $X_1 \cap X_2$, введем на X_0 координаты (x,y,z), в которых

$$X_1 = \{y=0\}, \quad X_1 \cap X_2 = \{(x,y)=(0,0)\}.$$

Тогда символ $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)$ зададим как оператор-функцию

$$\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{\nu_3}_{x,y}) \longrightarrow H(\mathbb{R}^{n_1}_x), \quad u(x,y) \longmapsto u(x,0), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 Z.$$

Аналогично определяются символы $\sigma_{X_2}(i^2)$ и $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^2)$ оператора i^2.

3. *Символ кограничного оператора.* Символ кограничного оператора i_1 определяется двойственным образом. Более точно, положим

$$\sigma_{X_1}(i_1)(z,\zeta)\colon \mathbb{C} \longrightarrow H(\mathbb{R}^{\nu_1}_y), \quad q \longmapsto q\,\delta(y), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 Z,$$

и положим

$$\sigma_{X_1\cap X_2}(i^1)(z,\zeta)\colon H(\mathbb{R}^{n_1}_x) \longrightarrow H(\mathbb{R}^{\nu_3}_{x,y}), \quad u(x) \longmapsto u(x)\otimes\delta(y), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 Z.$$

Аналогично определяются символы $\sigma_{X_2}(i^2)$ и $\sigma_{X_1\cap X_2}(i^2)$ оператора i^2.

4.2. Символы морфизмов общего вида.

Пусть Z — любой из стратов X_0, X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$.

Определение 4.1. *Символ морфизма* (2.4) *на страте* Z определим как композицию

$$\sigma_Z(\mathcal{D}_{kl}) = \sigma_Z(D_{k,j_1})\,\sigma_Z(D_{j_1,j_2})\,\ldots\,\sigma_Z(D_{j_N,l}) \tag{4.2}$$

символов сомножителей $D_{j_\alpha,j_{\alpha+1}}$ на страте Z.

Для морфизма (3.4) получаем, таким образом, следующие символы:

1. символ на страте X_0 равен символу ПДО D_0:

$$\sigma_{X_0}(\mathcal{D})(z,\zeta) = \sigma(D_0)(z,\zeta)\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z,\zeta) \in T^*_0 X_0;$$

2. символ на страте X_1 является оператор-функцией

$$\sigma_{X_1}(\mathcal{D})(z,\zeta) == \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}(D_0+G_1) & \sigma_{X_1}(C_1) \\ \sigma_{X_1}(B_1) & \sigma(D_1) \end{pmatrix}(z,\zeta), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 X_1$$

со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_{X_1}(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_1}) \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_1}) \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix};$$

3. символ на страте X_2 является оператор-функцией

$$\sigma_{X_2}(\mathcal{D})(z,\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_2}(D_0+G_2) & \sigma_{X_2}(C_2) \\ \sigma_{X_2}(B_2) & \sigma(D_2) \end{pmatrix}(z,\zeta), \quad (z,\zeta) \in T^*_0 X_2$$

со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_{X_2}(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_2}) \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_2}) \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{matrix};$$

4. наконец, символ на пересечении $Z = X_1 \cap X_2$ есть оператор-функция

$$\sigma_Z(\mathcal{D})(z,\zeta) = \begin{pmatrix} \sigma_Z(D_0+G_0+G_1+M_0) & \sigma_Z(C_1+C_1') & \sigma_Z(C_2+C_2') \\ \sigma_Z(B_1+B_1') & \sigma_Z(D_1+M_1) & \sigma_Z(T_{12}) \\ \sigma_Z(B_2+B_2') & \sigma_Z(T_{21}) & \sigma_Z(D_2+M_2) \end{pmatrix}(z,\zeta),$$

где $(z,\zeta) \in T_0^*Z$, со значениями в операторах, действующих в пространствах

$$\sigma_Z(\mathcal{D})(z,\zeta)\colon \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_3}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_1}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_2}) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H(\mathbb{R}^{\nu_3}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_1}) \\ \oplus \\ H(\mathbb{R}^{n_2}) \end{matrix}.$$

4.3. Формула композиции. В этом пункте устанавливается, что символ морфизма корректно определен и справедлива формула композиция. Более точно, установим следующую теорему, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 4.1. *Для морфизма* $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ *его символ* $\sigma_Z(\mathcal{D})$ (*см. определение* 4.1) *на любом страте* Z *не зависит от выражения морфизма через порождающие элементы. Кроме того, для любых морфизмов* $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1 \in \mathrm{Mor}$ *справедлива формула композиции*

$$\sigma_Z(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \sigma_Z(\mathcal{D}_1)\,\sigma_Z(\mathcal{D}_2). \tag{4.3}$$

Доказательство. Из определения символа следует, что формула композиции (4.3) выполнена по построению. Поэтому надо установить только корректность определения символа (т. е., что символ не зависит от выбора представления морфизма в терминах образующих).

1. Определим операторы редукции порядка

$$(\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2)\colon \bigoplus_{k=0,1,2} H^{s_k}(X_k) \longrightarrow \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k), \tag{4.4}$$

где Λ_k — эллиптический ПДО порядка s_k на X_k. Тогда произвольный морфизм $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ можно свести к морфизму нулевого порядка, действующему в пространствах L^2, если морфизм $\mathcal{D}$ домножить слева и справа на соответствующие операторы редукции порядка. При этом несложно показать, что утверждения доказываемой теоремы для исходного морфизма $\mathcal{D}$ следуют из аналогичных утверждений для морфизма нулевого порядка.

Итак, достаточно доказать теорему в случае морфизма $\mathcal{D} \in \mathrm{Mor}$ нулевого порядка

$$\mathcal{D}\colon \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k) \longrightarrow \bigoplus_{k=0,1,2} L^2(X_k). \tag{4.5}$$

2. Для доказательства корректности определения символа оператора (4.5) мы используем подходы работы [12] (в случае гладкого замкнутого многообразия) и работы [14] (в случае краевых задач).

Определим вспомогательное семейство операторов. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{k+\nu}$ с координатами (z, y). Для точки $(z_0, \zeta_0) \in T_0^*\mathbb{R}^k$ определим семейство операторов

$$R_{\lambda,z,y}\colon L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}), \qquad \lambda > 0, \tag{4.6}$$

действующих по формуле (ср. [14])

$$R_{\lambda,z,y}\colon u(z,y) \longmapsto \lambda^{k/4+\nu/2}\, e^{i\lambda z\zeta_0}\, u\big(\lambda^{1/2}(z-z_0), \lambda y\big).$$

Прямая проверка показывает, что операторы (4.6) являются унитарными и для любой функции $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{k+\nu})$ при $\lambda \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$R_{\lambda,z,y} u \to 0 \;\text{ в }\; L^2(\mathbb{R}^{k+\nu}_{z,y}).$$

Теперь вернемся к морфизму (4.5). Рассмотрим его компоненту

$$\mathcal{D}_{kl}\colon L^2(X_l) \longrightarrow L^2(X_k),$$

и пусть $Z \subset X_1 \cup X_2$ — некоторый страт, на котором вычисляется символ. Выберем координаты

$$(z, y) \in \mathbb{R}^{n+\nu} = X_k, \quad (z, y') \in \mathbb{R}^{n+\nu'} = X_l$$

так, что Z определяется уравнениями $Z = \{(z, 0)\}$ в X_k и в X_l. Здесь ν — коразмерность Z в X_k, а ν' — коразмерность Z в X_l.

В этих обозначениях корректность определения символа вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Для любых функций* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_z^n)$, $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}_{y'}^{\nu'})$ *и точки* $(z_0, \zeta_0) \in T_0^* Z$ *имеем*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\| R_{\lambda,z,y}^{-1} \mathcal{D}_{kl} R_{\lambda,z,y'}(u \otimes v) - u \otimes \left[\sigma_Z(\mathcal{D}_{kl})(z_0, \zeta_0)\right] v \right\|_{L^2(X_k)} = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. В силу линейности и мультипликативности выражения в (4.7) достаточно доказать равенство предела нулю в следующих трех случаях:

1. $k = l$, а $\mathcal{D}_{kk}$ является псевдодифференциальным оператором нулевого порядка;
2. $l = 0$, $k > 0$ и
$$\mathcal{D}_{k0} = \Lambda_k i^k \Lambda_0 : L^2(X_0) \longrightarrow L^2(X_k), \tag{4.8}$$
где Λ_0, Λ_k — некоторые операторы редукции порядка на X_0 и X_k;
3. $k = 0$, $l > 0$ и
$$\mathcal{D}_{0l} = \Lambda_0 i_l \Lambda_l : L^2(X_l) \longrightarrow L^2(X_0), \tag{4.9}$$
где Λ_0, Λ_l — некоторые операторы редукции порядка на X_0 и X_l.

Отметим, что при определении операторов (4.8) и (4.9) предполагается, что композиции определены и являются операторами нулевого порядка.

Проверка справедливости соотношения (4.7) для указанных трех классов операторов проводится аналогично проверке в [14], и мы ее здесь для краткости опускаем. □

Из леммы 4.1 следует корректность определения символа для морфизмов нулевого порядка. Отсюда следует корректность определения символа для морфизмов произвольного порядка.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеликин М. И., Стернин Б. Ю.* Об одной системе интегральных уравнений, возникающей в задаче С. Л. Соболева// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 1. — С. 97–102.
2. *Лощенова Д. А.* Задачи Соболева, ассоциированные с действиями групп Ли// Дифф. уравн. — 2015. — *51*, № 8. — С. 1056–1069.
3. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю.* Об операторе Грина в относительной эллиптической теории// Докл. РАН. — 2003. — *391*, № 3. — С. 306–309.
4. *Нгуен Л. Л.* О нелокальных задачах Соболева// Дифф. уравн. — 2012. — *48*, № 8. — С. 1192–1196.
5. *Новиков С. П., Стернин Б. Ю.* Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория// Докл. АН СССР. — 1966. — *170*, № 6. — С. 1265–1268.
6. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 4. — С. 513–527.
7. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 2. — С. 229–241.
8. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности// Тр. Моск. мат. об-ва — 1966. — *15*. — С. 346–382.
9. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические (ко)граничные морфизмы// Докл. АН СССР. — 1967. — *172*, № 1. — С. 44–47.
10. *Стернин Б. Ю.* Эллиптические морфизмы на многообразиях с особенностями (оснащение эллиптического оператора)// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 1. — С. 45–48.
11. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Относительная эллиптическая теория и задача Соболева// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 11. — С. 115–144.
12. *Hörmander L.* Pseudo-differential operators// Commun. Pure Appl. Math. — 1965. — *18*. — С. 501–517.
13. *Nazaikinskii V., Sternin B.* Relative elliptic theory// В сб.: «Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry». — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004. — С. 495–560.
14. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie-Verlag, 1982.

Д. А. Полуэктова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: darya.loshhenova.90@bk.ru

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: antonsavin@mail.ru

$\boxed{\text{Б. Ю. Стернин}}$
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-672-682 UDC 917.986.3

On the Algebra of Operators Corresponding to the Union of Smooth Submanifolds

© 2019 **D. A. Poluektova, A. Yu. Savin, $\boxed{\textbf{B. Yu. Sternin}}$**

Abstract. For a pair of smooth transversally intersecting submanifolds in some enveloping smooth manifold, we study the algebra generated by pseudodifferential operators and (co)boundary operators corresponding to submanifolds. We establish that such an algebra has 18 types of generating elements. For operators from this algebra, we define the concept of symbol and obtain the composition formula.

REFERENCES

1. M. I. Zelikin and B. Yu. Sternin, "Ob odnoy sisteme integral'nykh uravneniy, voznikayushchey v zadache S. L. Soboleva" [On one system of integral equations arising in the Sobolev problem], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1977, **18**, No. 1, 97–102 (in Russian).
2. D. A. Loshchenova, "Zadachi Soboleva, assotsiirovannye s deystviyami grupp Li" [Sobolev problems associated with actions of Lie groups], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2015, **51**, No. 8, 1056–1069 (in Russian).
3. V. E. Nazaykinskiy and B. Yu. Sternin, "Ob operatore Grina v otnositel'noy ellipticheskoy teorii" [On the Green operator in the relative elliptic theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2003, **391**, No. 3, 306–309 (in Russian).
4. L. L. Nguyen, "O nelokal'nykh zadachakh Soboleva" [On nonlocal Sobolev problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2012, **48**, No. 8, 1192–1196 (in Russian).
5. S. P. Novikov and B. Yu. Sternin, "Sledy ellipticheskikh operatorov na podmnogoobraziyakh i K-teoriya" [Traces of elliptic operators on submanifolds and the K-theory], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **170**, No. 6, 1265–1268 (in Russian).
6. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie translyatory na mnogoobraziyakh s mnogomernymi osobennostyami" [Elliptic translators on manifolds with multidimensional singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 4, 513–527 (in Russian).
7. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Indeks zadach Soboleva na mnogoobraziyakh s mnogomernymi osobennostyami" [The index of Sobolev problems on manifolds with multidimensional singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2014, **50**, No. 2, 229–241 (in Russian).
8. B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie i parabolicheskie zadachi na mnogoobraziyakh s granitsey, sostoyashchey iz komponent razlichnoy razmernosti" [Elliptic and parabolic problems on manifolds with the boundary consisting of components of different dimension], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1966, **15**, 346–382 (in Russian).
9. B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie (ko)granichnye morfizmy" [Elliptic (co)boundary morphisms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **172**, No. 1, 44–47 (in Russian).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

10. B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie morfizmy na mnogoobraziyakh s osobennostyami (osnashchenie elliptiches-kogo operatora)” [Elliptic morphisms on manifolds with singularities (rigging of an elliptic operator)], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 1, 45–48 (in Russian).
11. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Otnositel’naya ellipticheskaya teoriya i zadacha Soboleva” [Relative elliptic theory and the Sobolev problem], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1996, **187**, No. 11, 115–144 (in Russian).
12. L. Hörmander, “Pseudo-differential operators,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1965, **18**, 501–517.
13. V. Nazaikinskii and B. Sternin, “Relative elliptic theory,” In: *Aspects of Boundary Problems in Analysis and Geometry*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004, pp. 495–560.
14. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index theory of elliptic boundary problems*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

D. A. Poluektova
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: darya.loshhenova.90@bk.ru

A. Yu. Savin
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: antonsavin@mail.ru

B. Yu. Sternin
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 683–699

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-683-699 УДК 517.958

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

© 2019 г. **А. В. ФАМИНСКИЙ, Е. В. МАРТЫНОВ**

Аннотация. В статье рассматривается начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка. Получен результат о существовании и единственности глобального решения. Также в случае наличия в уравнении абсорбирующего слагаемого, исчезающего на бесконечности, устанавливается затухание решения при больших временах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + (f(u))_x + g(x)u = 0, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x)$, a, b — действительные константы, на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ при $t > 0$ с начальными и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \geqslant 0, \qquad u(t,0) = u_x(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Функция f удовлетворяет условию ограничения роста

$$|f'(u)| \leqslant c|u|^p, \quad p \in [1,8), \tag{1.3}$$

для некоторой константы c и любых $u \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности в дальнейшем всегда предполагается, что $f(0) = 0$.

Изучаются вопросы существования и единственности глобальных по времени решений, а также их убывания при больших временах.

Уравнение Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{1.4}$$

было впервые выведено в работе [18] для описания распространения длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией. Оно является модификацией уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0$$

на случай дисперсионного соотношения более высокого порядка. Как показано, например, в статьях [1, 3] в реальных физических моделях коэффициент b может быть положительным, отрицательным или нулевым. Наряду с квадратичной нелинейностью рассматриваются нелинейности более высокого порядка, например, модифицированное уравнение Кавахары [19]

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + u^2u_x = 0. \tag{1.5}$$

Слагаемое $g(x)u$ моделирует эффект абсорбции.

©Российский университет дружбы народов, 2019

Наиболее изученной задачей для уравнения Кавахары и его обобщений является задача Коши (см., например, библиографию в [12, 15]). В частности, для самого уравнения Кавахары (1.4) глобальная корректность установлена для начальной функции из пространства $H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant -7/4$ (см. [13]). В статье [23] для модифицированного уравнения Кавахары (1.5) с $b > 0$ аналогичный результат получен для начальной функции из $H^2(\mathbb{R})$, а в статье [15] как для самого уравнения Кавахары, так и для его модифицированного аналога также с $b > 0$ при $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$, причем при наличии абсорбирующего слагаемого.

В случае начально-краевой задачи на $\mathbb{R}_+$ с граничными условиями (1.2) глобальная корректность для уравнения Кавахары была установлена в работе [7] в классе бесконечно гладких функций, экспоненциально быстро убывающих при $x \to +\infty$. Аналогичные результаты в классах менее гладких функций, также экспоненциально быстро убывающих на $+\infty$, для уравнения (1.4) при $b = 1$ были получены в [14, 20]. Существование и единственность глобальных решений задачи (1.1), (1.2) с квадратичной нелинейностью (то есть при $f'(u) \equiv u$) для начальной функции из пространств L_2 и H^2 со степенными весами на $+\infty$ были доказаны в [8]. Глобальная корректность в случае уравнения Кавахары (1.4) для начальной функции $u_0 \in H^k(\mathbb{R}_+)$, $k \geqslant 2$, установлена в [2]. В недавней работе [12] глобальная корректность задачи (1.4), (1.2) при $a = b = 0$ получена для $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$.

Для модифицированного уравнения Кавахары (1.5) при $a = b = 1$ начально-краевая задача на ограниченном интервале рассматривалась в статье [10].

В случае задачи Коши как для уравнений (1.4), (1.5), так и для уравнения КдФ справедлив закон сохранения

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} u_0^2\,dx, \tag{1.6}$$

который исключает возможность убывания решений в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при $t \to +\infty$. Если в уравнение добавить абсорбирующее слагаемое $g(x)u$ для неотрицательной функции $g \not\equiv 0$, то такое убывание становится возможным. Подобные результаты об экспоненциальном убывании решений при больших временах в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ были установлены в случае, когда функция g строго положительна при больших $|x|$, для уравнения КдФ в [11, 15], его аналогов с бóльшим порядком нелинейности в [15], уравнения Кавахары и модифицированного уравнения Кавахары в [15]. В недавней работе [4] для уравнения (1.5) без всяких дополнительных абсорбирующих членов был получен результат о степенном убывании решений при $t \to +\infty$ в нормах пространств $L_p(\mathbb{R})$, $p > 4$, при малых начальных данных из пространства H^2 со степенным весом на бесконечности.

Для начально-краевой задачи на $\mathbb{R}_+$ с граничными условиями (1.2) в случае уравнений (1.4) и (1.5) закон сохранения (1.7) следует заменить равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} u^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t u_{xx}^2(\tau,0)\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}_+} u_0^2\,dx \tag{1.7}$$

(аналогичное равенство справедливо и в случае уравнения КдФ с заменой u_{xx} на u_x). Оно показывает, что данная задача обладает определенной внутренней диссипацией, но вопрос о том, является ли это достаточным для убывания решений при больших временах, остается открытым.

Добавление к уравнению КдФ абсорбирующего слагаемого $g(x)u$, где неотрицательная функция g строго положительна при больших значениях x, приводит к экспоненциальному убыванию решений в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $t \to +\infty$ (см. [21, 22]). Аналогичный результат для уравнения Кавахары был установлен в [5, 6].

В статье [11] в случае начально-краевой задачи для уравнения КдФ с абсорбирующим слагаемым был получен результат об убывании решений при больших временах в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ (без оценки скорости убывания) при условии, что функция g положительна на $\mathbb{R}_+$, но убывает к нулю при $x \to +\infty$ с определенной скоростью (см. неравенство (1.9) далее), а начальные данные малы.

В недавней работе [17] этот результат был распространен на случай уравнения Кавахары, причем без предположения малости u_0. Настоящая статья является продолжением [17] на случай уравнения (1.1) с более высоким порядком нелинейности.

Наконец, в случае задачи на ограниченном интервале экспоненциальное убывание решений в норме L_2 может быть получено либо с помощью добавления в уравнение локализованного абсорбирующего слагаемого (см. [24] для уравнения Кавахары и [10] для модифицированного уравнения Кавахары), либо при малых начальных данных без искусственной абсорбции (см. [14, 16] для уравнения Кавахары и [10] для модифицированного уравнения Кавахары).

Пусть

$$\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+$$

для $T > 0$. Положим

$$L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+), \quad W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+), \quad H_+^k = W_{2,+}^k,$$

$$H_{0,+}^k = H_0^k(\mathbb{R}_+) = \{\varphi(x) \in H_+^k : \varphi^{(j)}(0) = 0, 0 \leqslant j \leqslant k-1\}, \quad C_{b,+}^k = C_b^k(\overline{\mathbb{R}}_+)$$

(здесь и далее индекс b обозначает ограниченность отображения) для $p \in [1,+\infty]$ и целых $k \geqslant 0$. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ определим специальные пространства Лебега со степенными весами

$$L_{2,+}^\alpha = \{\varphi(x) : (1+x)^\alpha \varphi \in L_{2,+}\}.$$

Введем понятие слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1.1. Пусть $g \in L_{\infty,+}$, $u_0 \in L_{2,+}$. Функция $u \in L_2(\Pi_T^+)$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (1.2) в полуполосе Π_T^+ для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in L_2(0,T;H_+^5)$, такой что

$$\phi_t \in L_2(\Pi_T^+), \quad \phi\big|_{t=T} \equiv 0, \quad \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} \equiv 0,$$

выполнено $f(u(t,x))\phi_x \in L_1(\Pi_T^+)$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \Big[u\big(\phi_t - \phi_{xxxxx} + b\phi_{xxx} + a\phi_x - g\phi\big) + f(u)\phi_x \Big]\, dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}_+} u_0\phi\big|_{t=0}\, dx = 0. \tag{1.8}$$

На самом деле решения будем рассматривать в более регулярном пространстве

$$X_2(\Pi_T^+) = \{u \in C([0,T];H_{0,+}^2), \quad \partial_x^j u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(4-j)/5}(0,T)) \text{ для } 0 \leqslant j \leqslant 4,$$
$$u \in L_8(0,T;C_{b,+}^2) \quad u \in L_2(\mathbb{R}_+;C[0,T])\},$$

на котором введена естественная норма. Заметим, что в статье [2] была установлена глобальная корректность начально-краевой задачи для уравнения (1.4) с граничными условиями (1.2) при $u_0 \in H_{0,+}^2$ (на самом деле в шкале соответствующих пространств $X_k(\Pi_T^+)$, $k \geqslant 2$ при начальных данных соответствующей гладкости). Заметим также, что если $u \in X_2(\Pi_T^+)$, то $u \in C_b(\overline{\Pi}_T^+)$ и, следовательно, если, например, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, то $f(u(t,x)) \in C([0,T];L_{2,+})$ и тогда $f(u(t,x))\phi_x \in L_1(\Pi_T^+)$ для функции ϕ из определения 1.1.

Также нам потребуется пространство со степенными весами: для $\alpha > 0$ положим

$$X_2^\alpha(\Pi_T^+) = \{u \in X_2(\Pi_T^+) \cap C([0,T];L_{2,+}^\alpha) : u_{xx} \in L_2(0,T;L_{2,+}^{\alpha-1/2})\}$$

с естественной нормой.

В дальнейшем будем опускать пределы интегрирования в интегралах по $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\eta(x)$ гладкую неубывающую функцию такую, что $\eta(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ для $x \geqslant 1$,

$$\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1.$$

Для функции f положим

$$f^*(u) \equiv \int\limits_0^u f(v)\, dv.$$

Приведем основные результаты работы.

Теорема 1.1. *Пусть* $u_0 \in H_{0,+}^2$, $g \in W_{\infty,+}^2$, $f \in C^4(\mathbb{R})$ *и для функции* f *выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого* $T > 0$ *в полуполосе* Π_T^+ *существует слабое решение задачи* (1.1), (1.2) $u \in X_2(\Pi_T^+)$, *которое единственно в более широком пространстве* $L_\infty(0,T;H_{0,+}^2)$.

Теорема 1.2. *Если в дополнение к условиям теоремы* 1.1 *известно, что* $u_0 \in L^{\alpha}_{2,+}$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *то решение* $u \in X^{\alpha}_2(\Pi^+_T)$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теорем* 1.1 *и* 1.2, *и пусть существуют положительные константы* M *и* c_0, *такие что для* $x > 0$

$$g(x) \geqslant \frac{c_0}{1+x}, \tag{1.9}$$

$$|g'(x)| \leqslant Mg(x), \quad |g''(x)| \leqslant Mg(x). \tag{1.10}$$

Тогда решение u *обладает следующим свойством*:

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} = 0. \tag{1.11}$$

В дальнейшем будем использовать простое интерполяционное неравенство,

$$\int (\varphi')^2\psi\,dx \leqslant \left(\int (\varphi'')^2\psi\,dx\right)^{1/2}\left(\int \varphi^2\psi\,dx\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\int \varphi^2|\psi''|\,dx, \tag{1.12}$$

справедливое для функций $\varphi \in H^2_+ \cap H^1_{0,+}$ и гладких весовых функций ψ при условии, что интегралы в правой части существуют.

Нам также понадобится одно более продвинутое неравенство.

Лемма 1.1. *Пусть положительные функции* $\psi_j \in W^1_\infty(0,r)$ $\forall r > 0$, $j = 0$ *и* 1, *причем существует константа* $\widetilde{c} > 0$ *такая, что для каждого* j

$$|\psi_j'(x)| \leqslant \widetilde{c}\psi_j(x) \quad \forall\ x > 0.$$

Пусть

$$2 \leqslant q \leqslant +\infty, \quad s = \frac{1}{8} - \frac{1}{4q}.$$

Тогда существует константа $c = c(q,\widetilde{c})$ *такая, что*

$$\big\|\varphi\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\big\|_{L_{q,+}} \leqslant c\Big[\big\|\big(|\varphi''|+|\varphi|\big)\psi_0^{1/2}\big\|^{2s}_{L_{2,+}}\big\|\varphi\psi_1^{1/2}\big\|^{1-2s}_{L_{2,+}} + \big\|\varphi\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\big\|^{1-2/q}_{L_{2,+}}\big\|\varphi\psi_1^{1/2}\big\|^{2/q}_{L_{2,+}}\Big] \tag{1.13}$$

для любой функции $\varphi \in H^2(0,r)$ $\forall r > 0$ *такой, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi''\psi_0^{1/2}, \varphi\psi_0^{1/2}, \varphi\psi_1^{1/2} \in L_{2,+}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что φ — гладкая, убывающая при $x \to +\infty$, функция.

Интегрированием по частям и использованием свойств функций ψ_j находим, что

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx = -\int \varphi''\varphi\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx - \int \varphi'\varphi(\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2})'\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\int (\varphi'')^2\psi_0\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2} + c\Big(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_0\,dx\Big)^{1/4}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/4},$$

откуда следует неравенство

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx \leqslant c\Big(\int \big((\varphi'')^2+\varphi^2\big)\psi_0\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Далее используя элементарное неравенство

$$\sup_{x>0}\phi^2 \leqslant 2\int |\phi'|\cdot|\phi|\,dx,$$

находим, что

$$\sup_{x>0}\big(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\big) \leqslant c\int \big(|\varphi'|+|\varphi|\big)\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\cdot|\varphi|\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\int |\varphi'|\psi_0^{1/4}\psi_1^{1/4}\cdot|\varphi|\psi_1^{1/2}\,dx + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2} + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx,$$

откуда, применяя (1.14), выводим, что

$$\sup_{x>0}\bigl(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\bigr) \leqslant c\Bigl(\int \bigl((\varphi'')^2+\varphi^2\bigr)\psi_0\,dx\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Bigr)^{3/4} + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx, \tag{1.15}$$

что совпадает с (1.13) при $q=+\infty$. Если $q<+\infty$, то из (1.15) следует неравенство

$$\int \bigl(|\varphi|\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\bigr)^q\,dx \leqslant \Bigl(\sup_{x>0}\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\Bigr)^{q/2-1}\int \varphi^2\psi_1\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\Bigl(\int \bigl((\varphi'')^2+\varphi^2\bigr)\psi_0\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Bigr)^{(3q+2)/8} + c\Bigl(\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int \varphi^2\psi_1\,dx,$$

что завершает доказательство леммы. □

Замечание 1.1. Если $\psi_0(x)\leqslant c\psi_1(x)$ $\forall x>0$, то неравенство (1.13) в более общем виде было доказано ранее, например, в [8].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассматривается вспомогательная линейная задача. Доказательство результатов о разрешимости (теоремы 1.1 и 1.2) содержится в разделе 3, а об убывании решений при больших временах (теорема 1.3) — в разделе 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00536).

2. Вспомогательная линейная задача

В полуполосе Π_T^+ рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = F(t,x), \tag{2.1}$$

$$v\big|_{t=0}=u_0(x),\quad v\big|_{x=0}=v_x\big|_{x=0}=0. \tag{2.2}$$

Слабое решение этой задачи понимается полностью аналогично определению 1.1. Заметим, что слабое решение задачи (2.1), (2.2) единственно в пространстве $L_2(\Pi_T^+)$ (см., например, [2]).

Лемма 2.1. *Пусть* $u_0\in H^2_{0,+}$, $F\in L_2(0,T;H^2_{0,+})$. *Тогда существует* (*единственное*) *решение задачи* (2.1), (2.2) $v\in X_2(\Pi_T^+)$ *и для любого* $t\in(0,T]$

$$\|v\|_{X_2(\Pi_t^+)} \leqslant c(T)\left(\|u_0\|_{H^2_+} + t^{1/10}\|F\|_{L_2(0,T;H^2_+)}\right), \tag{2.3}$$

$$\int v^2(t,x)\,dx + \int_0^t v_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau = \int u_0^2\,dx + 2\iint_{\Pi_t^+} Fv\,dxd\tau, \tag{2.4}$$

$$\int \left[v_{xx}^2(t,x)+bv_x^2(t,x)-2f^*\bigl(v(t,x)\bigr)\right]dx + \int_0^t \left[(v_{xxxx}-bv_{xx})^2+av_{xx}^2\right]\big|_{x=0}\,d\tau -$$
$$-2\iint_{\Pi_t^+} f'(v)(v_xv_{xxxx}-bv_xv_{xx})\,dxd\tau = \int\left[(u_0'')^2+b(u_0')^2-2f^*(u_0)\right]dx +$$
$$+\iint_{\Pi_t^+}\bigl(2F_{xx}v_{xx}-2bFv_{xx}-Ff(v)\bigr)\,dxd\tau, \tag{2.5}$$

где функция f *удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, $f(0)=0$.

Доказательство. Существование решения $v\in X_2(\Pi_T^+)$, удовлетворяющего оценке (2.3), было ранее доказано в статье [2].

Существование решений задачи (2.1)-(2.2) в классе гладких быстро убывающих на $+\infty$ функций (при соответствующих условиях на u_0 и F) было ранее установлено в статье [7]. Для таких решений равенства (2.4) и (2.5) получаются умножением уравнения (2.1) соответственно на $2v(t,x)$ и

$\big(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2f(v(t,x))\big)$ и последующим интегрированием. Общий случай получается предельным переходом. При этом неравенства

$$\|f^*(v)\|_{C([0,T];L_{1,+})} \leqslant c \sup_{t\in(0,T)} \int |v|^{p+2}\,dx \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^p \|v\|^2_{C([0,T];L_{2,+})} \leqslant c\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\|f'(v)v_x v_{xxxx}\|_{L_1(\Pi_T^+)} \leqslant c \iint\limits_{\Pi_T^+} |v|^p |v_x v_{xxxx}|\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^{p-1} \|v_x\|_{L_2(\Pi_T^+)} \Big(\int \sup_{t\in(0,T)} v^2\,dx\Big)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \Big(\int_0^T v_{xxxx}^2\,dt\Big)^{1/2} \leqslant c(T)\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\|Ff(v)\|_{L_1(\Pi_T^+)} \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^p \|v\|_{C([0,T];L_{2,+})} \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})} \leqslant C(T)\|v\|^{p+1}_{X_2(\Pi_T^+)} \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}$$

обеспечивают возможность предельного перехода в соответствующих слагаемых. □

Замечание 2.1. Если $u_0 \in L_{2,+}$, $F \in L_1(0,T;L_{2,+})$, то предельным переходом из равенства (2.4) получаем существование (единственного) решения задачи (2.1), (2.2) из пространства $L_\infty(0,T;L_{2,+})$, для которого при почти всех $t\in(0,T)$ справедливо неравенство

$$\int v^2(t,x)\,dx \leqslant \int u_0^2\,dx + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} Fv\,dxd\tau. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Пусть $u_0 \in L^\alpha_{2,+}$, $F \in L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда существует (единственное) решение $v(t,x)$ задачи* (2.1), (2.2) *такое, что $v \in C([0,T];L^\alpha_{2,+})$, $v_{xx} \in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$ и для любого $t\in(0,T]$*

$$\|v\|_{C([0,t];L^\alpha_{2,+})} + \|v_{xx}\|_{L_2(0,t;L^{\alpha-1/2}_{2,+})} \leqslant c(T,\alpha)\Big(\|u_0\|_{L^\alpha_{2,+}} + \|F\|_{L_1(0,t;L^\alpha_{2,+})}\Big), \tag{2.7}$$

$$\int v^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} \big[5v_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')v_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')v^2\big]\,dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int u_0^2\rho\,dx + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} Fv\rho\,dxd\tau, \tag{2.8}$$

где

$$\rho(x) \equiv (1+x)^{2\beta}$$

для $\beta\in(0,\alpha]$.

Доказательство. В гладком случае (см. доказательство предыдущей леммы) неравенство (2.8) получается умножением уравнения (2.1) на $2v(t,x)\rho(x)$ и последующим интегрированием. При $\beta=\alpha$ из этого неравенства и неравенства (1.12) следует оценка (2.7), которая позволяет сделать предельный переход и получить утверждение леммы. □

3. Существование и единственность решений

Доказательство теоремы 1.1. Сначала методом сжимающих отображений построим локальное по времени решение. Для этого для некоторого $T>0$ рассмотрим отображение $v=\Lambda u$, где для произвольной функции $u\in X_2(\Pi_T^+)$ функция $v\in X_2(\Pi_T^+)$ в полуполосе Π_T^+ является решением начально-краевой задачи для уравнения

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = -f'(u)u_x - g(x)u \tag{3.1}$$

с граничными условиями (2.2). Имеем:

$$\big(f'(u)u_x\big)_{xx} = f'(u)u_{xxx} + 3f''(u)u_xu_{xx} + f'''(u)u_x^3,$$

а тогда

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \big(f'(u)u_{xxx}\big)^2\,dxdt \leqslant c^2 \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^{2p-2} \int \sup_{t\in(0,T)} u^2\,dx \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int\limits_0^T u_{xxx}^2\,dt \leqslant c_1 \|u\|^{2p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \Big[\big(f''(u)u_x u_{xx}\big)^2 + \big(f'''(u)u_x^3\big)^2 + \big(f'(u)u_x\big)^2\Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c(T)\|f'(\theta)\|^2_{C^2[|\theta|\leqslant\|u\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)}]} \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}(u_x^4+1) \sup_{t\in(0,T)} \int (u_{xx}^2+u_x^2)\,dx.$$

В итоге для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ имеем

$$\|f'(u)u_x\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \leqslant \Phi(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}). \tag{3.2}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\|gu\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \leqslant cT^{1/2}\|g\|_{W^2_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;H_+^2)}. \tag{3.3}$$

В итоге получаем, что $f'(u)u_x + gu \in L_2(0,T;H^2_{0,+})$ для $u \in X_2(\Pi_T^+)$ и, следовательно, в силу леммы 2.1 отображение Λ определено, и согласно (2.3)

$$\|\Lambda u\|_{X_2(\Pi_T^+)} \leqslant c(T)\Big(\|u_0\|_{H_+^2} + T^{1/10}\Phi(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)})\Big) \tag{3.4}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ. Кроме того, аналогично (3.4) нетрудно показать, что

$$\|\Lambda u - \Lambda\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)} \leqslant T^{1/10}\Phi_1\big(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)}\big)\|u-\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)} \tag{3.5}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ_1.

Из неравенств (3.4) и (3.5) стандартным способом получаем результат о существовании единственного решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $X_2(\Pi_T^+)$ при достаточно малых T (зависящих от $\|u_0\|_{H_+^2}$).

Чтобы продолжить это решение на любой отрезок времени, установим соответствующие априорные оценки. Пусть $u \in X_2(\Pi_T^+)$ является решением рассматриваемой задачи для некоторого $T > 0$. Применим равенство (2.4) для

$$u \equiv v, \quad F \equiv -f'(u)u_x - gu,$$

тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} gu^2\,dxd\tau = \int u_0^2\,dx. \tag{3.6}$$

Это равенство, разумеется, является полным аналогом равенства (1.7)), откуда следует, что, поскольку $g \in L_{\infty,+}$,

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(0,T)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}}. \tag{3.7}$$

Далее в аналогичной ситуации применим равенство (2.5). Тогда, поскольку

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \big(f'(u)u_x\big)_{xx}u_{xx}\,dxdt = \iint\limits_{\Pi_T^+} f'(u)u_x u_{xxxx}\,dxdt,$$

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} f'(u)f(u)u_x\,dxdt = 0,$$

получаем, что

$$\int \left[u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) - 2f^*\big(u(t,x)\big)\right]\,dx + a\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau +$$
$$+\iint_{\Pi_t^+} \left[2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} - guf(u)\right]\,dxd\tau \leqslant \int \left[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2f^*(u_0)\right]\,dx. \quad (3.8)$$

Воспользовавшись неравенством (1.13) для $q = p+2 < 10$ (тогда $sq < 1$) и $\psi_0 = \psi_1 \equiv 1$, находим, что с учетом уже установленной оценки (3.7)

$$\int \big|f^*\big(u(t,x)\big)\big|\,dx \leqslant \varepsilon \int u_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}}), \quad (3.9)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Тогда из неравенства (3.8) (с использованием также (1.12) для $\psi \equiv 1$) следует, что поскольку $g \in W_{\infty,+}^2$, справедлива оценка

$$\|u\|_{C([0,T];H_+^2)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}), \quad (3.10)$$

которая и обеспечивает существование решения $u \in X_2(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$.

Для доказательства единственности решения в более широком классе прежде всего заметим, что если $u \in L_\infty(0,T;H_+^2)$, то очевидно, что $f'(u)u_x \in L_1(0,T;L_{2,+})$. Рассмотрим два решения u и $\widetilde{u}$ из пространства $L_\infty(0,T;H_{0,+}^2)$. Запишем для

$$v \equiv u - \widetilde{u}$$

неравенство (2.6), тогда

$$\int v^2(t,x)\,dx \leqslant 2\Big|\iint_{\Pi_t^+} \big(f'(u)u_x - f'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\big)v\,dxd\tau\Big| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{|\theta|\leqslant\max(\|u\|_{L_\infty(\Pi_T^+)},\|\widetilde{u}\|_{L_\infty(\Pi_T^+)})} |f''(\theta)| \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\in\Pi_T^+}\big(|u_x(t,x)| + |\widetilde{u}_x(t,x)|\big) \cdot \iint_{\Pi_t^+} v^2\,dxd\tau,$$

что в силу леммы Гронуолла и устанавливает единственность в пространстве $L_\infty(0,T;H_{0,+}^2)$. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Повторим схему доказательства предыдущей теоремы, только отображение Λ будем строить в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$. Заметим, что

$$\|f'(u)u_x\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant cT \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}\big(|u|^{p-1}|u_x|\big) \sup_{t\in(0,T)} \|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}^\alpha} \leqslant cT\|u\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}^{p+1} \quad (3.11)$$

и аналогично

$$\|f'(u)u_x - f'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant T\Phi(T, \|u\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)})\|u - \widetilde{u}\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)} \quad (3.12)$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ. Кроме того очевидно, что

$$\|gu\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant T\|g\|_{L_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+}^\alpha)}. \quad (3.13)$$

В итоге из оценок (3.4), (3.5), (3.11)–(3.13) следует существование единственного решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ при достаточно малых T (зависящих от $\|u_0\|_{H_+^2}$ и $\|u_0\|_{L_{2,+}^\alpha}$).

Далее получим в дополнение к (3.10) оценку решения в весовом пространстве. Для этого применим неравенство (2.8) для

$$u \equiv v, \quad F \equiv -f'(u)u_x - gu$$

и $\beta \in (0, \alpha]$. Тогда при $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} \big[5u_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2\big]\,dxd\tau + \\ + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} gu^2\rho\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\rho\,dx - 2\iint\limits_{\Pi_t^+} f'(u)uu_x\rho\,dxd\tau. \quad (3.14)$$

Здесь

$$-\iint\limits_{\Pi_t^+} f'(u)uu_x\rho\,dxd\tau = \iint\limits_{\Pi_t^+} \big(f'(u)u\big)^*\rho'\,dxd\tau, \quad (3.15)$$

и тогда с учетом уже полученной оценки (3.10)

$$\Big|\iint\limits_{\Pi_t^+} \big(f'(u)u\big)^*\rho'\,dxd\tau\Big| \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^p \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\,dxd\tau \leqslant c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\,dxd\tau. \quad (3.16)$$

Применим неравенство (1.12) для оценки второго интеграла в левой части (3.14), тогда из (3.14), (3.15) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} u_{xx}^2\rho'\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\rho\,dx + c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho\,dxd\tau. \quad (3.17)$$

Выбирая $\beta = \alpha$, выводим из (3.17), что

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+}^\alpha)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{L_{2,+}^\alpha}, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}). \quad (3.18)$$

Оценки (3.10) и (3.18) позволяют продолжить локальное по времени решение до решения в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$. $\square$

4. Убывание решений при больших временах

Установленные в разделе 3 оценки (3.10), (3.18) не являются равномерными при $T \to +\infty$. В следующих двух леммах будут установлены аналоги этих оценок, уже не зависящие от T.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и пусть дополнительно известно, что* $g(x) > 0$ *для любого* $x \geqslant 0$, *и для функции* g *справедливы неравенства* (1.10). *Тогда для решения* u *задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащего пространству* $X_2(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$, *справедливо неравенство*

$$\|u(t,\cdot)\|_{H_+^2} \leqslant c(\|u_0\|_{H_+^2}, M) \quad \forall t \geqslant 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (3.6), тогда в силу неотрицательности функции g получаем, что

$$\|u\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}_+;L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|u_0\|_{L_{2,+}}. \quad (4.2)$$

Из (3.6) и (3.8) следует, что для любой положительной константы $\widetilde{c}$

$$\int \big[u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) + \widetilde{c}u^2(t,x) - 2f^*\big(u(t,x)\big)\big]\,dx + (a+\widetilde{c})\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + \\ + \iint\limits_{\Pi_t^+} \big[2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} + \widetilde{c}gu^2 - guf(u)\big]\,dxd\tau \leqslant \\ \leqslant \int \big[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 + \widetilde{c}u_0^2 - 2f^*(u_0)\big]\,dx. \quad (4.3)$$

Из неравенств (1.10) и (1.12) находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int 2(2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx}\,dx\Big| \leqslant \varepsilon \int gu_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, M)\int gu^2\,dx. \quad (4.4)$$

Далее, положим

$$q = p + 2, \quad s = (q-2)/(8q), \quad \psi_0 \equiv g, \quad \psi_1 \equiv g^{(10-q)/(3q+2)}$$

(очевидно, что эти функции удовлетворяют условиям леммы 1.1). Нетрудно видеть, что

$$\frac{q}{2} - qs = \frac{3q+2}{8}, \quad qs + \frac{10-q}{3q+2} \cdot \frac{3q+2}{8} = 1.$$

Тогда, применяя неравенство (1.13), находим, что

$$\Bigl|\int guf(u)\,dx\Bigr| \leqslant c\int g|u|^q\,dx = c\|u\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\|_{L_{q,+}}^q \leqslant$$
$$\leqslant c(M)\Bigl[\bigl\|\bigl(|u_{xx}|+|u|\bigr)\psi_0^{1/2}\bigr\|_{L_{2,+}}^{2qs}\|u\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{q-2qs} + \|u\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\|_{L_{2,+}}^{q-2}\|u\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^2\Bigr]. \tag{4.5}$$

Здесь

$$\int u^2 g^{(10-q)/3q+2)}\,dx = \int (gu^2)^{(10-q)/(3q+2)} \cdot u^{2(4q-8)/(3q+2)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{(10-q)/(3q+2)}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(4q-8)/(3q+2)}.$$

Тогда

$$\Bigl(\int (u_{xx}^2+u^2)\psi_0\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int u^2\psi_1\,dx\Bigr)^{(3q+2)/8} \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\int g(u_{xx}^2+u^2)\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{(10-q)/8}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}.$$

Кроме того,

$$\Bigl(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1\,dx = \Bigl(\int u^2 g^{8/(3q+2)}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2 g^{(10-q)/(3q+2)},$$

где

$$\int u^2 g^{8/(3q+2)}\,dx = \int (gu^2)^{8/(3q+2)} \cdot u^{6(q-2)/(3q+2)}\,dx \leqslant \Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{8/(3q+2)}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{3(q-2)/(3q+2)},$$

и, таким образом, поскольку

$$\frac{8}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2} + \frac{10-q}{3q+2} = 1, \quad \frac{3(q-2)}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2} + \frac{4(q-2)}{3q+2} = \frac{q-2}{2},$$

находим, что

$$\Bigl(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1\,dx \leqslant \int gu^2\,dx\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}.$$

В итоге с учетом уже полученной оценки (4.2) выводим, что, так как $(q-2)/8 < 1$,

$$\Bigl|\int guf(u)\,dx\Bigr| \leqslant \varepsilon\int gu_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, \|u_0\|_{L_{2,+}}, M)\int gu^2\,dx. \tag{4.6}$$

Таким образом, если выбрать $\widetilde{c}$ достаточно большим (зависящим от M, b, $\|u_0\|_{L_{2,+}}$), то из неравенства (4.3) следует, что равномерно по t

$$\int \bigl[u_{xx}^2(t,x) + \widetilde{c}u^2(t,x) - 4f^*\bigl(u(t,x)\bigr)\bigr]\,dx \leqslant c. \tag{4.7}$$

Заметим, что, применяя вместо (3.7) оценку (4.2), полностью аналогично (3.9) находим, что равномерно по t

$$\int \bigl|f^*\bigl(u(t,x)\bigr)\bigr|\,dx \leqslant \varepsilon\int u_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, \|u_0\|_{L_{2,+}}). \tag{4.8}$$

Тогда из неравенств (4.7), (4.8) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3. *Тогда для решения u задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащего пространству* $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$, *существует* $\beta\in(0,\alpha]$ *такое, что*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}^\beta}\leqslant\|u_0\|_{L_{2,+}^\beta}\quad\forall t\geqslant 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (3.14) и равенством (3.15). Применяя вместо оценки (3.10) оценку (4.1), находим аналогично (3.16), что для любого $t>0$

$$\Bigl|\iint\limits_{\Pi_t^+}\bigl(f'(u)u\bigr)^*\rho'\,dxd\tau\Bigr|\leqslant c\sup_{t>0,x>0}|u|^p\iint\limits_{\Pi_t^+}u^2\rho'\,dxd\tau\leqslant c(\|u_0\|_{H_+^2},M)\iint\limits_{\Pi_t^+}u^2\rho'\,dxd\tau. \tag{4.10}$$

Далее будем считать без ограничения общности, что $\beta\in(0,1/2]$. Тогда, в частности,

$$|\rho''(x)|\leqslant\rho'(x),\quad 0\leqslant\rho'''(x)\leqslant 2\rho'(x),\quad \rho^{(5)}(x)\geqslant 0$$

(напомним, что $\rho(x)=(1+x)^{2\beta}$). Применяя неравенство (1.12), находим, что

$$\int\bigl[(3b\rho'-5\rho''')u_x^2+(\rho^{(5)}-b\rho'''-a\rho')u^2\bigr]\,dx\geqslant-\int u_{xx}^2\rho'\,dx-c(a,b)\int u^2\rho'\,dx. \tag{4.11}$$

Поскольку в силу (1.9)

$$2g(x)\rho(x)\geqslant 2c_0\rho'(x)/(2\beta),$$

из неравенств (3.14), (4.10), (4.11) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\,dx+\left(\frac{2c_0}{2\beta}-c(a,b)-c\bigl(\|u_0\|_{H_+^2},M\bigr)\right)\iint\limits_{\Pi_t^+}u^2\rho'\,dxd\tau\leqslant\int u_0^2\rho\,dx,$$

при достаточно малых $\beta>0$ приходим к неравенству (4.9). □

Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны статье [11]. Для любых положительных β, L и ε через $\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ обозначим множеством функций $\varphi\in H_{0,+}^2\cap L_{2,+}^\beta$ таких, что

$$\|\varphi\|_{H_+^2}+\|\varphi\|_{L_{2,+}^\beta}\leqslant L,\quad \|\varphi\|_{L_{2,+}}\geqslant\varepsilon.$$

Лемма 4.3. *Пусть* $g\in W_{\infty,+}^2$ — *неотрицательная функция такая, что*

$$g(x)\geqslant g_0>0$$

для $x\in I$, *где* I — *непустой интервал на* $\mathbb{R}_+$, *а для функции* f *выполнены условия теоремы* 1.1.

Тогда для любого $T>0$ *и любого класса* $\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ *существует константа* $c=c(T,\beta,L,\varepsilon)$ *такая, что если* $u_0\in\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$, *то для соответствующего решения* u *задачи* (1.1), (1.2) *из пространства* $X_2^\beta(\Pi_T^+)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I}u^2(t,x)\,dxdt\leqslant c\iint\limits_{\Pi_T^+}g(x)u^2(t,x)\,dxdt. \tag{4.12}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (4.12) не выполнено. Пусть $\{u_{0k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ является такой последовательностью начальных функций, что для соответствующих решений $\{u_k(t,x)\}_{k\in\mathbb{N}}\in X_2^\beta(\Pi_T^+)$ справедливо свойство

$$\lim_{k\to+\infty}\iint\limits_{\Pi_T^+}g(x)u_k^2(t,x)\,dxdt\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I}u_k^2(t,x)\,dxdt\right)^{-1}=0.$$

В частности, из ограниченности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ (см. оценку (3.7)) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\iint\limits_{\Pi_T^+}g(x)u_k^2(t,x)\,dxdt=0. \tag{4.13}$$

Следовательно, в силу условий на функцию $g(x)$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_I u_k^2(t,x)\,dxdt=0. \tag{4.14}$$

Так как последовательность $\{u_{0k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в пространстве $H^2_{0,+}\cap L^\beta_{2,+}$, из теоремы 1.2 следует, что равномерно по k

$$\|u_k\|_{X_2^\beta(\Pi_T^+)}\leqslant c. \tag{4.15}$$

Тогда используя само уравнение (1.1), находим, что для любого $r>0$ равномерно по k

$$\|u_{kt}\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,r))}\leqslant c(r). \tag{4.16}$$

Переходя к подпоследовательности (с сохранением обозначений), стандартным рассуждением получаем, что

$$\begin{gathered}
u_{0k}\rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } H^2_{0,+} \text{ и } L^\beta_{2,+},\\
u_k\rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H^2_{0,+}) \text{ и } L_\infty(0,T;L^\beta_{2,+}),\\
u_k\rightharpoonup u \quad \text{слабо в } L_2(0,T;H^4(0,r))\ \forall r>0,\\
u_k\to u \quad \text{сильно в } L_2(0,T;H^3(0,r))\ \forall r>0.
\end{gathered}$$

Из последнего свойства в сочетании с (4.14) следует, что

$$u(t,x)=0 \quad \text{для } t\in(0,T),\ x\in I. \tag{4.17}$$

Пусть $\phi(t,x)$ — произвольная функция такая, что $\phi\in L_2(0,T;H^5_+)$, $\phi_t\in L_2(\Pi_T^+)$,

$$\phi\big|_{t=T}=0,\quad \phi\big|_{x=0}=\phi_x\big|_{x=0}=\phi_{xx}\big|_{x=0}=0.$$

Положим

$$\phi_r(t,x)\equiv\phi(t,x)\eta(r-x)$$

для $r>0$. Тогда для любого k в силу равенства (1.8)

$$\iint_{\Pi_T^+}\Big(u_k\big(\phi_{rt}-\phi_{rxxxxx}+b\phi_{rxxx}+a\phi_{rx}-g(x)\phi_r\big)+f(u_k)\phi_{rx}\Big)\,dxdt+\int u_{0k}\phi_r\big|_{t=0}\,dx=0. \tag{4.18}$$

Заметим, что при $k\to+\infty$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi_T^+}\big|f(u_k)-f(u)\big|\cdot|\phi_{rx}|\,dxdt &\leqslant c\sup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\in\Pi_T^+}|u_k(t,x)|^p\iint_{\Pi_T^+}|u_k-u|\cdot|\phi_{rx}|\,dxdt\leqslant\\
&\leqslant c_1\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k\|^p_{L_\infty(0,T;H^2_+)}\|u_k-u\|_{L_2((0,T)\times(0,r))}\|\phi\|_{L_2(0,T;H^1_+)}\to 0.
\end{aligned}$$

Поэтому переходя к пределу сначала при $k\to+\infty$ (и принимая во внимание (4.13)), а потом при $r\to+\infty$, получаем равенство

$$\iint_{\Pi_T^+}\Big(u\big(\phi_t-\phi_{xxxxx}+b\phi_{xxx}+a\phi_x\big)+f(u)\phi_x\Big)\,dxdt+\int u_0\phi\big|_{t=0}\,dx=0, \tag{4.19}$$

а это означает, что функция $u(t,x)$ является слабым решением в смысле определения 1.1 задачи (1.1), (1.2) при $g\equiv 0$.

Заметим, что так как $u\in L_\infty(0,T;H^2_{0,+})$, то u лежит в классе единственности, поэтому $u\in X_2^\beta(\Pi_T^+)$ согласно теореме 1.2. В частности, $u,u_x\in L_\infty(\Pi_T^+)$, $u\in L_2(0,T;H^4(0,r))$ для любого $r>0$. Следовательно, можно применить результаты [9, теорема 1] о единственности продолжения слабых решений уравнения (1.1). Согласно этим результатам из свойства (4.17) следует, что

$$u(t,x)=0\quad\forall\ (t,x)\in\Pi_T^+. \tag{4.20}$$

В частности,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_0^r u_k^2(t,x)\,dxdt = 0 \quad \forall\ r>1. \tag{4.21}$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{k\to+\infty}\iint_{\Pi_T^+} u_k^2(t,x)\,dxdt = 0. \tag{4.22}$$

Действительно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u_k^2\,dxdt = \int_0^T\int_0^r u_k^2\,dxdt + \int_0^T\int_r^{+\infty} u_k^2\,dxdt,$$

где равномерно по k в соответствии с (4.15)

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_r^{+\infty} u_k^2\,dx \leqslant cr^{-2\beta}. \tag{4.23}$$

Очевидно, что свойство (4.22) следует из (4.21) и (4.23).

С другой стороны, поскольку согласно (3.6)

$$\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant \|u_{0k}\|_{L_{2,+}}, \tag{4.24}$$

то

$$\begin{gathered}\int (u_k(t,x)-u_{0k}(x))^2\,dx \leqslant 2\int (u_{0k}(x)-u_k(t,x))\,u_{0k}(x)\,dx = \\ = 2\int (u_{0k}(x)-u_k(t,x))\,u_{0k}(x)\eta(r+1-x)\,dx + 2\int (u_{0k}(x)-u_k(t,x))\,u_{0k}(x)\eta(x-r)\,dx,\end{gathered} \tag{4.25}$$

где

$$2\left|\int (u_{0k}(x)-u_k(t,x))\,u_{0k}(x)\eta(x-r)\,dx\right| \leqslant 4\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}\|u_{0k}\|_{L_2(r,+\infty)} \leqslant 4r^{-\beta}L^2. \tag{4.26}$$

Далее, в соответствии с (4.16)

$$\begin{gathered}2\left|\int (u_{0k}(x)-u_k(t,x))\,u_{0k}(x)\eta(r+1-x)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant 2\int_0^t \|u_{k\tau}(\tau,\cdot)\|_{H^{-1}(0,r+1)}\,d\tau\|u_{0k}\|_{H_+^1} \leqslant c(r,L)t^{1/2}.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Из неравенств (4.25)–(4.27) следует, что

$$\|u_k(t,\cdot)-u_{0k}\|_{L_{2,+}}^2 \leqslant 4r^{-\beta}L^2 + c(r,L)t^{1/2}. \tag{4.28}$$

Выберем r так, чтобы $4r^{-\beta}L^2 \leqslant \varepsilon^2/4$, и $t_0\in(0,T]$ так, чтобы $c(r,L)t_0^{1/2}\leqslant\varepsilon^2/4$. Тогда из неравенства (4.28) находим, что для $t\in[0,t_0]$ справедливо неравенство

$$\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}^2 \geqslant \|u_{0k}\|_{L_{2,+}}^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u_k^2(t,x)\,dxdt \geqslant t_0\frac{\varepsilon^2}{2},$$

что противоречит (4.22). □

Теперь можно перейти к доказательству основного результата этого раздела.

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что свойство (1.11) не справедливо. Это означает, что

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \geqslant \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что

$$u(t,\cdot) \in \mathcal{F}_{+}^{\beta,L,\varepsilon} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.29}$$

для некоторых $L > 0$ и $\beta \in (0,\alpha]$.

Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $r > 0$. Пусть $I = (0,r)$, тогда

$$g(x) \geqslant g_0 = c_0(1+r)^{-1}$$

для любого $x \in I$. Из равенства (3.6) следует, что

$$\int u^2(T,x)\,dx + 2g_0 \int_0^T\!\!\int_0^r u^2\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + \int_0^T\!\!\int_r^{+\infty} u^2\,dxdt.$$

Применяя (4.12), выводим из последнего неравенства, что

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + c\iint\limits_{\Pi_T^+} g(x)u^2\,dxdt.$$

Опять применим равенство (3.6) (из которого, в частности, следует невозрастание функции $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$), тогда

$$T\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + \frac{c}{2}\left(\int u_0^2\,dx - \int u^2(T,x)\,dx\right).$$

В итоге получаем неравенство

$$\left(T + \frac{1}{2g_0} + \frac{c}{2}\right)\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2g_0} + \frac{c}{2}\right)\int u_0^2\,dx,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\|u(T,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant \gamma\|u_0\|_{L_{2,+}}$$

для некоторого $\gamma = \gamma(T,r,L,\beta,\varepsilon) \in (0,1)$. Тогда для любого натурального n в силу (4.29)

$$\|u(nT,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant \gamma^n\|u_0\|_{L_{2,+}},$$

что противоречит (4.29). □ □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией// Тр. МИАН. — 1989. — *186*. — С. 222–226.
2. *Кувшинов Р. В., Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары// Дифф. уравн. — 2009. — *45*, № 3. — С. 391–402.
3. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом// Прикл. мат. мех. — 1988. — *52*, № 2. — С. 230–234.
4. *Наумкин П. И.* Оценки убывания решений задачи Коши для модифицированного уравнения Кавахары// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 5. — С. 72–108.
5. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* О начально-краевой задаче в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары// Укр. мат. вісн. — 2014. — *11*, № 3. — С. 312–339.
6. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* Об убывании при больших временах решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары// Вестн. Тамб. гос. ун-та. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1331–1337.

7. *Сангаре К.* Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций// Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. мат. — 2003. — *10*, № 1. — С. 91–107.
8. *Сангаре К., Фаминский А. В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 1. — С. 98–109.
9. *Шананин Н. А.* О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными// Мат. заметки. — 2000. — *68*, № 4. — С. 608–619.
10. *Araruna F. D., Capisrano-Filho R. A., Doronin G. G.* Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *385*, № 2. — С. 743–756.
11. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Faminskii A., Natali F.* Decay of solutions to damped Korteweg—de Vries equation// Appl. Math. Optim. — 2012. — *65*. — С. 221–251.
12. *Cavalcanti M., Kwak Ch.* The initial-boundary value problem for the Kawahara equation on the half-line// ArXiv. — 2018. — 180505229v2.
13. *Chen W., Guo Z.* Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg—de Vries equation// J. Anal. Math. — 2011. — *114*, № 1. — С. 121–156.
14. *Doronin G. G., Larkin N. A.* Quarter-plane problem for the Kawahara equation// Pac. J. Appl. Math. — 2008. — *1*, № 3. — С. 151–176.
15. *Doronin G. G., Natali F.* Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line// Nonlinear Anal., Real World Appl. — 2016. — *30*. — С. 59–72.
16. *Faminskii A. V., Larkin N. A.* Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval// Electron. J. Differ. Equ. — 2010. — № 1. — С. 1–20.
17. *Faminskii A. V., Martynov E. V.* Large-time decay of solutions to the damped Kawahara equation posed on a half-line// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Принято к печати.
18. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media// J. Phys. Soc. Jpn. — 1972. — *33*, № 1. — С. 260–264.
19. *Kichenassamy S., Olver P. J.* Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — *23*, № 5. — С. 1141–1166.
20. *Larkin N. A., Simoes M.* The Kawahara equation on bounded intervals and on a half-line// Nonlinear Anal. — 2015. — *127*. — С. 397–412.
21. *Linares F., Pazoto A. F.* Asymptotic behavior of the Korteweg—de Vries equation posed in a quarter plane// J. Differ. Equ. — 2009. — *246*. — С. 1342–1353.
22. *Pazoto A. F., Rosier R.* Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2010. — *14*. — С. 1511–1535.
23. *Tao S. P., Cui S. B.* Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation// Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2005. — *21*, № 5. — С. 1035–1044.
24. *Vasconcellos C. F., da Silva P. N.* Stabilization of the Kawahara equation with localized damping// ESAIM Control. Optim. Calc. Var. — 2011. — *17*. — С. 102–116.

А. В. Фаминский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Е. В. Мартынов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: e.martynov@inbox.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-683-699 UDC 517.958

On Initial-Boundary Value Problem on Semiaxis for Generalized Kawahara Equation

© 2019 **A. V. Faminskii, E. V. Martynov**

Abstract. In this paper, we consider initial-boundary value problem on semiaxis for generalized Kawahara equation with higher-order nonlinearity. We obtain the result on existence and uniqueness of the global solution. Also, if the equation contains the absorbing term vanishing at infinity, we prove that the solution decays at large time values.

REFERENCES

1. A. T. Il'ichev, "O svoystvakh odnogo nelineynogo evolyutsionnogo uravneniya pyatogo poryadka, opisyvayushchego volnovye protsessy v sredakh so slaboy dispersiey" [On the properties of one fifth-order nonlinear evolution equation describing wave processes in media with weak dispersion], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1989, **186**, 222–226 (in Russian).
2. R. V. Kuvshinov and A. V. Faminskiy, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya uravneniya Kavakhary" [Mixed problem in a half-strip for the Kawahara equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2009, **45**, No. 3, 391–402 (in Russian).
3. A. V. Marchenko, "O dlinnykh volnakh v melkoy zhidkosti pod ledyanym pokrovom" [On long waves in shallow water under the ice cover], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1988, **52**, No. 2, 230–234 (in Russian).
4. P. I. Naumkin, "Otsenki ubyvaniya resheniy zadachi Koshi dlya modifitsirovannogo uravneniya Kavakhary" [Estimates of decreasing for solutions of the Cauchy problem for the modified Kawahara equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 5, 72–108 (in Russian).
5. M. A. Opritova and A. V. Faminskiy, "O nachal'no-kraevoy zadache v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [On the initial-boundary value problem in a half-strip for generalized Kawahara equation], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2014, **11**, No. 3, 312–339 (in Russian).
6. M. A. Opritova and A. V. Faminskiy, "Ob ubyvanii pri bol'shikh vremenakh resheniy nachal'no-kraevoy zadachi na poluosi dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [On decreasing for large time values of solutions of the initial-boundary value problem for the generalized Kawahara equation in a half-strip], *Vestn. Tamb. gos. un-ta* [Bull. Tambov State Univ.], 2015, **20**, No. 5, 1331–1337 (in Russian).
7. K. Sangare, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary v prostranstve beskonechno differentsiruemykh eksponentsial'no ubyvayushchikh funktsiy" [Mixed problem in a half-strip for the generalized Kawahara equation in the space of infinitely differentiable exponentially decreasing functions], *Vestn. Ros. un-ta druzhby narodov. Ser. mat.* [Bull. Peoples' Friendship Univ. Russ. Ser. Math.], 2003, **10**, No. 1, 91–107 (in Russian).
8. K. Sangare and A. V. Faminskiy, "Slabye resheniya smeshannoy zadachi v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [Weak solutions of mixed problem for the generalized Kawahara equation in a half-strip], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **85**, No. 1, 98–109 (in Russian).
9. N. A. Shananin, "O chastichnoy kvazianalitichnosti obobshchennykh resheniy slabo nelineynykh differentsial'nykh uravneniy so vzveshennymi proizvodnymi" [On partial quasianalyticity of generalized solutions of weakly nonlinear differential equations with weighted derivatives], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2000, **68**, No. 4, 608–619 (in Russian).
10. F. D. Araruna, R. A. Capisrano-Filho, and G. G. Doronin, "Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain," *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **385**, No. 2, 743–756.
11. M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Faminskii, and F. Natali, "Decay of solutions to damped Korteweg—de Vries equation," *Appl. Math. Optim.*, 2012, **65**, 221–251.
12. M. Cavalcanti and Ch. Kwak, "The initial-boundary value problem for the Kawahara equation on the half-line," *ArXiv*, 2018, 180505229v2.
13. W. Chen and Z. Guo, "Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg—de Vries equation," *J. Anal. Math.*, 2011, **114**, No. 1, 121–156.
14. G. G. Doronin and N. A. Larkin, "Quarter-plane problem for the Kawahara equation," *Pac. J. Appl. Math.*, 2008, **1**, No. 3, 151–176.

©Peoples' Friendship University of Russia, 2019

15. G. G. Doronin and F. Natali, “Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line,” *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, 2016, **30**, 59–72.
16. A. V. Faminskii and N. A. Larkin, “Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2010, No. 1, 1–20.
17. A. V. Faminskii and E. V. Martynov, “Large-time decay of solutions to the damped Kawahara equation posed on a half-line,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, to be published.
18. T. Kawahara, “Oscillatory solitary waves in dispersive media,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1972, **33**, No. 1, 260–264.
19. S. Kichenassamy and P. J. Olver, “Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, No. 5, 1141–1166.
20. N. A. Larkin and M. Simoes, “The Kawahara equation on bounded intervals and on a half-line,” *Nonlinear Anal.*, 2015, **127**, 397–412.
21. F. Linares and A. F. Pazoto, “Asymptotic behavior of the Korteweg—de Vries equation posed in a quarter plane,” *J. Differ. Equ.*, 2009, **246**, 1342–1353.
22. A. F. Pazoto and R. Rosier, “Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, **14**, 1511–1535.
23. S. P. Tao and S. B. Cui, “Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation,” *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2005, **21**, No. 5, 1035–1044.
24. C. F. Vasconcellos and P. N. da Silva, “Stabilization of the Kawahara equation with localized damping,” *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, 2011, **17**, 102–116.

A. V. Faminskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `afaminskii@sci.pfu.edu.ru`

E. V. Martynov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: `e.martynov@inbox.ru`