Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 54–71

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-54-71 УДК 517.936+517.925.53

ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И СИНГУЛЯРНЫЕ СЛОЕНИЯ

© 2019 г. **А. Я. НАРМАНОВ**

Аннотация. Предметом настоящей работы является геометрия орбит семейства гладких векторных полей, заданных на гладком многообразии, и сингулярные слоения, порожденные орбитами. Как известно, геометрия орбиты векторных полей является одним из основных объектов исследования в геометрии и теории управления. В настоящей работе излагаются некоторые результаты автора по этому вопросу. Гладкость всюду в работе будет означать гладкость класса C^∞.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Изучению структуры орбиты семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в приложениях, в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений [1, 10, 13, 18, 28, 29].

В качественной теории управления множество управляемости (или множество достижимости) системы управления на гладком многообразии в классе кусочно-постоянных управлений совпадает с отрицательной (положительной) орбитой семейства векторных полей, которое определяется системой управления однозначно. В случае симметричных систем множество управляемости (и также множество достижимости) совпадает с орбитой.

С другой стороны, любое семейство векторных полей определяет некоторую динамическую полисистему. Таким образом, изучение структуры множества управляемости тесно связано с изучением структуры орбиты семейства векторных полей. Хорошо известно, что множество управляемости является одним из основных объектов качественной теории оптимального управления [20].

Начиная с второй половины 20 века появилось много работ о структуре орбит и множества управляемости нелинейных систем управления. Большой вклад в этом направлении внесли Р. Брокетт [14], Суссман [19], В. Джарджевич [18], К. Лобри [20] и многие другие.

Пусть M — гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n, $V(M)$ — множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D, через $L(x)$— орбиту семейства D, содержащую точку $x \in M$.

Обозначим через $P(x)$ линейную оболочку множества векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ и введем подпространство $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ касательного пространства T_xM в точке x.

Рассмотрим отображения $P : x \to P(x)$ и $P_D : x \to A_x(D)$, соотносящие точке x подпространства $P(x)$ и $A_x(D)$ касательного пространства T_xM соответственно. Такие отображения называются *распределениями*.

Связное подмногообразие N многообразия M называется *интегральным подмногообразием* для распределения P (или P_D), если для каждой точки $x \in N$ имеет место $T_xN = P(x)$ (соответственно $T_xN = A_x(D)$).

Р. Германн в своей работе [17] «О проблеме достижимости в теории управления», доложенной на международной конференции по нелинейным дифференциальным уравнениям и нелинейной механике в 1961 году, первым указал на важность следующего результата Чжоу в теории управления [16] (этот результат почти одновременно был доказан П. Рашевским в [12]):

Если размерности $\dim P(x)$ и $\dim A_x(D)$ не зависят от x, то для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием распределения P_D.

В случае, когда размерность линейного пространства $A_x(D)$ не постоянна, Р. Германн получил достаточные условия, при выполнении которых для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $x \to A_x(D)$.

Джарджевич и Сусманн, изучая орбиты и положительные орбиты произвольного семейства аналитических векторных полей на аналитическом многообразии [28, 30], показали, что:

- для каждой точки $x \in M$ положительная орбита $L^+(x)$ имеет непустую внутренность в M тогда и только тогда, когда $\dim A_x(D) = n$ для всех $x \in M$;
- для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ является областью тогда и только тогда, когда $\dim A_x(D) = n$ для всех $x \in M$.

В случае гладкости класса C^∞ К. Лобри показал, что если $\dim A_x(D) = n$, то внутренность положительной орбиты $L^+(x)$ всюду плотна в $L^+(x)$ (см. [4]).

Фундаментальным результатом в этом направлении стала теорема Сусманна, которая утверждает, что если многообразие M и векторные поля из D класса C^∞, то для каждого $x \in M$ орбита $L(x)$ является погруженным подмногообразием класса C^∞ многообразия M (см. [28]).

Более точно этот результат формулируется таким образом: существует вполне интегрируемое распределение P^* на M такое, что для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием P^*, проходящим через точку x.

П. Стефан этот результат доказал в случае, когда M и векторные поля из D имеют гладкость класса $C^r, r \geqslant 1$ (см. [27]). Известно, что если векторные поля из D класса C^0, то орбита не является многообразием. Примером может служить непрерывное векторное поле, когда нет единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Из результатов Нагано [23] следует, что если M и векторные поля из D аналитичны, то распределение $P_D : x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо, причем каждая орбита является интегральным подмногообразием для P_D. Таким образом в этом случае размерность орбиты $L(x)$ равна $\dim A_x(D)$ для всех $x \in M$. В общем случае имеет место $\dim A_x(D) \leqslant \dim L(x)$ для всех $x \in M$.

П. Стефан ввел понятие *слоения с особенностями*, которое является обобщением понятия слоения из дифференциальной геометрии, и показал, что орбиты являются слоями некоторого слоения с особенностями [27].

В случае, когда все орбиты имеют одинаковую размерность, разбиение M на орбиты является слоением, что позволяет привлечь методы теории слоений для изучения свойств орбит и множества управляемости гладких систем. Таким образом, с одной стороны, теория слоений, имеющая приложения во многих разделах математики, находит свое применение в теории систем управления. С другой стороны, орбиты систем управления порождают структуру слоения с особенностями, изучение которой включает в себя и изучение теории слоений.

2. Предварительные сведения

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, T_xM — касательное пространство к M в точке x, TM — касательное расслоение многообразия M. Отображение $\pi : TM \to M$ при котором $\pi(X, x) = x$, где $X \in T_xM$ (и, следовательно, $\pi(T_xM) = x$), называется *проекцией*.

Определение 2.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Отображение $X{:}M \to TM$, при котором $\pi \circ X(x) = x$, называется *векторным полем* на M.

Таким образом, векторное поле — такое отображение, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет касательный вектор $X(x) \in T_xM$. Если при этом векторное поле $X : M \to TM$ как отображение двух гладких многообразий M, TM является гладким, то оно называется *гладким векторным полем*. По теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения через каждую неособую точку многообразия M проходит единственная интегральная кривая. Если точка p является особой, то сама точка является интегральной кривой, проходящей через точку p.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется *полным векторным полем*. В этом случае поток векторного поля порождает динамическую систему.

Известно, что гладкое векторное поле на компактном многообразии M является полным и, следовательно, порождает гладкую динамическую систему.

Пример 2.1. На евклидовой плоскости $M = \mathbb{R}^2$, векторное поле $X(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ является полным векторным полем, а векторное поле $X(x,y) = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ является неполным. Интегральные кривые второго поля определяются следующими уравнениями:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad y(t) = y_0 e^t. \tag{2.1}$$

Векторное поле X неполное, так как область определения переменной t зависит от x_0, и в точке $t = \dfrac{1}{x_0}$ решение не определено.

Пример 2.2. Пусть отображение евклидовой плоскости на двумерный тор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T^2 \subset \mathbb{R}^3$ задается формулой

$$\varphi(u,v) = ((2 + \cos 2\pi v)\cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v)\sin 2\pi v, \sin 2v).$$

Очевидно, что φ — локальный диффеоморфизм, который отображает горизонтальные прямые из $\mathbb{R}^2$ в параллели на торе, вертикальные прямые в меридианы, и квадрат $[0;1] \times [0;1]$ на весь тор T^2. Равенство $\varphi(u,v) = \varphi(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ выполняется тогда и только тогда, когда $u - \widetilde{u} = m$ и $v - -\widetilde{v} = n$ для некоторых целых m и n. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ рассмотрим векторное поле в $\mathbb{R}^2$, заданное формулой $X^\lambda(u,v) = \{1, \lambda\}$. Легко видеть, что $Y^\lambda = d\varphi(X^\lambda)$ — векторное поле на торе T^2 класса C^∞. Траектории Y^λ — это образы траекторий X^λ при отображении φ, которые являются прямыми в $\mathbb{R}^2$ с угловым коэффициентом λ. При рациональном λ каждая траектория векторного поля Y^λ замкнута, а при иррациональном λ каждая траектория векторного поля Y^λ всюду плотна в торе T^2. Векторное поле Y^λ называется *рациональным* или *иррациональным полем* на торе T^2 соответственно тому, рационально λ или нет. Если λ рационально, то ω — предельное множество всякой траектории — эта сама траектория. Если λ иррационально, то ω — предельное множество всякой траектории — это весь тор T^2.

Множество $V(M)$ гладких векторных полей класса C^∞, заданных на гладком многообразии M, является алгеброй Ли над полем действительных чисел, в которой произведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X,Y]$. Если векторные поля X и Y рассмотреть как операцию дифференцирования гладких функций, то скобка Ли $[X,Y]$ определяется как отображение $[X,Y] : F(M) \to F(M,)$, $[X,Y](f) = Y(X(f)) - X(Y(f))$, где $F(M)$ — множество гладких функций.

Следующее свойство скобки Ли хорошо известно [2].

Теорема 2.1. *Если векторные поля X и Y всюду касаются подмногообразия $N \subset M$, то векторное поле $[X,Y]$ также всюду касается подмногообразия N.*

3. Орбиты семейства векторных полей

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 3.1. *Положительная* (*отрицательная*) *полуорбита* $L^+(x)$ (соответственно, $L^-(x)$) семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется (см. в [1]) как множество таких точек y из M, для которых существуют неотрицательные (соответственно, неположительные) действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

Определение 3.2. *Орбита* $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если D состоит из одного векторного поля.

Пример 3.1. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) семейство D, состоящее из полей $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$. Для произвольной точки p с координатами (x_0, y_0) положительная полуорбита, проходящая через эту точку, состоит из точек $\{(x, y) : x \geqslant x_0, y \geqslant y_0\}$, а отрицательная полуорбита состоит из точек $\{(x, y) : x \leqslant x_0, y \leqslant y_0\}$.

Орбита, проходящая через произвольную точку, совпадает со всей плоскостью. Этот пример показывает, что в общем случае объединение положительных и отрицательных полуорбит не совпадает с орбитой.

Пример 3.2. Рассмотрим семейство векторных полей

$$D = \{\frac{\partial}{\partial x}; \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}\},$$

где функция $\varphi(x)$ из класса C^∞ определена следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{\frac{1}{-x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Положительная полуорбита $L^+(O)$ начала координат является двумерным многобразием, а отрицательная полуорбита $L^-(O)$ является одномерным многобразием. Орбита L начала координат семейства векторных полей D совпадает со всей плоскостью.

Вышеприведенные примеры показывают, что полуорбиты в общем случае не являются подмногообразиями.

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \to X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots))$$

являются непрерывными, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — действительные числа, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — векторные поля из семейства D.

Как отмечено выше, в работах [27, 28] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \geqslant 1$) с топологией Суссманна обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется *погруженным* в M, если каноническая инъекция $i : N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

На каждой орбите возникают две топологии: ее собственная топология как погруженного подмногообразия и индуцированная топология из M. Собственная топология орбиты является более сильной, чем топология, индуцированная из M.

Действительно, если $x \in L(x_0)$, где $x \in M$, $V(x)$ — открытое множество в M, содержащее x, то $L(x_0) \cap V(x)$ является открытым множеством в индуцированной топологии $L(x_0)$. Для каждой точки $y \in L(x_0) \cap V(x)$ образ точки y при $i : L(x) \to M$ содержится в $V(x)$, и в силу непрерывности отображения i существует окрестность $U(y)$ точки в топологии $L(x_0)$ такая, что $U(y) \subset V(x)$. Отсюда следует, что $L(x_0) \cap V(x)$ открыто в топологии $L(x_0)$.

Как показывают примеры, даже когда D состоит из одного векторного поля, эти две топологии не всегда совпадают.

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны.

Определение 3.3. Орбита L называется *собственной*, если каноническая инъекция $i : L \to M$ является вложением, т. е. когда топология слоя совпадает с индуцированной топологией из M.

Определение 3.4. Точка $x \in M$ называется *предельной* для орбиты $L(x_0)$, если существует последовательность точек x_m из $L(x_0)$, которая сходится к x в топологии M и не сходится к этой точке в топологии $L(x_0)$.

Множество всех предельных точек орбиты $L_0 = L(x_0)$ обозначим через $\Omega(L_0)$. Если D содержит только одно векторное поле X, то для незамкнутой траектории $\gamma_{x_0} = \{X^t(x_0) : t \in I(x_0, X)\}$ множество $\Omega(\gamma_{x_0})$ состоит из α и ω — предельных точек γ_{x_0}.

Нетрудно показать, что множество $\Omega(L_0)$ состоит из целых орбит, т. е. $x \in \Omega(L_0)$ влечет за собой $L(x) \subset \Omega(L_0)$.

Следующие утверждения доказаны в работе [1].

Утверждение 3.1.

I. *Орбита L_0 является собственной тогда и только тогда, когда $L_0 \cap \Omega(L_0) = \varnothing$.*
II. *Орбита L_0 является несобственной тогда и только тогда, когда $\Omega(L_0) = \overline{L}_0$, где $\overline{L}_0$ — замыкание орбиты L_0 в M.*

Утверждение 3.2. *Если орбита L является замкнутым подмножеством M, то она является собственной.*

Из утверждения 3.1 вытекает, что предельное множество $\Omega(L)$ пусто для каждого замкнутого слоя L. Если слой L является незамкнутым подмножеством многообразия M, то его предельное множество $\Omega(L)$ может быть пустым или может даже совпадать со всем многообразием.

Определение 3.5. Пусть $x, y \in M$. Точка $y \in L(x)$ называется *T-достижимой* из точки $x \in M$, если

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)) \quad \text{и} \quad \sum t_i = T.$$

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T-достижимы из точки x.

С использованием идей Сусманна, в работе [11] доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является подмногообразием $L(x)$ коразмерности единица или ноль.*

Для симметричных систем имеет место более сильное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть система D симметрична и содержит полное векторное поле. Тогда для каждого $T \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $A_x(T) = A_x(0) = L(x)$.*

Заметим,что система векторных полей D называется *симметричной*, если из $X \in D$ вытекает, что $-X \in D$.

В работе [19] доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $L(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

С использованием этой теоремы нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из трех векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Для многообразий с ненулевой эйлеровой характеристикой получен следующий результат [11].

Теорема 3.5. *Пусть M — гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geqslant 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Следующий пример показывает, что на компактном связном многообразии M с нулевой эйлеровой характеристикой также может существовать система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Пусть трехмерная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, где x, y, z, w — декартовы координаты в $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим систему на S^3, состоящую их двух векторных полей:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Скобка Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y имеет следующий вид:

$$[X, Y] = -w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}.$$

Векторные поля X, Y, $[X, Y]$ принадлежат подалгебре Ли $A(D)$, которая является минимальной подалгеброй Ли алгебры Ли $V(M)$, содержащей множество D.

В точке $p(1, 0, 0, 0) \in S^3$ векторы $X(p), Y(p), [X, Y](p)$ линейно независимы, т. е. подпространство $A_p(D) = \{X(p) : X \in A(D)\}$ трехмерно. Поэтому орбита $L(p)$ является трехмерной. В силу того, что X, Y являются векторными полями Киллинга, орбита $L(p)$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^4$ (следовательно, в S^3) [10]. С другой стороны, в силу максимальности размерности, орбита $L(p)$ является открытым подмножеством S^3. Следовательно, орбита совпадает с S^3.

Теперь рассмотрим множества $A_q(0)$ для $q \in S^3$. Если множества A_q являются подмногообразиями коразмерности один, то в силу того, что векторные поля X, Y являются векторными полями Киллинга, они порождают двумерное риманово слоение на S^3 (см. [10]). Как следует из результатов работы [9], на трехмерной сфере не существуют двумерных римановых слоений. Следовательно, множество $A_q(0)$ совпадает с S^3 для всех $q \in S^3$.

Определение 3.6. Пусть M — гладкое многообразие размерности n, T_xM — касательное пространство в точке $x \in M$. Отображение P, ставящее каждое точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется *распределением*. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется *k-мерным распределением*.

Определение 3.7. Распределение P называется *гладким*, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$, заданные на $U(x)$, такие, что векторы $X_1(y), X_2(y), \ldots, X_m(y)$, образуют базис для подпространства $P(y)$ для каждого $y \in U(x$.

Определение 3.8. Распределение P называется *вполне интегрируемым*, если для каждой точки $x \in M$ существует связное подмногообразие N_x многообразия M, содержащее точку x такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$.

Подмногообразие N_x называется *интегральным подмногообразием* распределения P.

Если дано семейство D гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если D состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P_D(x)$ касательного пространства T_xM. Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ могут меняться от точки к точке. Это распределение обозначим через P_D.

Говорят, что векторное поле X *принадлежит распределению* P, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Напомним, что распределение P на многообразии M называется *инволютивным*, если для $X, Y \in P$ имеет место $[X, Y] \in P$.

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса [21].

Теорема 3.6 (Фробениус). *Для того, чтобы распределение P было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Замечание 3.1. Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — вполне интегрируемое семейство векторных полей такое, что размерность линейной оболочки в T_xM векторов $\{X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x)\}$ постоянна и равна s независимо от x. Тогда, как следует из доказательства теоремы Фробениуса, для каждой точки $x_0 \in M$ существует локальная система координат $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ в некоторой окрестности V_0 точки x_0 такая, что компоненты связности пересечения интегрального подмногообразия с V_0 описываются уравнениями $y_{k+1} = c_{k+1}, y_{k+2} = c_{k+2}, \dots, y_n = c_n$, где $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ — постоянные.

Одномерное гладкое распределение всегда интегрируемо в силу локальной теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, одномерное распределение всегда порождает одномерное слоение.

Определение 3.9. Семейство векторных полей D называется *вполне интегрируемым*, если соответствующее распределение P_D, порожденное D, является вполне интегрируемым.

Отметим, что если семейство D состоит из одного векторного поля, то оно всегда вполне интегрируемо, так как по теореме о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений через каждую точку проходит единственная интегральная кривая векторного поля. Если семейство состоит из более чем одного векторного поля, то оно не всегда вполне интегрируемо.

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящего из конечного числа векторных полей.

Теорема 3.7 (Херманн). *Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — семейство конечного числа векторных полей на многообразии M. Семейство D вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Инволютивность семейства векторных полей $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ означает следующее: для любых векторных полей $X, Y \in D$ существуют гладкие функции $f^i(x), x \in M$, $l = 1, \dots, k$ такие, что

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{k} f^i(x) X_i.$$

В случае, когда семейство состоит из бесконечного числа векторных полей, как показывает следующий пример, эта теорема неверна.

Пример 3.3. Пусть $M = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство векторных полей D, порожденное полем $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и всеми векторными полями вида $f(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция, все производные которой в нуле равны нулю: $f^i(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно проверить, что это семейство инволютивно. Несмотря на это, нет интегральных подмногообразий, проходящих через точки вида $(0; y)$.

Заметим, что если N — интегральное подмногообразие системы векторных полей $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, то размерность подпространства пространства T_yM, порожденного векторами $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$, равна размерности подмногообразия N в каждой точке $y \in N$. Это не исключает возможности, что размерность подпространства, порожденного векторами $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$, меняется от точки к точке. Это означает только то, что данное семейство векторных полей может иметь интегральные подмногообразия различных размерностей.

Пример 3.4. Рассмотрим семейство векторных полей

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = 2xz\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y)$$

на $\mathbb{R}^3$. Легко проверить, что $[X, Y] = 0$, так что по теореме Фробениуса система $\{X, Y\}$ интегрируема. Для данной точки (x, y, z) подпространство пространства $T\mathbb{R}^3|_{(x,y,z)}$, порожденное векторами $X|_{(x,y,z)}$ и $Y|_{(x,y,z)}$, является двумерным, исключая точки оси Oz и окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, где оно одномерно. Нетрудно проверить, что и окружность, и ось Oz являются одномерными интегральными подмногообразиями системы X, Y. Все другие интегральные подмногообразия — двумерные торы, которые заданы уравнениями $\varphi(x, y, z) = c$, где $\varphi(x, y, z) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2+1)$, определенные при $c > 0$. В самом деле, $d\varphi(X) = X(\varphi) = 0$, $d\varphi(Y) = Y(\varphi) = 0$ всюду, так как оба поля касаются каждого множества уровня функции φ.

Отметим, что если семейство векторных полей вполне интегрируемо, то орбита является интегральным подмногообразием распределения P_D (см. [29]).

Теорема 3.8. *Пусть семейство D гладких векторных полей вполне интегрируемо. Тогда каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием распределения P_D.*

Теперь перейдем к изучению геометрии векторных полей Киллинга. В этой части излагаются результаты, полученные в работе [10].

Напомним, что векторное поле X на M называется *векторным полем Киллинга*, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий.

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = \dfrac{1}{2}n(n+1)$, то M есть многообразие постоянный кривизны.

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D.

Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_m(x)$ образуют базис для подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

Таким образом, в случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, из теоремы 3.8 мы получим следующую теорему.

Теорема 3.9. *Каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D : x \to A_x(D)$.*

Теорема 3.10. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и множество D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.*

Пусть $f : M \longrightarrow N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое риманово многообразие размерности n, N — гладкое риманово многообразие размерности m, где $n > m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = p \in M : f(p) = q$ является многообразием размерности $n - m$.

Пусть L — слой слоения F (орбита семейства D), $x \in L$, T_xL — касательное пространство L в точке x, $H(x)$ — ортогональное дополнение T_xL. Возникают два подрасслоения $TF : x \longrightarrow T_xL$, $H : x \longrightarrow H(x)$ касательного расслоения TM многообразия M. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_F + X_H$, где X_F, X_H — ортогональные проекции X на TF, H соответственно. Если $X_H = 0$, то оно называется *вертикальным полем* (касательным к F), а если $X_F = 0$, то X называется *горизонтальным полем*.

Отображение $f : M \longrightarrow N$ называется *римановой субмерсией*, если дифференциал df отображения f сохраняет длину горизонтальных векторов [25].

Обозначим через $B = M/F$ множество слоев F, наделенное фактор-топологией. Рассмотрим отображение $\pi : M \to F$, при котором $\pi(x) = L(x)$, где $L(x)$ — слой, содержащий точку x. Следующая теорема показывают, что орбиты являются слоями римановой субмерсии.

Теорема 3.11. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из векторных полей Киллинга и $\dim V_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда множество слоев $B = M/F$, наделенное фактор-топологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого $(n-k)$-мерного многообразия, что отображение $\pi : M \to B$ является гладкой римановой субмерсией.*

Следствие 3.1. *Многообразие B является многообразием неотрицательной кривизны.*

Теорема 3.12. *В условиях теоремы* 4.5 *орбиты семейства D являются параллельными плоскостями тогда и только тогда, когда многообразие $B = M/F$ является многообразием нулевой кривизны.*

Рассмотрим векторное поле
$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$
в $M = \mathbb{R}^3$. Это поле является векторным полем Киллинга, и его интегральными кривыми являются винтовые линии.

Ортогональное распределение $H : p \longrightarrow H(p)$ в каждой точке задается горизонтальными векторными полями
$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z},$$
$$Z = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$
Рассмотрим векторные поля $Y_* = d\pi(Y), Z_* = d\pi(Z)$ на $B = M/F$. В силу того, что отображение $\pi : M \longrightarrow B$ имеет максимальный ранг, векторные поля Y_*, Z_* линейно независимы в каждой точке многообразия $B = M/F$.

Вычислим секционную кривизну многообразия $B = M/F$ в двумерном направлении, определенном векторами $Y_*(q), Z_*(q)$ в точке $q \in B$. По формуле О'Нейла, если (x, y, z) — декартовы координаты точки $p \in \pi^{-1}(q)$, то для вертикальной компоненты $[Y, Z]^v$ скобки Ли $[Y, Z]$ векторных полей имеет место равенство $[Y, Z]^v(p) = \lambda X(p)$, где $\lambda = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Отсюда получим следующее выражение для кривизны:
$$K_*(Y_*, Z_*)(q) = \frac{3}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$
Таким образом, в этом случае многообразие $B = M/F$ является двумерным многообразием строго положительной кривизны. В этом примере все интегральные кривые (орбиты), кроме одной, проходящей через начало координат, не являются одномерными плоскостями.

Теорема 3.13. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, D состоит из векторных полей Киллинга, и для точки $p \in M$ орбита $L(p)$ является k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для всех точек $q \in L(p)$ множества $A_q(0)$ либо совпадают с $L(p)$, либо являются параллельными гиперплоскостями в $L(p)$.*

4. Сингулярные слоения

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, A — максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geqslant 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s, если $0 \leqslant s \leqslant r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s-многообразии M обозначим через A^s.

Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 4.1. Семейство $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ линейно связных подмножеств M называется *k-мерным C^s-слоением*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

(F_I) : $\bigcup_{\alpha\in B} L_\alpha = M$;

(F_{II}) : для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta$, то обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_{III}) : для всякой точки $p \in M$ можно выбрать локальные координаты $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}, p \in U_\lambda$ так, что если $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ для некоторого $\alpha \in B$, то компоненты линейной связности множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ имеют вид
$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \ldots, x_n = c_n\},$$
где числа $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ постоянны на компонентах линейной связности.

Множество L_α называется *слоем* слоения F. В описанной ситуации k-мерное C^s-слоение называется также *C^s-слоением коразмерности* $q = n - k$. Наличие слоения F в многообразии M выражается символом (M, F). Условия $(F_1), (F_{11})$ означают, что M состоит из взаимно непересекающихся слоев. Условие (F_{111}) означает, что локально слои устроены как параллельные плоскости. Если выполняется условие (F_{III}), то координатные окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$, называются *расслоенными*, а совокупность всех расслоенных координатных окрестностей обозначается через A_F^s и называется *системой расслоенных координатных окрестностей*.

Пример 4.1. Пусть X — векторное поле на M без особых точек, т. е. $X(x) \neq 0$ для всех $x \in M$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2.1) вида $\dot{x} = X(x)$ через каждую точку $x_0 \in M$ проходит единственная интегральная кривая $\gamma(t, x_0)$ векторного поля X. Поэтому многообразие M является объединением интегральных кривых векторного поля X.

Разбиение M на интегральные кривые векторного поля X является одномерным слоением. Условие (F_{III}) определения 4.1 вытекает из теоремы о выпрямлении векторного поля. Действительно, по этой теореме для каждой точки $x_0 \in X$ такой, что $X(x_0) \neq 0$ существуют окрестность U и локальная криволинейная система координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ на U такие, что в этих координатах уравнение запишется в виде:

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = 1, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \ldots \\ \dot{y}_n = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Пример 4.2. Как вытекает из теоремы Фробениуса, если k-мерное распределение P класса C^r вполне интегрируемо, то интегральные подмногообразия P образуют k-мерное слоение класса C^r (где $r = s$ или $r = s + 1$).

Пример 4.3. Пусть $f : M \to N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое многообразие размерности n, N — гладкое многообразие размерности m. При $n > m$ отображение f называется *субмерсией*, а при $n < m$ отображение f называется *погружением*.

Следующая теорема показывает, что дифференцируемые субмерсии порождают гладкие слоения.

Теорема 4.1. *Пусть $f : M \to N$ — субмерсия. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : f(q) = q\}$ является многообразием размерности $(n - m)$ и разбиение M на многообразия L_q является $k = (n - m)$-мерным слоением.*

Пусть $(L_\alpha : A_\alpha) \to M^n$ — отображение включения из (L_α, A_α) в M^n. В силу условия (F_{III}) взаимно однозначное отображение l_α является C^r-погружением. Если l_α является C^r-вложением, то говорят, что L_α — *собственный слой*. Легко проверить, что всякий компактный слой является собственным. Если $Int\overline{L}_\beta \neq \oslash$, то слой l_β называется локально плотным. Слой, не являющийся ни собственным, ни локально плотным, называется *исключительным*.

С геометрической точки зрения важными классами слоений являются римановы и вполне геодезические слоения. Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g.

Определение 4.2. Слоение F называется *вполне геодезическим*, если каждый слой слоения является вполне геодезическим подмногообразием.

Вполне геодезические слоения изучены многими авторами, в частности, в работах [15, 31].

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g. Риманова метрика g единственным образом определяет риманову связность ∇ без кручения (связность Леви-Чивита). Связность ∇ называется *римановой*, если для каждой гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ и любых двух параллельных векторных полей X, Y вдоль γ (т. е. $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0, \nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$, где $\dot{\gamma}$ — поле касательных векторов γ) функция $g(X, Y)$ постоянна вдоль γ. При этих условиях параллельный перенос вектора из $T_{\gamma(a)}M$ в $T_{\gamma(b)}M$ является изометрическим отображением. Известно, что связность ∇ на M является римановой тогда и только тогда, когда для любых векторных полей X, Y, Z имеет место

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Связность ∇ является связностью без кручения тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{для любых векторных полей } X, Y.$$

Пусть $x \in M, C(x)$ — множество петель в точке x, т. е. множество всех замкнутых кусочно-гладких кривых с началом и концом в точке x. Для каждой кривой $\tau \in C(x)$ параллельный перенос вдоль τ, как отметили выше, есть изометрия касательного пространства T_xM на себя. Множество таких изометрий образуют группу $\psi(x)$. Эта группа называется *группой голономии* для связности ∇ в точке x (см. [3, с. 75]). Если группа $\psi(x)$ приводима, то многообразие M называется *приводимым*. В этом случае существует нетривиальное подпространство $P(x)$ касательного пространства T_xM, которое инвариантно под действием $\psi(x)$, т. е. для каждого вектора $v \in P(x)$ и для каждой изометрии $h \in \psi(x)$ имеет место $h(v) \in P(x)$.

Известно, что если M приводимо, то на M возникают два распределения P и H, взаимно дополнительные по ортогональности, т. е. $T_xM = P(x) \oplus H(x)$ для всех $x \in M$. Причем, оба распределения P и H являются параллельными относительно ∇, вследствие чего и вполне интегрируемыми. Параллельность относительно ∇ означает следующее: если $\gamma : [a, b] \to M$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, а $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $v \in P(x)$ (или $v \in H(x)$), то в результате параллельного переноса вдоль γ вектор v переходит в вектор из $P(y)$ (соответственно, из $H(y)$).

Возникшие слоения (в силу вполне интегрируемости P и H) являются вполне геодезическими римановыми слоениями. При этом, если M полно и односвязно, то, как утверждает теорема де Рама, многообразие M изометрично прямому произведению любых двух слоев из разных слоений [3, с. 180].

В работе [8] изучена геометрия слоения F на M, которое является римановым вполне геодезическим слоением. Вполне интегрируемость распределения, дополнительного по ортогональности, не предполагается.

Пусть F — гладкое слоение размерности k на M. Обозначим через $L(p)$ — слой слоения F, проходящий через точку p, $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в T_pM, $p \in M$. Возникают два подрасслоения (гладкие распределения) $TF = \{F(p) : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$, где H является ортогональным дополнением TF.

Пусть $\pi_1 : TM \to TF, \pi_2 : TM \to H$ — ортогональные проекции, $V(M), V(F), V(H)$ — множества гладких сечений расслоений TM, TF, H соответственно.

Если $X \in V(F)$ $(X \in V(H))$, то X назовем *вертикальным* (*горизонтальным*) *полем*.

Предположим, что каждый слой F является вполне геодезическим подмногообразием M. Это эквивалентно тому, что $\nabla_X Y \in V(F)$ для всех $X, Y \in V(F)$.

Тогда на расслоениях TF и H определены метрические связности ∇^1 и ∇^2 следующим образом. Если $X \in V(F), Y \in V(H), Z \in V(M)$, тогда

$$\nabla^1_Z X = \pi_1(\nabla_Z X), \nabla^2_Z Y = \pi_2[Z_1, \tilde{Y}] + \pi_2 \nabla_{Z_2} Y,$$

где $Z = Z_1 \oplus Z_2$, $Z_1 \in V(F), Z_2 \in V(H)$, $\tilde{Y} \in V(M), \pi_2 \tilde{Y} = Y$; здесь $[Z_1, \tilde{Y}]$ — скобка Ли векторных полей Z_1 и Y.

Полагая $\tilde{\nabla}_Z X = \nabla^1_Z X_1 \oplus \nabla^2_Z X_2$, где $X, Z \in V(M), X_i = \pi_i(X), i = 1, 2$, получим связность $\tilde{\nabla}$ на TM. Как доказано в работе [8], если слоение F является римановым слоением, слои которого являются вполне геодезическими подмногообразиями M, то связность $\tilde{\nabla}$ является метрической.

Теперь предположим, что многообразие M односвязно. Тогда имеет место следующая теорема [8].

Теорема 4.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Распределение H вполне интегрируемо.*
2. *$\tilde{\nabla}$ является связностью без кручения (т. е. $\tilde{\nabla} = \nabla$).*

Замечание 4.1. В общем случае распределение H не всегда вполне интегрируемо. Примером может служить хорошо известное расслоение Хопфа на трехмерной сфере S^3. Трехмерную сферу S^3 зададим как множество пар (z_1, z_2) комплексных чисел z_1, z_2, удовлетворяющих уравнению $z_1^2 + z_2^2 = 1$. Тогда расслоение Хопфа задается субмерсией $h : S^3 \to S^2$, при которой $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$. Здесь двумерная сфера S^2 рассматривается как расширенная комплексная плоскость $C \cup \{\infty\}$.

Для каждого $\lambda \in S^2$ слой $h^{-1}(\lambda)$ слоения Хопфа есть окружность в S^3, которая является геодезической. Действительно, $h^{-1}(\lambda)$ является пересечением сферы S^3 и двумерной плоскости $z_1 = \lambda z_2$, проходящей через начало координат. Поэтому для каждого $\lambda \in S^2$ слой $h^{-1}(\lambda)$ является вполне геодезическим подмногообразием S^3. С другой стороны, расслоение Хопфа можно задать с помощью действия одномерной сферы S^1 на S^3.

Одномерная сфера S^1 рассматривается как множество комплексных чисел вида $e^{i\phi}$, и действие S^1 на S^3 задается по формуле $(z_1, z_2) \to (z_1 e^{i\phi}, z_2 e^{i\phi})$. Это действие является свободным, и поэтому каждая орбита диффеоморфна S^1. Если $\lambda = \dfrac{z_1^0}{z_2^0}$, то орбита, содержащая точку (z_1^0, z_2^0), описывается уравнением $z_1 = \lambda z_2$. Следовательно, каждая орбита есть слой расслоения $h : S^3 \to S^1$.

Пусть $p, q \in S^3$, $L(p), L(q)$ — слои расслоения Хопфа, проходящие через точки p и q, и пусть $r = \rho(p, L(q))$ — расстояние от точки p до слоя $L(q)$. Из того, что расслоение Хопфа определяется действием S^1, вытекает, что $\rho(p', L(q)) = r$ для всех $p' \in L(p)$. Следовательно, слоение F, определяемое слоями расслоения Хопфа, является римановым слоением. Пусть TF — распределение, касательное к F, а H — его ортогональное дополнение. Распределение H не является вполне интегрируемым. Действительно, если H вполне интегрируемо, то по теореме 4.2 связность $\tilde{\nabla}$ совпадает с ∇ и следовательно, распределения TF и H удовлетворяют условиям теоремы де Рама. Тогда S^3 должна быть изометричной прямому произведению $S^1 \times S^2$, что невозможно.

Теперь рассмотрим вполне интегрируемые распределения и связанные с ними слоения с особенностями. Ясно, что если распределение P вполне интегрируемо, то многообразие M распадается на интегральные многообразия этого распределения. Если распределение P вполне интегрируемо и размерность подпространства $k = \dim P(x)$ не зависит от x, то интегральные многообразия порождают k-мерное слоение. В общем случае, поскольку размерности интегральных многообразий различны, на M не возникает слоение. Однако это разбиение приводит к понятию слоения с особенностями (к сингулярным слоениям). Поэтому сейчас перейдем к описанию слоений с особенностями. Во избежания недоразумений, для обычных слоений в случае необходимости будем употреблять термин «регулярное слоение».

Определение 4.3. Подмножество L многообразия M называется *k-мерным слоем*, если существует дифференциальная структура σ на L такая, что:

1. (L, σ) есть связное k-мерное погруженное многообразие M;
2. если N — произвольное локально связное топологическое пространство и $f : N \to M$ — непрерывное отображение такое, что $f(N) \subset L$, то $f : N \to (L, \sigma)$ непрерывно.

Из определения погружений следует, что если $f : N \to M$ — дифференцируемое отображение и $f(N) \subset L$, тогда $f : N \to (L, \sigma)$ также дифференцируемо. Поэтому, в частности, σ является единственной дифференциальной структурой, по отношению к которой L является k-мерным подмногообразием.

Определение 4.4 (см. [27]). Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$ или $q = \omega$ (аналитичность). Будем говорить, что разбиение F многообразия M на C^q-слои является *сингулярным слоением* (*слоением с особенностями*) класса C^q, если для каждой точки $x \in M$:

а) существует локальная C^q-карта ψ с областью определения $U \times V$, где U — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k, V$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^{n-k}$, и k есть размерность слоя, проходящего через точки x;
б) $\psi(0, 0) = x$;
в) если L слой F, тогда имеет место равенство $L \cap \psi(U \times V) = \psi(U \times l)$, где $l = \{v \in V : \psi(0, v) \in L\}$.

В дальнейшем, как и в случае слоений постоянной размерности, слой слоения F, проходящий через точку x, обозначим через $L(x)$.

Пример 4.4. Каждое регулярное слоение является слоением с особенностями. В этом случае каждая компонента связности множества l является точкой.

Пример 4.5. Пусть S — замкнутое подмножество многообразия M, $M\backslash S = \bigcup\limits_{\alpha} M_\alpha$ — разбиение дополнения $M\backslash S$ на компоненты связности M_α, F_α — регулярное слоение на M_α. Тогда семейство $F = \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha \cup \{x : x \in S\}$ определяет слоение с особенностями на M.

Пример 4.6. Орбиты семейства векторных полей класса C^r определяют слоение с особенностями класса C^r. Это вытекает из следующей теоремы, принадлежащей Г. Суссманну [28] и П. Стефану [27], которая является фундаментальной при исследовании орбит системы векторных полей.

Теорема 4.3. *Пусть M — гладкое (класса C^{r+1}) многообразие размерности n, D — система векторных полей класса $C^r, r \geqslant 1$. Тогда орбиты системы D векторных полей определяют сингулярное слоение класса C^r.*

В дальнейшем всюду орбиту системы D будем рассматривать как слой слоения F с особенностями.

Отметим, что функция $x \to \dim L(x)$ является полунепрерывной снизу. Действительно, если $x \in M$, $(U \times V, \psi)$ — локальная карта в окрестности точки x, описанная в определении, и $L \cap \psi(U \times V) \neq \oslash$, где L — слой F, то $\dim(L \cap \psi(U \times V)) = \dim(U \times l) \geqslant \dim U = \dim L(x)$.

Как и в случае регулярных слоений, слой L слоения F с особенностями называется *собственным*, если каноническая инъекция $i : L \to M$ является вложением.

Обозначим через M/F множество слоев слоения F. Введем отношение на множестве M/F, определим понятия глубины слоя и слоения, следуя [24].

Пусть $L^1, L^2 \in M/F$. Пишем $L^1 \leqslant L^2$ тогда и только тогда, когда $L^1 \subset \overline{L^2}$. Запись $L^1 < L^2$ означает, что $L^1 \leqslant L^2$ и $L^1 \neq L^2$.

Обозначим через $(M/F, \leqslant)$ множество слоев с введенным отношением на нем. Очевидно, что это отношение $\leqslant$ рефлексивно, но во многих случаях это отношение не является антисимметричным (например, для иррациональной обмотки тора), поэтому в общем случае множество $(M/F, \leqslant)$ не является частично упорядоченным множеством.

Глубина слоя L и глубина слоения F определяются следующим образом: $dL = Sup(k :$ существует k слоев, удовлетворяющие условию: $L^0 < L^1 < L^2 < \ldots < L^k = L)$, $dF = Sup(dL : L \in M/F)$.

Если $\dim A_x(D) = n - 1$ для всех $x \in M$, то, как было отмечено выше, F является слоением коразмерности один. В работе [24] для слоений коразмерности один компактных многообразий получен следующий результат.

Теорема 4.4 (Нисимори)**.** *Если $dF < \infty$ или все слои слоения F собственные, то множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено.*

Нисимори, изучая свойства слоений коразмерности один, поставил следующие вопросы, которые представляют интерес и для слоений с особенностями [24]:

1. Может ли слоение F иметь несобственные слои, если множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено?
2. Можно ли утверждать, что слой L — собственный, если $dL < \infty$?
3. Существует ли такое слоение F, что множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено и $dF = \infty$?

Следующая теорема решает вопросы 1,2 [5].

Теорема 4.5. *Для того чтобы множество $(M/F, \leqslant)$ было частично упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы все слои слоения f были собственными.*

Следствие 4.1. *В замыкании каждого несобственного слоя L содержатся несчетное число несобственных слоев, замыкание которых совпадает с L.*

Из этого следствия вытекает, что если слоение с особенностями имеет несобственный слой, то оно имеет несчетное число несобственных слоев. Заметим, что число собственных слоев может быть конечным или счетным.

Следствие 4.2. *Если $dL < \infty$, то L — собственный слой.*

Действительно, если L — несобственный слой, то согласно следствию 4.2 имеет место $dL = \infty$.

Заметим, что этот факт для слоений коразмерности один компактных многообразий доказан в работе [24].

В общем случае собственный слой может иметь бесконечную глубину. Известны примеры слоений коразмерности один, когда замыкание собственного слоя содержит несобственные слои. Нетрудно построить слоение с особенностями, в котором собственный слой имеет бесконечную глубину.

Теперь перейдем к сингулярным римановым слоениям.

Определение 4.5. Слоение F называется *римановым*, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [25] и изучались многими авторами, в частности, в работах [21, 31]. Сингулярные римановы слоения были введены Молино в своей монографии [21].

Пусть ω — дифференциальная форма степени 1 на M и $P(x) = \{v \in T_xM : \omega_x(v) = 0\}$ для всех $x \in M$. Возникает распределение $P : x \to P(x)$, где $\dim P(x) = n - 1$. Это распределение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\omega \bigwedge d\omega = 0$ (теореме Фробениуса). Поэтому если ω — замкнутая дифференциальная форма ($d\omega = 0$), то распределение $P : x \to P(x)$ вполне интегрируемо. Возникает слоение F размерности $n - 1$. Известно, что если многообразие M компактно и слоение F задано замкнутой дифференциальной формой, то существует такая риманова метрика $\tilde{g}$ на M, что слоение F является римановым по отношению к римановой метрике $\tilde{g}$ (см. [26]).

Например, для одномерного слоения F на двумерном торе T^2, определенного замкнутой формой $\omega = \omega_1 d\varphi_1 + \omega_2 d\varphi_2$, существует риманова метрика $\tilde{g}$ на T^2, по отношению к которой слоение F является римановым.

Пусть $f : M \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция без критических точек, т. е. ранг f всюду равен 1. Тогда f является субмерсией, и потому на M возникает слоение коразмерности один, слоями которого служат поверхности уровня функции f. В [31] доказано, чтобы это слоение было римановым, необходимо и достаточно, чтобы $X(|\nabla f|^2) = 0$ для всех векторных полей X, касательных к этому слоению, где ∇f — градиент функции f. Это означает, что вдоль слоев длина вектора-градиента ∇f функции f должна быть постоянной.

Пусть F является регулярным k-мерным слоением и $P : x \to P(x)$, где $x \in M$, и пусть $P(x) \subset T_xM$ для всех $x \in M$ — вполне интегрируемое распределение, максимальными подмногообразиями которого являются слои слоения F, а также $H : x \to H(x)$ — распределение, которое является ортогональным дополнением P, т. е. $T_xM = P(x) \oplus H(x)$ для всех $x \in M$. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_v + X_h$, где X_v, X_h — ортогональные проекции X на P, H соответственно. Здесь для удобства P, H рассматриваются как подрасслоения касательного расслоения TM.

Пусть D^* — множество гладких векторных полей, касательных к слоению. Если $X_h = 0$, то $X \in D^*$ и оно называется *вертикальным*, а если $X_v = 0$, то X называется *горизонтальным* полем. Для векторных полей X, Y, полагая $g_t(X, Y) = g(X_h, Y_h)$, получим билинейную симметричную форму на $V(M)$, ядро которой совпадает с D^*.

Изучим свойства этой формы. Напомним, что если $x \in M$, то по определению слоения существует окрестность V точки x и локальная система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ на V такая, что $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ образуют базис для сечения $P|_v$. Покажем, что базис $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ для сечений $H|_V$ можно выбрать таким образом, что скобка Ли $[X, v_j]$ для каждого $X \in D^*$, где $j = k+1, k+2, \ldots, n$, является вертикальным полем.

Пусть

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = k+1, k+2, \ldots, n$$

— координатное выражение векторного поля v_j на V. В силу того, что векторные поля $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, ранг матрицы v_j^i в точке x равен $n - k$. Не ограничивая общности, можем считать, что матрица $\{v^i_j\}$ невырождена в точке x, а следовательно, в некоторой окрестности x, где $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Обозначим через (ω^j_i), $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$, обратную матрицу к (v^i_j), $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$. Тогда, если положим $Y_j = \sum\limits_{k+1}^{n} \omega^i_j v_i$, $j = k+1, k+2, \ldots, n$ то $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots, Y_n$ является базисом для сечений $H|_V$. Кроме того, скобка Ли $[X, Y_j]$ для $X \in D^*$ выражается через $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, что проверяется непосредственным вычислением $[X, Y], j = k+1, k+2, \ldots, n$.

Предположим, что F является k-мерным римановым слоением по отношению к римановой метрике g. Тогда, как следует из [21, с. 78], для каждого вертикального поля $X \in D^*$ верно $Xg(v_i, v_j) = 0$ для всех $i, j = k+1, \ldots, n$. Учитывая этот факт, нетрудно доказать, что $Xg(Y,Z) = g_t([X,Y],Z) + g_t(Y,[X,Z])$, где $Y, Z \in V(M)$.

В этом случае g_t называется *трансверсальной метрикой* для слоения F, определенной римановой метрикой g (см. [21, с. 77]). Как следует из [22], верно и обратное, т. е. если задано k-мерное слоение F на римановом многообразии с римановой метрикой g, и если g_t является трансверсальной метрикой, тогда F является римановым слоением.

В работе [6] доказано, что аналогичный факт верен и для слоения с особенностями на полном римановом многообразии (M, g).

Пусть F — слоение с особенностями, L — слой слоения F, Q — нормальное расслоение слоя L. Тогда риманова метрика g определяет послойную метрику g^L_t на Q следующим образом: если $\nu_1, \nu_2 :\to Q$ — гладкие (класса C^∞) сечения расслоения Q, то положим $g^L_t(\nu_1, \nu_2) = g(X, Y)$, где $X, Y \in V(M)$, ν_1, ν_2 — сужения X, Y на L соответственно (заметим, что $g^L_t(\nu_1, \nu_2$ определена в точках слоя L).

Метрика g^L_T называется *трансверсальной метрикой* на L для F, если для каждого $X \in D^*$ в точках слоя L имеет место:

$$Xg^L_t(Y,Z) = g^L_t([X,Y],Z) + g^L_t(Y,[X,Z]),$$

где $g^L_t(Y,Z) = g(\pi Y, \pi Z)$, $Y, Z \in V(M)$, $\pi : TM \to Q$ — ортогональная проекция, определенная над L, а Q рассматривается как расслоение, ортогональное к расслоению TL.

Из результатов монографии [21, с. 199] вытекает, что если F является римановым слоением, то метрика g^L_T на каждом слое L слоения F является трансверсальной метрикой. Кроме того, в [21, с. 201] имеется гипотеза, что если полная риманова метрика g определяет на каждом слое слоения F трансверсальную метрику, то слоение F является римановым. Заметим, что риманово слоение с особенностями не имеет n-мерных слоев. Следующая теорема решает гипотезу Молино положительно.

Теорема 4.6. *Пусть M — полное риманово C^∞-многообразие с римановой метрикой g, а слоение F не имеет n-мерных слоев. Тогда для того, чтобы слоение F было римановым, необходимо и достаточно, чтобы риманова метрика g определяла на каждом слое слоения F трансверсальную метрику.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А. А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 3. — С. 497–514.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
4. *Лобри К.* Динамические полисистемы и теория управления// В сб.: «Математические методы в теории систем». — М.: Мир, 1979. — С. 134–173.
5. *Нарманов А. Я.* О структуре множества управляемости непрерывно уравновешенных систем управления// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1981. — *13*. — С. 50–55.
6. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множества управляемости симметричных систем управления// Дифф. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
7. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Дифф. уравн. — 1997. — *33*, № 10. — С. 1334–1338.

8. *Нарманов А. Я.* О геометрии вполне геодезических римановых слоений// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1999. — № 9. — С. 26–31.
9. *Нарманов А. Я., Косимов О.* О геометрии римановых слоений сфер малых размерностей// Докл. АН Респ. Узбекистан. — 2013. — № 2. — С. 96–105.
10. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
11. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии множества достижимости векторных полей// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 3. — С. 321–326.
12. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией// Уч. зап. МПИ им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. — 1938. — № 2. — С. 83–94.
13. *Agrachev A. A., Sachkov Y.* Control theory from the geometric viewpoint. — Berlin: Springer, 2004.
14. *Brockett R. W.* Lie algebras and Lie groups in control theory// В сб.: «Geometric Methods in System Theory». — Dordrecht: Springer, 1973. — С. 43–82.
15. *Cairns G.* A general description of totally geodesic foliations// Tohoku Math. J. — 1986. — *38*. — С. 37–55.
16. *Chow W. L.* Uber systeme von linearen partiellen differential-gleinchangen ester ordmung// Math. Ann. — 1939. — *117*. — С. 98–105.
17. *Hermann R.* On the accessibility problem in control theory// В сб.: «International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics». — N. Y.: Acad. Press, 1963. — С. 325–332.
18. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
19. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control. — 1975. — *13*, № 6. — С. 1271–1281.
20. *Lobry C.* Controllability of nonlinear control dynamical systems// Control Theory Topol. Funct. Anal. — 1976. — *1*. — С. 361–383.
21. *Molino P.* Riemaninan foliations. — Boston—Basel: Birkhauser, 1988.
22. *Morgan A.* Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension// Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — *11*. — С. 236–242.
23. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Japan. — 1968. — *18*. — С. 338–404.
24. *Nishimori T.* Behavior of leaves of codimension one foliations// Tohoku Math. J. — 1977. — *29*. — С. 255–273.
25. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*, № 1. — С. 119–132.
26. *Sacksteder R.* Foliations and pseudogroups// Am. J. Math. — 1965. — 87. — С. 79–102.
27. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities// Proc. Lond. Math. Soc. — 1974. — *29*. — С. 694–713.
28. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of distribution// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *180*. — С. 171–188.
29. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — С. 197–199.
30. *Sussmann H., Jurdjevich V.* Controllability of nonlinear systems// J. Differ. Equ. — 1972. — *12*. — С. 95–116.
31. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian manifolds. — N. Y.: Springer, 1988.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: `narmanov@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-54-71 UDC 517.936+517.925.53

Geometry of Orbits of Vector Fields and Singular Foliations

© 2019 **A. Ya. Narmanov**

Abstract. The subject of this paper is the geometry of orbits of a family of smooth vector fields defined on a smooth manifold and singular foliations generated by the orbits. As is well known, the geometry of orbits of vector fields is one of the main subjects of investigation in geometry and control theory. Here we propose some author's results on this problem. Throughout this paper, the smoothness means C^{∞}-smoothness.

REFERENCES

1. A. A. Azamov and A. Ya. Narmanov, "O predel'nykh mnozhestvakh orbit sistem vektornykh poley" [On limit sets of orbits of systems of vector fields], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2004, **40**, No. 2, 257–260 (in Russian).
2. V. N. Berestovskiy and Yu. G. Nikonorov, "Killingovy vektornye polya postoyannoy dliny na rimanovykh mnogoobraziyakh" [Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2008, **49**, No. 3, 497–514 (in Russian).
3. Sh. Kobayashi and K. Nomizu, *Osnovy differentsial'noy geometrii. T. 1* [Foundations of Differential Geometry. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1981 (Russian translation).
4. C. Lobry, "Dinamicheskie polisistemy i teoriya upravleniya" [Dynamical polysystems and control theory], In: *Matematicheskie metody v teorii sistem* [Mathematical Methods in the Theory of Systems], Mir, Moscow, 1979, pp. 134–173 (Russian translation).
5. A. Ya. Narmanov, "O strukture mnozhestva upravlyaemosti nepreryvno uravnoveshennykh sistem upravleniya" [On the structure of the controllability set of continuously balanced control systems], *Vestn. Leningrad. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1981, **13**, 50–55 (in Russian).
6. A. Ya. Narmanov, "O transversal'noy strukture mnozhestva upravlyaemosti simmetrichnykh sistem upravleniya" [On the transversal structure of the controllability set of symmetric control systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1996, **32**, No. 6, 780–783 (in Russian).
7. A. Ya. Narmanov, "O zavisimosti mnozhestva upravlyaemosti ot tselevoy tochki" [On the dependence of the controllability set on the goal point], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 10, 1334–1338 (in Russian).
8. A. Ya. Narmanov, "O geometrii vpolne geodezicheskikh rimanovykh sloeniy" [On the geometry of completely geodesic Riemannian foliations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1999, No. 9, 26–31 (in Russian).
9. A. Ya. Narmanov and O. Kosimov, "O geometrii rimanovykh sloeniy sfer malykh razmernostey" [On the geometry of Riemannian foliations of low-dimensional spheres], *Dokl. AN Resp. Uzbekistan* [Rep. Uzbek. Acad. Sci.], 2013, No. 2, 96–105 (in Russian).
10. A. Ya. Narmanov and S. Saitova, "O geometrii orbit vektornykh poley Killinga" [On the geometry of orbits of Killing vector fields], *Diff. uravn.* [Diff. uravn.], 2014, **50**, No. 12, 1582–1589 (in Russian).
11. A. Ya. Narmanov and S. Saitova, "O geometrii mnozhestva dostizhimosti vektornykh poley" [O geometrii mnozhestva dostizhimosti vektornykh poley], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 3, 321–326 (in Russian).
12. P. K. Rashevskiy, "O soedinimosti lyubykh dvukh tochek vpolne negolonomnogo prostranstva dopustimoy liniey" [On connectability of any two points of a completely nonholonomic space by an admissible line], *Uch. zap. MPI im. K. Libknekhta. Ser. fiz.-mat. nauk* [Sci. Notes Moscow Pedagog. Inst. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1938, No. 2, 83–94 (in Russian).
13. A. A. Agrachev and Y. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Springer, Berlin, 2004.
14. R. W. Brockett, "Lie algebras and Lie groups in control theory," In: *Geometric Methods in System Theory*, Springer, Dordrecht, 1973, pp. 43–82.
15. G. Cairns, "A general description of totally geodesic foliations," *Tohoku Math. J.*, 1986, **38**, 37–55.
16. W. L. Chow, "Uber systeme von linearen partiellen differential-gleinchangen ester ordmung," *Math. Ann.*, 1939, **117**, 98–105.

17. R. Hermann, "On the accessibility problem in control theory," In: *International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics*, Acad. Press, N. Y., 1963, pp. 325–332.
18. V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
19. N. Levitt and H. Sussmann, "On controllability by means of two vector fields," *SIAM J. Control.*, 1975, **13**, No. 6, 1271–1281.
20. C. Lobry, "Controllability of nonlinear control dynamical systems," *Control Theory Topol. Funct. Anal.*, 1976, **1**, 361–383.
21. P. Molino, *Riemaninan foliations*, Birkhauser, Boston—Basel, 1988.
22. A. Morgan, "Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1960, **11**, 236–242.
23. T. Nagano, "Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras," *J. Math. Soc. Japan.*, 1968, **18**, 338–404.
24. T. Nishimori, "Behavior of leaves of codimension one foliations," *Tohoku Math. J.*, 1977, **29**, 255–273.
25. B. Reinhart, "Foliated manifolds with bundle-like metrics," *Ann. Math.*, 1959, **69**, No. 1, 119–132.
26. R. Sacksteder, "Foliations and pseudogroups," *Am. J. Math.*, 1965, 87, 79–102.
27. P. Stefan, "Accessible sets, orbits, and foliations with singularities," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1974, **29**, 694–713.
28. H. Sussmann, "Orbits of family of vector fields and integrability of distribution," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1973, **180**, 171–188.
29. H. Sussmann, "Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1973, **79**, 197–199.
30. H. Sussmann and V. Jurdjevich, "Controllability of nonlinear systems," *J. Differ. Equ.*, 1972, **12**, 95–116.
31. Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer, N. Y., 1988.

A. Ya. Narmanov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: narmanov@yandex.ru